2次元写像の力学系的構造について
— Hénon map の構造と分岐 —

三波　篤郎　（北見工大）

極めて単純なシステムが極めて複雑な挙動を示す... というものが、"複雑系" のひとつの興味の対象であるのなら、2次多項式は、まさにその典型的な例となる.

任意の $\boldsymbol{R}$ または C 上の2次関数は、アファイン写像による座標変換によって，次のような形にできることが簡単にわかる.

$$f_a(x) = a - x^2 \qquad\qquad f_c(z) = z^2 + c$$

普通 real の場合は左側を標準形とし，complex の場合は右側を使うのが慣例となっている．また real の場合は，

$$f_a(x) = ax(1-x) \qquad\qquad f_a(x) = 1 - ax^2$$

という標準形を使うことも多い．このような最も単純な関数を力学系として見たとき，そこに非常に複雑な構造が隠されているということが，この１５年ほどの多くの研究により明らかになり、それは１次元力学系理論、複素力学系理論として、ほぼ完成したと言っていいだろう.

さて，$\boldsymbol{R}^2$ 及び $\boldsymbol{C}^2$ 上の2次多項式で表わされる写像も，１次元の場合とは全く異なる更に複雑な構造を持っており，非線形系で現われる strange attractor や homoclinic bifurcation，また Hamiltonian system の KAM theoretic な分岐などの最も基本的なモデルでもある.

2次多項式で表わされる $\boldsymbol{R}^2$ または $\boldsymbol{C}^2$ からそれ自身への写像で，Jacobian が constant なものは，affine map による座標変換によって，次のどちらかの写像に変換できることがわかる.

$$H(x,y) = (by + a - x^2, x).$$

$$F(x,y) = (\alpha x + y^2 + \beta, \gamma y + \delta).$$

その形からわかるように，F は力学系としては単純なものである．H を Hénon map という．従って Hénon map は、力学系として nontrivial な2次多項式 diffeomorphism の標準形であると言える.

Hénon map に関してまず重要なことは、horse shoe map の生成過程を含んでいるということである．Devaney–Nitecki は，パラメーター a がある程度大きければ（$a \geq 2(1+|b|)^2$）Hénon map は horse shoe map になり，$a < -(1+|b|)^2/4$ ならば $\Omega(H_{a,b}) = \emptyset$ であることを証明している．よく知られているように，homoclinic point があれば，そこには horse shoe map と同型の subsystem が含まれており，更にほとんど全ての nontrivial な non–linear system は homoclinic point を持っている．その意味で，horse shoe map の生成過程は非線形系の分岐に於いて，最も基本的な要素である．しかし、horse shoe map になる以前の Hénon map の分岐は極めて複雑である.

それの原因は、あらゆるところで homoclinic tangency が起きているために、あらゆるところで無限の分岐が発生しているからである.

よく知られているように、Hénon map はあるパラメーター領域に於いて Hénon attractor と呼ばれる attractor を持っており [H], これは dissipative な非線形系で現われる strange attractor の中で最も単純なものである. しかしながら、そのアトラクター上での dynamics は未だによくわかっていないし、さらに、non-trivial attractor の存在が厳密に証明されているのは, $|b|$ が十分に小さい時のみである（[BC], [MV]）. このような non-hyperbolic attractor が存在するようなパラメータの測度は正であることが数学的に証明されているが、それは開集合を含むようなものではなく、むしろカントール集合的なものであり、従って、僅かなパラメータの変化に対しても、実は無限の分岐が起きているのである.

Hénon map は $b = -1$ の時は area preserving map の 1–parameter family となる. 特に H は $-1 < a < 3$ では elliptic な fixed point を持つ. この間この fixed point のまわりでは, Hamiltonian system から得られる写像で見られるような, invariant circle や islands の発生, 消滅が起きる. この意味で Hénon map は, area preserving map（あるいは symplectic map）の分岐の最も単純な paradigm であるとも言える。

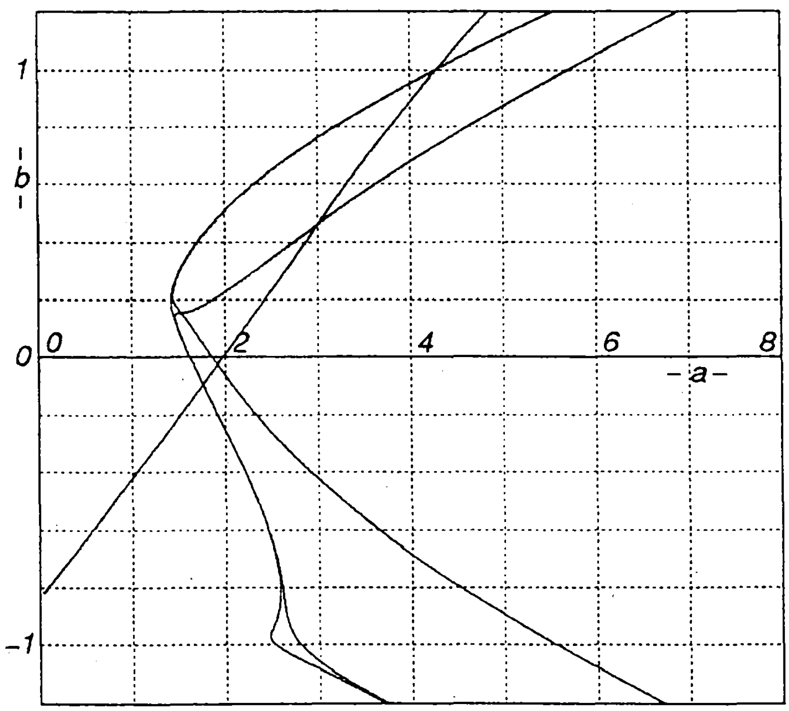

Figure 1: Bifurcation Diagram of Period 5

1 Topological strucrute of the bifurcation diagram of the Hénon family

Hénon map のパラメーター空間を数値計算によって調べると、その中に cusp connection と呼ばれる特徴的な構造が存在し，それによって standard な quadratic map のタイプの異なる周期点が、Hénon map のパラメーター空間の中でつながっているという事実が見受けられる．また、その cusp connection と呼ばれる関係には、ある種の規則性が予想される．

[San3], [SS] では，1 次元の quadratic map のタイプの異なる周期軌道が，Hénon map のパラメータ空間の中でつなぐことができるためのある十分条件を与えている．その条件は，記号列のある単純な操作で与えられるのもであり，任意に与えられた 2 つの itinerary がその条件のもとで同値になるかどうかは，簡単に判定できる．この条件は，Hénon map のパラメータ空間において，itinerary を特定できる部分，すなわち，1-dimensional part と hyperbolic part のつながり方を調べることによって得られる．さらに、この条件は極めて自然であるため，必要条件にもなると期待できる．

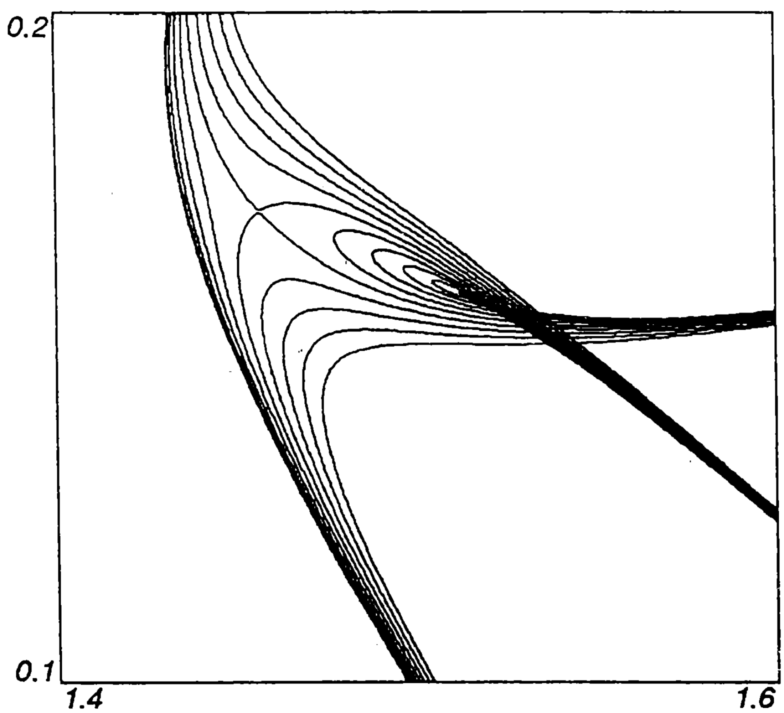

Figure 2: Cusp Region

2 Hyperbolicity in the Hénon family

ある与えられた写像の周期点の個数を厳密に求めることは，たとえ１次元の２次関数や Hénon map のような，きわめて単純な写像であっても非常に難しい．その方法としてもふつう Newton 法 くらいしか思いつかないわけだが，それでやると周期はせいぜい１０くらいであり，大型計算機などでかなりがんばっても１５くらいが限界と思われる．またそこまでやったとしても Newton 法では，得られた数の確実性に不安が残る．

しかし１９８９年頃，Biham と Wenzel という人たちが Hénon map に対してだけではあるが，画期的な方法を発見したのである．それは基本的には Aubry–Mather の Lagrangian というものに基づいており，まず周期 p の周期点がその critical point に１対１に対応しているような $\boldsymbol{R}^p$ 上のある gradient vector field を定義する．そしてその critical points を全て捜し出す，ということを行なうのである．残念ながら，この方法の正当性は数学的には証明されていない．しかしこの方法がうまくゆかない例もまだ見つかってはいないようである．

さて，$b=-1$ (area and orientatin preserving case) の場合に，上記の Biham–Wenzel の方法を使って a を変化させながら周期２０までの周期点の個数を計算して行くと，あるけっこう広い a の区間で，周期点の個数が一定となるものがいくつか存在することがわかる．これはこれらのパラメーター領域で Hénon map が構造安定となることを示しているように見える．構造安定性定理より，それは non-wandering set が hyperbolic set となることを意味する．

[DMS] では数学的に厳密な証明はないものの，その hyperbolicity のメカニズムを説明し，そこから得られるマルコフ分割で計算した周期点の個数と，Biham–Wenzel の方法で計算した個数とが，周期２０まで完全に一致するという結果を得ている（周期２０の周期点の個数は，１００万くらいにもなる）．またここで調べられた３つの hyperbolic case は全て，missing block expression という方法でかなり簡単にその構造を表現できる．この missing block expression は Cvitanović の pruning front のひとつの例とも言えるが，対応する Hénon map の構造を具体的に与えたものとしては，初めてのものである．

References

[B] E.Bedford, *Iteration of polynomial automorphisms of* C^2, Proceedings of the ICM Kyoto 1990, 847–858.

[BC] M.Benedics, L.Carleson, *The dynamics of the Hénon map*, Ann. of Math. 133 (1991), 73–169.

[BS1] E.Bedford, J.Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of* C^2*: currents, equilibrium measure and hyperbolicity*, Inv.Math. 103 (1991), 69–99.

[BS2] E.Bedford, J.Smillie, *Fatou–Bieberbach domains arising from polynomial automorphisms*, Indiana Univ.Math.J. 40 (1991), 789–792.

[BS3] E.Bedford, J.Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of* C^2*: Stable manifolds and recurrence*, J.A.M.S. 4 (1991), 657–679.

[BS4] E.Bedford, J.Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of* C^2*: Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure* Math.Ann. 294 (1992), 395–420.

[BW] O.Biham, W.Wenzel, *Characterization of unstable periodic orbits in chaotic attractors and repellors*, Phys Rev Lett. 63 (1989), 819–822.

[DMS] M.J.Davis, R.S.MacKay, A.Sannami, *Markov shifts in the Hénon family*, Physica D 52 (1991), 171–178.

[FS] JE.Fornaess, N.Sibony, *Complex dynamics in higher dimensions*, Complex Potential Theory, Kluwer Academic Publishers (1994), 131–186.

[H] M.Hénon, *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, Comm.Math.Phys. 50 (1976), 69–77.

[MV] L.Mora, M.Viana, *Abundance of strange attractors*, Acta Math. 171 (1993), 1–71.

[San1] A.Sannami, *On the structure of the parameter space of the Hénon family*, Dynamical Systems and Applications. (ed. N.Aoki), World Scientific (1987), 143–157.

[San2] A.Sannami, *A topological classification of the periodic orbits of the Hénon family*, Japan J.Appl.Math. 6, No.2 (1989), 291–330.

[San3] A.Sannami, *On the structure of the parameter space of the Hénon map*, Towards the Harnessing of Chaos (ed. M.Yamaguti), Elsevier Science B.V. (1994), 289–303.

[SS] A.Sannami, K.Shibayama, *On the configuration of the periodic point surfaces of the Hénon family*, in preparation.