経済時系列の非線形因果解析

岡部靖憲 (東京大学工学部計数工学科)

中野裕治 (滋賀大学経済学部統計学科)

数学としての因果性

$$\mathbf{X} = (X(n); \ell \leq n \leq r): \quad \mathbb{R}^{d_1} \text{ に値をとる確率過程 } on\ (\Omega, \mathcal{B}, P)$$

$$\mathbf{Y} = (Y(n); \ell \leq n \leq r): \quad \mathbb{R}^{d_2} \text{ に値をとる確率過程 } on\ (\Omega, \mathcal{B}, P).$$

$\mathbf{X}$ が原因で，$\mathbf{Y}$ が結果であるという因果関係が存在するとは

任意の $n \in \mathbb{Z}\ (\ell \leq n \leq r)$ に対して，$(\mathbb{R}^{d_1})^{n-\ell+1}$ から $\mathbb{R}^{d_2}$ へのボレル可測関数 F_n が存在して，次が成り立つこととする：

$$Y(n) = F_n(X(n), X(n-1), \cdots, X(\ell)) \quad \text{a.s.}$$

このとき，次のように表示する：

$$\mathbf{X} \xrightarrow{\text{因果}} \mathbf{Y}.$$

確率過程のある時刻までの情報は σ-加法族で表現できる．即ち，任意の $n \in \mathbb{Z}\ (\ell \leq n \leq r)$ に対して，σ-加法族 $\mathcal{B}_\ell^n(\mathbf{X}), \mathcal{B}_\ell^n(\mathbf{Y})$ を次で定める：

$$\mathcal{B}_\ell^n(\mathbf{X}) \equiv \sigma(\{X(k)^{-1}(F); F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1}), \ell \leq k \leq n\})$$
$$\mathcal{B}_\ell^n(\mathbf{Y}) \equiv \sigma(\{Y(k)^{-1}(F); F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_2}), \ell \leq k \leq n\}).$$

このとき，上で述べた因果関係の定義は次と同値になる：

$$\mathcal{B}_\ell^n(\mathbf{Y}) \subset \mathcal{B}_\ell^n(\mathbf{X}) \qquad (\ell \leq \forall n \leq r).$$

さらに, $X(n), Y(n)$ $(\ell \leq n \leq r)$ の各成分が 2 乗可積分であるときは, 次と同値である:

$$\mathbf{N}_\ell^n(\mathbf{Y}) \subset \mathbf{N}_\ell^n(\mathbf{X}) \qquad (\ell \leq \forall n \leq r).$$

ここで, $\mathbf{N}_\ell^n(\mathbf{Y}), \mathbf{N}_\ell^n(\mathbf{X})$ は完備な計量ベクトル空間 $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の閉部分空間である:

$$\mathbf{N}_\ell^n(\mathbf{X}) \equiv \{Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P); Z \text{ は } \mathcal{B}_\ell^n(\mathbf{X}) - \text{可測な確率変数である}\}$$
$$\mathbf{N}_\ell^n(\mathbf{Y}) \equiv \{Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P); Z \text{ は } \mathcal{B}_\ell^n(\mathbf{Y}) - \text{可測な確率変数である}\}.$$

線形因果関係と因果関数

完備な計量ベクトル空間 $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の閉部分空間 $\mathbf{M}_\ell^n(\mathbf{X}), \mathbf{M}_\ell^n(\mathbf{Y})$ を定義する:

$$\mathbf{M}_\ell^n(\mathbf{X}) \equiv [X_j(k); \ell < k \leq n \leq r, 1 \leq j \leq d_1]$$
$$\mathbf{M}_\ell^n(\mathbf{Y}) \equiv [Y_j(k); \ell < k \leq n \leq r, 1 \leq j \leq d_2].$$

$\mathbf{X}$ が原因で, $\mathbf{Y}$ が結果であるという線形因果関係が存在するとは

$$\mathbf{M}_\ell^n(\mathbf{Y}) \subset \mathbf{M}_\ell^n(\mathbf{X}) \qquad (\forall n \in [\ell, r])$$

が成り立つときを言い, 次のように表示する:

$$\mathbf{X} \xrightarrow{\text{線形因果}} \mathbf{Y}.$$

二つの確率過程の間の線形因果関係を定量的に判別することを考えよう. そのために, 以下 $d_1 = d, d_2 = 1$ とし, $\mathbb{R}^d$ 値の確率過程 $\mathbf{X} = (X(n); n \in \mathbb{Z})$ と $\mathbb{R}$ 値の確率過程 $\mathbf{Y} = (Y(n)); n \in \mathbb{Z})$ を組にした $\mathbb{R}^{d+1}$ 値の確率過程 $\mathbf{U} = (U(n); n \in \mathbb{Z}) \equiv ({}^t(Y(n), {}^tX(n)); n \in \mathbb{Z})$ は, 平均ベクトル 0 の弱定常過程と仮定する:

$$U(n) = \begin{pmatrix} Y(n) \\ X_1(n) \\ X_2(n) \\ \vdots \\ X_d(n) \end{pmatrix}.$$

三つの共分散行列関数 R_1, R_2, R_3 を次で定義する：

$$\begin{cases} R_1(n) \equiv E(X(n)\ {}^tX(0)) & \in M(d,d;\mathbb{R}) \\ R_2(n) \equiv E(Y(n)\ {}^tX(0)) & \in M(1,d;\mathbb{R}) \\ R_3(n) \equiv E(Y(n)Y(0)) & \in M(1,1;\mathbb{R}). \end{cases}$$

関数 $C_*(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = C_n(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) : \mathbb{N}^* \longrightarrow [0,\infty)$ を

$$C_n(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) \equiv [E\{(P_{\mathbf{M}_0^n(\mathbf{X})}Y(n))^2\}]^{1/2}$$

で定義する．

補題 1.

(i) $$0 \le C_n(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) \le \sqrt{R_3(0)} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

(ii) $$C_n(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) \le C_{n+1}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

因果関係を定量的に特徴づける次の定理が成り立つ：

定理 1. 次の $(i), (ii)$ は同値である：

(i) $$\mathbf{X} \xrightarrow{\text{線形因果}} \mathbf{Y}$$

(ii) $$C_n(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) \nearrow \sqrt{R_3(0)} \qquad (n \to \infty).$$

かかる理由で関数 $C_n(\mathbf{Y}|\mathbf{X})$ を確率過程 $\mathbf{X}$ から 確率過程 $\mathbf{Y}$ への因果関数と名づけ，その極限値 $C_\infty(\mathbf{Y}|\mathbf{X})$ を確率過程 $\mathbf{X}$ から 確率過程 $\mathbf{Y}$ への因果値と名づける．この因果関数を $\mathbf{X}$ に付随する $\mathrm{KM_2O}$-ランジュヴァンデータ $\{\gamma_+(n,k), V_+(k); 0 \le k < n < \infty\}$ を用いて表現しよう．

定理 2. 任意の n, k $(0 \le k \le n)$ に対して

$$C_n(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = \{\sum_{k=0}^{n} C(n,k)V_+(k)\ {}^tC(n,k)\}^{1/2}.$$

ここで，$C(n,k)$ は $1 \times d$-行列で次で与えられる：

$$C(n,k) = \{R_2(n-k) + \sum_{l=0}^{k-1} R_2(n-l)\ {}^t\gamma_+(k,l)\}V_+(k)^{-1} \quad (0 \le k \le n).$$

非線形因果関係

二つの確率過程の間の定量的に特徴づけられた線形の因果関係の判定を応用して，一般の因果関係の有無を判別する方法を与えよう．

必要なことは，確率過程 $\mathbf{X}$ の非線形の情報を表す σ-加法族 $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}(n)$ を捕まえることである．そのために，非線形予測問題の結果とそこに到る考えを用いる．

$\mathbf{X} = (X(n); n \in \mathbb{Z}), \mathbf{Y} = (Y(n); n \in \mathbb{Z})$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上で定義された実数の値をとる確率過程とする．$\mathbf{X}$ から $\mathbf{Y}$ への因果関係があるかどうかを問題にする：

$$\mathbf{X} \xrightarrow{\text{因果}} \mathbf{Y}.$$

$\mathbf{X}$ は条件 (H.1),(H.2), (H.3) を満足する強定常過程とする．任意に固定した自然数 q に対して，d_q+1-次元の弱定常過程 $\mathbf{X}^{(q)} = (X^{(q)}(n); n \in \mathbb{Z}))$ を考える：

$$X^{(q)}(n) = \begin{pmatrix} \varphi_0(n) - E(\varphi_0(n)) \\ \varphi_1(n) - E(\varphi_1(n)) \\ \vdots \\ \varphi_{d_q}(n) - E(\varphi_{d_q}(n)) \end{pmatrix}.$$

(H.1) $\mathbf{X}$ は有界である，即ち，正数 $c>0$ が存在して

$$|X(n)(\omega)| \le c \qquad (\forall n \in \mathbb{Z}, a.s.\omega \in \Omega)$$

(H.2) 任意個数の $n_j \in \mathbb{Z}\ (1 \le j \le k), n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, に対して

確率分布 $P_{{}^t(X(n_1),X(n_2),\cdots,X(n_k))}$ の支えは正のルベーグ測度を持つ

(H.3.) $X(n)$ の平均は 0 $\qquad (n \in \mathbb{Z})$.

この二つの確率過程 $\mathbf{X}^{(q)}$ と $\mathbf{Y}$ の間の線形因果関係:

$$\mathbf{X}^{(q)} \xrightarrow{\text{線形因果}} \mathbf{Y}$$

があるとき，確率過程 $\mathbf{X}$ から確率過程 $\mathbf{Y}$ への階数 q の非線形の因果関係があると言い，次のように表示する：

$$(\star_q) \qquad \mathbf{X} \xrightarrow{\text{階数 } q \text{ の因果}} \mathbf{Y}.$$

その解析は

$$U(n) = \begin{pmatrix} Y(n) \\ X^{(q)}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y(n) \\ \varphi_0(n) - E(\varphi_0(n)) \\ \varphi_1(n) - E(\varphi_1(n)) \\ \vdots \\ \varphi_{d_q}(n) - E(\varphi_{d_q}(n)) \end{pmatrix}$$

で定義された $d_q + 2$-次元の確率過程 $\mathbf{U} = (U(n); n \in \mathbb{Z})$ が弱定常過程である場合を扱った.

次のことは明かである.

定理 3.

$$\mathbf{X} \xrightarrow{\text{階数 } q \text{ の因果}} \mathbf{Y} \quad (\exists q \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \mathbf{X} \xrightarrow{\text{因果}} \mathbf{Y}.$$

しかし, 定理 22.3.1 の逆の命題は成り立たない. 定理 22.2.1 を精密化して次のことが証明される:

定理 4. 次の $(i), (ii)$ は同値である:

(i) $$\mathbf{X} \xrightarrow{\text{因果}} \mathbf{Y}$$

(ii) $$C_\infty(\mathbf{Y}|\mathbf{X}^{(q)}) \nearrow \sqrt{R_3(0)} \qquad (q \to \infty).$$

因果テスト: Test(CS)

二つの一次元時系列 $\mathcal{X} = (\mathcal{X}(n); 0 \le n \le N), \mathcal{Y} = (\mathcal{Y}(n); 0 \le n \le N)$ を対象とし, 時系列 $\mathcal{X}$ から時系列 $\mathcal{Y}$ への因果関係の有無を判別する因果テスト: Test(CS) を提案する.

線形因果テスト　時系列 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}(n) = {}^t(\mathcal{Y}(n), \mathcal{X}(n)); 0 \le n \le N)$ は Test(S) を通過したとする. 時系列 $\mathcal{X}$ から時系列 $\mathcal{Y}$ への見本因果値を求める:

$$\text{時系列 } \mathcal{X} \text{ から時系列 } \mathcal{Y} \text{ への見本因果値} = C_M(\mathcal{Y}|\mathcal{X}).$$

ここで M は次で与えられる:

$$M = [3\sqrt{N+1}/2] - 1.$$

時系列 $\mathcal{X}$ の代わりに, 1000 個の物理乱数 ξ をとり, 見本因果値 $C_M(\mathcal{Y}|\xi)$ の分布を調べ, 次の見本因果分布表を作成する.

見本因果値	回数	割合
0.00≤ <0.05		
0.05≤ <0.10		
0.10≤ <0.15		
0.15≤ <0.20		
0.20≤ <0.25		
0.25≤ <0.30		
0.30≤ <0.35		
0.35≤ <0.40		
0.40≤ <0.45		
0.45≤ <0.50		
0.50≤ <0.55		
0.55≤ <0.60		
0.60≤ <0.65		
0.65≤ <0.70		
0.70≤ <0.75		
0.75≤ <0.80		
0.80≤ <0.85		
0.85≤ <0.90		
0.90≤ <0.95		
0.95≤ ≤1.00		

物理乱数から 時系列 $\mathcal{Y}$ への見本因果値の分布

Test(CS) このとき，時系列 $\mathcal{X}$ から時系列 $\mathcal{Y}$ への見本因果値が上の表の 0.95 から 1.00 までに位置するとき，時系列 $\mathcal{X}$ から時系列 $\mathcal{Y}$ への線形の因果関係があると判断し，次のように表記する：

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\text{線形因果}} \mathcal{Y}.$$

非線形因果テスト 時系列 $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ を規格化し，逆正接変換を施した時系列をそれぞれ $\mathrm{Arct}\widetilde{\mathcal{X}}=(\mathrm{Arct}\widetilde{\mathcal{X}}(n); 0 \leq n \leq N)$, $\mathrm{Arct}\widetilde{\mathcal{Y}}=(\mathrm{Arct}\widetilde{\mathcal{Y}}(n); 0 \leq n \leq N)$ とする：

$$\mathrm{Arct}\widetilde{\mathcal{X}}(n) \equiv \arctan(\widetilde{\mathcal{X}})$$

$$\mathrm{Arct}\widetilde{\mathcal{Y}}(n) \equiv \arctan(\widetilde{\mathcal{Y}}).$$

特に $\mathrm{Arct}\widetilde{\mathcal{X}}(n)$ を $\mathcal{W}(n)$ と置く：

$$\mathcal{W}(n) \equiv \mathrm{Arct}\widetilde{\mathcal{X}}(n).$$

階数 6 の非線形変換: 時系列 $\mathcal{X}^{(6)} \equiv (\mathcal{X}^{(6)}(n); 4 \leq n \leq N)$ を作る．時系列 $\mathcal{X}^{(6)}$ の 18 個の成分から，2,3,4,5,$\cdots$次元の時系列を選び出す．それぞれ，$\binom{18}{2}, \binom{18}{3}, \binom{18}{4}, \binom{18}{5}, \cdots$ 個の時

系列が構成される．何次元までの時系列を考えるかは，次元数 d とデータ数 N から決まる数 $M=[3\sqrt{N+1}/d+1]$ が少なくとも 5 以上になるまでとする．

(6-1): 上の任意の 2 次元時系列を固定し，それと時系列 $\mathrm{Arct}\widetilde{\mathcal{Y}}$ をそれぞれ時系列 $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ とみて，階数 2 の非線形変換のところで述べた手続きを行う．因果関係があると判明する組み合わせを控える．

(6-2): 上の任意の 3 次元時系列を固定し，それと時系列 $\mathrm{Arct}\widetilde{\mathcal{Y}}$ をそれぞれ時系列 $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ と見て，階数 3 の非線形変換のところで述べた手続きを行う．因果関係があると判明する組み合わせを控える．

(6-3): 以下，許される次元の時系列まで同じ手続きを行う．

(6-4): 以上の手続きにおいて，因果関係があると判明する組み合わせの中で，$\mathrm{Arct}\widetilde{\mathcal{Y}}$ に対する見本因果値が最小となるものを選ぶ．

Test(CS): 階数 6. : 時系列 $\mathcal{X}$ の代わりに *1000* 個の物理乱数 ξ を用いることによって，上の *(6-4)* で選ばれたのと同じ非線形変換を施した時系列 $\xi^{(6)}$ を作り，$\xi^{(6)}$ から $Arct\widetilde{\mathcal{Y}}$ への見本因果値 $C_M(Arct\widetilde{\mathcal{Y}}|\xi^{(6)})$ の分布を調べ，同じ見本因果分布表を作成する．上の *(6-4)* で選ばれた時系列から $Arct\widetilde{\mathcal{Y}}$ への見本因果値が上の見本因果分布表の *0.95* から *1.00* までに位置するとき，時系列 $\mathcal{X}$ から時系列 $\mathcal{Y}$ への *(*非線形*)* 因果関係があると判断し，次のように表記する*:*

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\text{階数 6 の因果}} \mathcal{Y}.$$

以上の手順は定理 1 に基づくもので，時系列 $\mathcal{X}$ から時系列 $\mathcal{Y}$ への因果関係は有限階数の因果関係であった．一般の非線形の有無に関しては，定理 4 を用いることによって，次のように判定することができる:

Test(CS):非線形因果関係. 階数 q の非線形変換を許されるところまで大きくしていく．これは階数 *6* のときに述べたことだが，次元数とデータ数から決まる数 M が少なくとも *5* 以上になるまでである．上の *(6-1)-(6-4)* と同じ手順を踏む．そこで選ばれたのと同じ非線形変換を時系列 $\mathcal{X}$ の代わりに，*1000* 個の物理乱数 ξ を用いることによって時系列を $\xi^{(q)}$ を作り，$\xi^{(q)}$ から $Arct\widetilde{\mathcal{Y}}$ への見本因果値 $C_M(Arct\widetilde{\mathcal{Y}}|\xi^{(q)})$ の分布を調べ，見本因果分布表を作成する．上で選ばれた時系列から $Arct\widetilde{\mathcal{Y}}$ への見本因果値が上の見本因果分布表の *0.95* から *1.00* までに位置するとき，時系列 $\mathcal{X}$ から時系列 $\mathcal{Y}$ への *(*非線形*)* 因果関係があると判断し，次のように表記する*:*

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\text{因果}} \mathcal{Y}.$$

経済時系列

(i) 公定歩合 (1969.1–1979.12)

(ii) 円の対ドル為替レート (1969.1–1979.12)

(iii) マネーサプライ (M1: 1969.1–1979.12) 先行系列（景気動向指数）：Money Suply(通貨供給量)—日本銀行や市中金融機関（都市銀行，地方銀行，相互銀行など）が企業，個人などに供給している現金や預金（当座預金，定期預金を含む）などの総称

$$M_1(\text{エムワン}) = \text{現金と預金通貨}$$

$$M_2(\text{エムツー}) = M_1 + \text{定期性預金}$$

$$M_3(\text{エムスリー}) = M_2 + \text{信託と郵便貯金}$$

(iv) 鉱工業生産指数 (1969.1–1979.12) 一致系列（景気動向指数）

(v) 鉱工業製品在庫指数 (1969.1–1979.12) 遅行系列（景気動向指数）

景気動向指数 (DI: diffusion index)

先行系列

1 製品在庫率指数（鉱工業）（逆サイクル）
2 原材料在庫率指数（鉱工業）（逆サイクル）
3 機械受注（船舶·電力を除く民需）
4 建設財出荷指数
5 新設住宅着工戸数
6 所定外労働時間（製造業）
7 新車新規登録台数（乗用車）
8 銀行取引停止処分件数（逆サイクル）
9 東証株価指数（総合）
10 マネーサプライ（M_2+CD）
11 日経商品指数（総合）
12 交易条件指数（総合）

一致系列

1 生産指数（鉱工業）（逆サイクル）
2 生産者出荷指数（鉱工業）（逆サイクル）
3 稼働率指数（製造業）
4 原材料消費指数（製造業）
5 大口電力使用量
6 輸入数量指数
7 建築着工床面積（鉱工業）
8 有効求人倍率
9 百貨店販売額
10 経常利益（全産業）
11 中小企業売上高（製造業）

遅効系列

1 製品在庫指数（鉱工業）
2 原材料在庫指数（製造業）
3 資本財出荷指数（輸送機械を除く）
4 常用雇用指数（製造業）
5 完全失業率（逆サイクル）
6 家計消費支出（全国勤労者世帯）
7 全国銀行貸出約定平均金利

１９７０年代

(i) ７１年８月１５日にドルの金交換停止⟶ 変動相場性に移行: 為替レートが外国為替市場における通貨の需要と供給によって変動する

(ii) ７１年にガット体制 (IMF) が崩れる

(iii) ７２年に日本列島改造論発表⟶ 土地·株等が高騰

(iv) ７３年に第一次オイルショック·狂乱物価

(v) ６０年代末までの高度成長から低成長へ

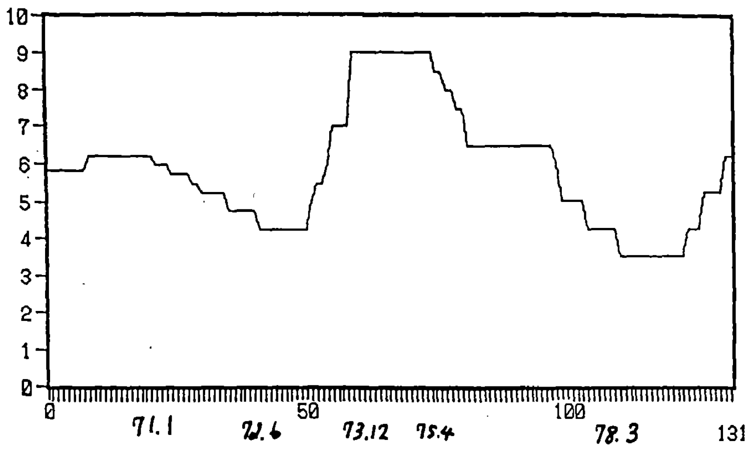
(vi) ７９年に自由金利導入⟶過剰流動性 (マネーサプライが必要以上に増えている)

(vii) ７９年１０月アメリカの新金融調整方式（これまでの金利重視からマネーサプライ重視に金融送政策の運営目標を転換）

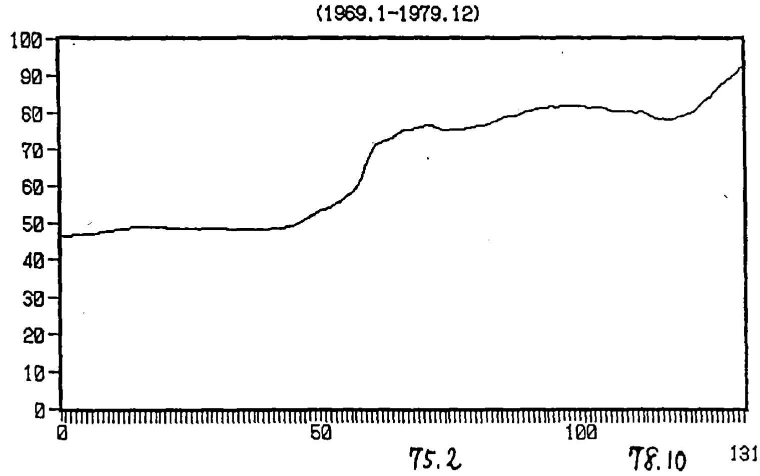
(viii) 公害の問題が生じる

公定

公定歩合(1969.1-1979.12)

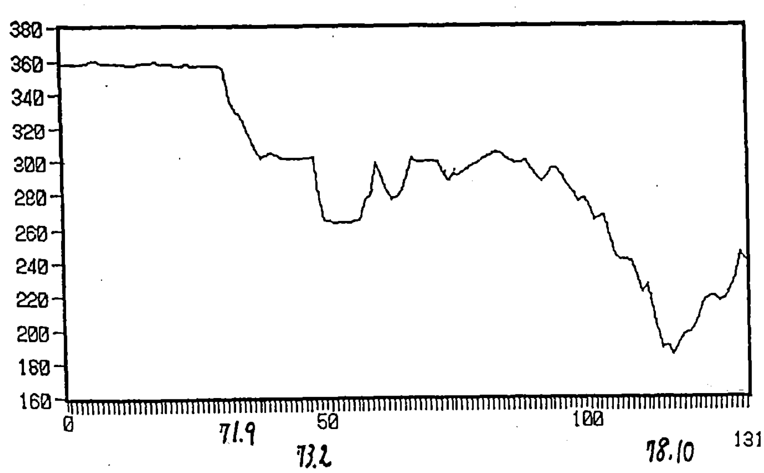


総合卸売指数(1985年基準)
(1969.1-1979.12)

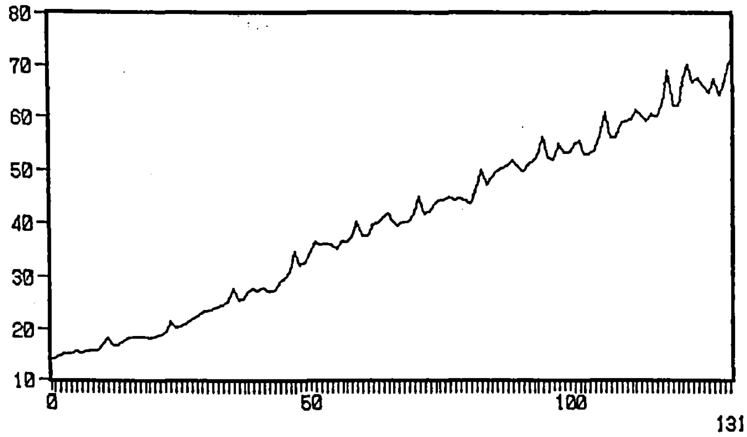


為替

円の為替レート(1969.1-1979.12)

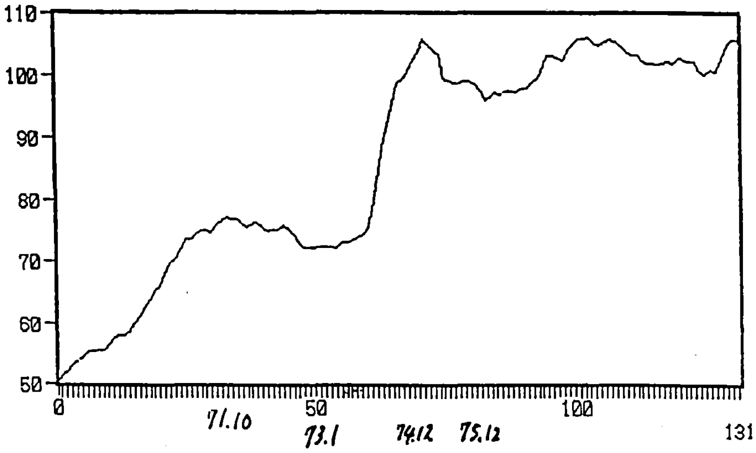


MS　マネーサプライ(M1:1969.1-1979.12)



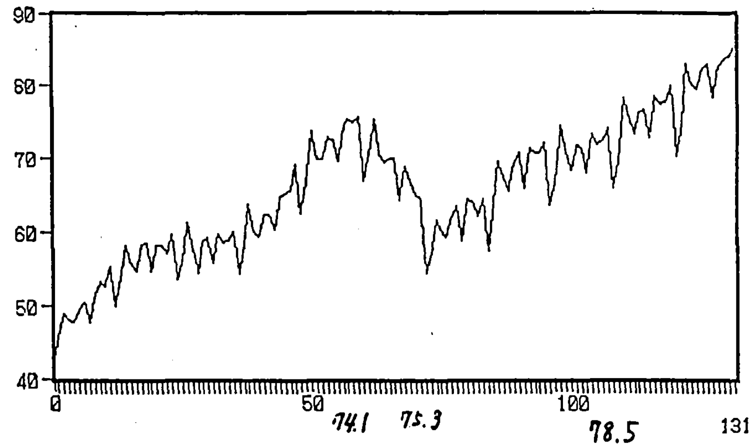
在庫

生産者製品在庫指数(鉱工業)
(1969.1-1979.12:1975年基準，調整)

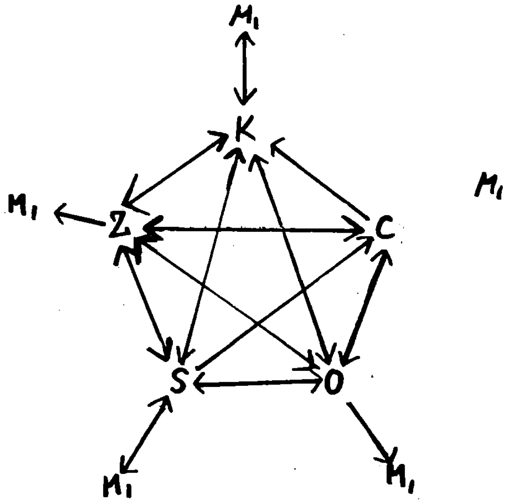


生産

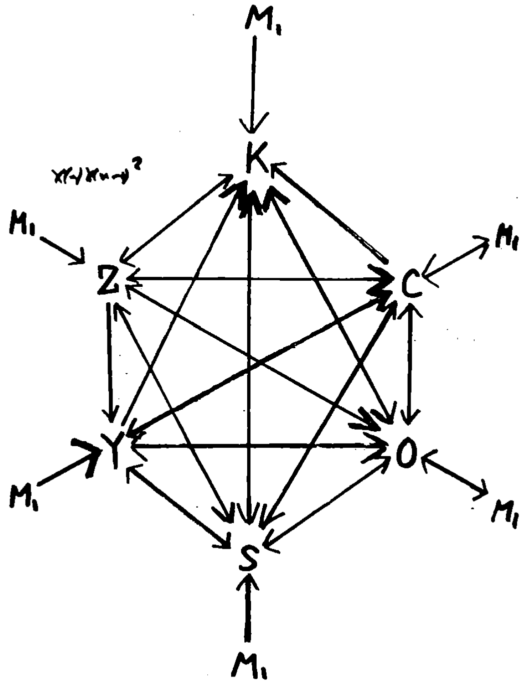
生産指数(鉱工業:1985年基準，未調整)
(1969.1-1979.12)



1960年代



1970年代



1980年代