関数関係·演繹系·代謝系のパターン

辻下　徹

北海道大学理学部数学教室

1995.1.18

個々の複雑な系の特徴は、観測から得られる複数の観測値間にある種々の相関として現れる。その中でも、関数関係として現れる相関は、系についてのわかりやすい特徴を表現する。例えば、ある時刻の観測値とその直前の観測値との間の関数関係は因果関係と呼ばれ、自然科学では特別の位置を占めている。

一つの観測結果が多数の観測値によって記述される場合、それらの観測値の間に多数の関数関係が存在することが可能である。この関数関係全体のパターンは、観察対象のもつ「コヒーレンス」の一つの現れとも言えよう。従って、そのパターンの記述は対象の全体的性質についての、粗くはあるが、重要な認識を与えると考えることもできる[1]。

関数関係は互いに独立ではなく、ある関数関係は他のものの論理的帰結になることもある。このことは、関数関係のすべてを列挙するよりも幾分簡潔な記述が存在すること期待させる。この講演では、ラベル付き束 (lattice) により、関数関係のパターンが一義的にパラメトライズされ、それを通して、関数関係パターンの相互関係、例えばパターンの成長と退化の変動、を明確に見ることができることを説明した。

関数系の定めるハイパーグラフ　数学的には、観測値の系は次のように記述できる。$\mathcal{D}$を観測の集まりを表す集合とし、各観測 $d \in \mathcal{D}$ から観測値 $\{ x_a(d) \mid a \in A \}$ を得るとする。すなわち、$\{ x_a \mid a \in A \}$ は$\mathcal{D}$を定義域とする写像族とし、値域は写像ごとでことなるものとする。

このような写像族は、写像のパラメータ集合 A を頂点集合とする有向ハイパーグラフ[2]を次のように定める：

$$x_a(d) = x_a(d') \quad (\forall a \in \Gamma) \implies x_b(d) = x_b(d')$$

がすべての $d, d' \in \mathcal{D}$ について成り立つとき $\Gamma \xrightarrow{\mathcal{D}} b$ と定める。これは次の性質を持つ：

1. $a \xrightarrow{\mathcal{D}} a$,
2. $\Gamma \xrightarrow{\mathcal{D}} a$ ならば $b\Gamma \xrightarrow{\mathcal{D}} a$,
3. $\Gamma \xrightarrow{\mathcal{D}} a$ かつ $a\Delta \xrightarrow{\mathcal{D}} b$ ならば、$\Gamma\Delta \xrightarrow{\mathcal{D}} b$.

[1] しかし複雑系の観測データには厳密な関数関係は見られないのが普通である。

[2] E が $\mathrm{pow}\, V \times V$ の部分集合であるとき (V, E) を有向ハイパーグラフという。V の元を頂点、E の元を辺という。(Γ, v) が辺であるとき $\Gamma \to v$ と書く。

ただし、a は $\{a\}$ を表し、$\Gamma\Delta$ は合併集合$\Gamma\cup\Delta$ を表す。この性質を持つ有向ハイパーグラフを演繹的ハイパーグラフ[3] と呼ぶ。

演繹的ハイパーグラフはいろいろな状況で現れる。例えば

- A が命題の集合で 、命題の集合 Γ から命題 a が導かれるとき $\Gamma\to a$、
- A は分子の種類の集合で、分子の集合 Γ から分子 a が生成されるとき$\Gamma\to a$、
- A は制御変数の集合で 、変数の集合 Γ により変数 a が制御できるとき$\Gamma\to a$

と定めるとき、演繹的ハイパーグラフを得る。

演繹的ハイパーグラフが与えられたとき、それをパターンとして持つ関数族が存在することが知られているので、関数族の持つ関数関係のパターンを記述するには演繹ハイパーグラフを記述すればよい。

ラベル付き束　束 $(L,\leq)$ [4]と、写像 $\rho: A\to L$ との組が次の条件を満たすときこれをラベル付き束という :$v\in L$ が$\vee$-既約であるとき、すなわち、$v\neq\bigvee\{u \mid u<v\}$ であるとき、$\rho^{-1}v\neq\emptyset$。

ラベル付き束 $(L,\leq,\rho: A\to L)$ から次のようにして演繹的ハイパーグラフが定められる :

$$W\to b \iff \rho(b)\leq\bigvee\rho(W).$$

逆に、任意の演繹的ハイパーグラフに対して、ラベル付き束が同型を除いてただ一つ定まり、それの決める演繹的ハイパーグラフはもとのハイパーグラフと一致することが示される。従って、演繹的ハイパーグラフはラベル付き束によってパラメトライズされる。ラベル付き束を数え上げることは、束の数え上げに帰着できるので、演繹的ハイパーグラフを容易に数え上げることができる。

この研究の進展は、北海道大学理学部数学科の松尾和雅君·樋口 証君に多くを負うている。両君に深く感謝の意を表したい。

参考文献

[1] Higuchi A. Lattice of closure operators. preprint.

[2] Birkoff G. Lattice Theory, 3rd edition. AMS 1967.

[3]演繹的ハイパーグラフ全体の集合上には自然な束構造が入るが、[1] はその基本的構造を明らかにしている。

[4]順序集合 $(L,\leq)$ のどの有限部分集合 X も上限 $\vee X$ と下限 $\wedge X$ とを持つときこれを束という。空集合の上限として最小元 $\perp$、下限として最大元 $\top$ を持つ。束についての標準的文献としては [2] がある。