位相型の変化を伴う場合の変分法の構成とその応用について

名古屋大学　多元数理科学研究科

四方 義啓

1　従来の変分法には、境界条件設定に無理が生じて「ちぎれる」、「くっつく」など位相変化を含むような実際問題を必ずしも数学的に「スマート」に処理できなかった部分がある。

例えば、「ひび割れ」など実際的な問題から派生する「三点　ABC　を通る最短線を求めよ」という変分問題では、標準線分［0、1］からの連続写像で点　ABC　を通るもののなす変分空間　X　の上で、曲線の長さを評価函数として常識的な変分問題を構成すると最小曲線が実現できないことがある。この問題の答えは幾何学などでも知られる通り、三点　ABC　を等角に見込む点　P　に対して　AP+BP+CP　と書けるからである。よって、最小曲線を実現するためには変分空間を拡張する必要がある。

そのためには、三本の標準線分　I1,I2,I3　をとり、これらを一端で貼りあわせて標準空間を作り、それからの連続写像のなす空間を変分空間にとればよい。一般にさらに複雑な境界条件や位相変化を取り扱う場合には、このような空間の極限をとったものを標準空間とし、それからの連続写像を変分空間として採用する。

上の標準空間を「肉付け」して、「中抜き」をすれば、ハンドルボディ構成がこのような場合の標準空間構成の「かなめ」であることが分かる。したがって、このような構成を高次元、特に三次元において行えば、「ちぎれる」、「くっつく」などの現象が取り扱える変分問題を構成できると期待できる。

具体的には、特異点を通過するハンドルボディ構成によって「ちぎれた」部分を「くっついた」部分につなぐ。言い換えれば、「ちぎれた」部分、「くっついた」部分をそれぞれ標準空間とする変分空間　X1,X2　を考え、それを「特異点を通る」部分　X3　に適当な位相のよって貼りあわせて、変分空間　X　を作る。この空間上で普通に面積の最小問題を考えると、境界の条件によって最小曲面が「ちぎれ」たり「くっつい」たりする様子が分かる。

2　このような変分空間が構成されると、単に長さや面積の最小問題に対する解釈ができるようになるばかりではなく、それによって逆変分問題を考えることができる。すなわち、実際の「ちぎれ」たり「くっつい」たりする現象に対して、それが「どのような」評価函数から得られるべきであるかという、極めて実用的な問題に対するアタックが可能になる。例えば、上に述べた「ひび割れ」現象について、それがどのような評価函数から

導かれるべきであるか、ないし、評価函数を導くには「何を仮定し」、「何に注目すべきか」を論じることができる。

例えば、「ひび割れ」の各部が「同じ重さをもって」その形を定めると仮定すると、評価函数は、「ひび割れ」の上の不変微分形式の積分によって与えられることが示される。一方、座標不変性は、これが「角度」と「長さ」の函数であることを意味する。さらに、実際の「ひび割れ」が、「（ある種の）かど」を有することから、この微分形式は「長さ」を指数 0 から 1 までで含むことが導かれる。

同様にして、ミルククラウンとして知られるコップにミルクを落としたときの王冠のような跳ね返りの形についても、逆変分問題が考えられる。このとき、王冠の上部にできるビーズが「ちぎれ」たり「くっつい」たりする現象であって、上に述べた複雑な変分空間を必要とする部分である。ミルククラウンを、その直径、高さ、さらに、ビーズの数という三つのパラメーターで表す。これらがある評価函数の最小化から得られるものとして、実験から評価函数の（位相型の）決定を行おうとする、ないし、そのための実験を設計するものがこの場合の逆変分問題である。実験はミルクを落とす高さ（すなわちミルクの滴がもつ位置エネルギー）を変化させて行い、この変数が、求める評価函数に含まれる様子からミルククラウンや「ひび割れ」の物理学の構成を試みた。実験設定やその精度についてはまだ検討の余地はあるが、評価函数がある領域で二値的であること、すなわち、「ひび割れ」などの物理学にはトムの理論から予想されるようなヒステリシス型をもつ評価函数が本質的であること、言い換えれば、それが必要条件として含まれねばならないことが目に見える形で示されたと考えている。