非線形時系列解析と新しい予測公式

岡部靖憲 (東京大学工学部計数工学科)

§1 $\mathbf{KM_2O}$-ランジュヴァン方程式論—揺動散逸定理

実際の時系列の予測問題を扱っているときに, 今まで発表してきた$\mathrm{KM_2O}$-ランジュヴァン方程式論を精密化する必要を感じた. 新たな弱定常性の定義を与え, $\mathrm{KM_2O}$-ランジュヴァン方程式論を再構成する.

W を計量ベクトル空間とする. 整数 ℓ, r $(\ell < r)$ に対して, W の中を動く曲線 $Y : \{\ell, \ell+1, \cdots, r\} \to W$ を

$$\mathbf{Y} = (Y(n); \ell \le n \le r)$$

と書き, W 内の一次元の流れ, パラメーター n を時間, 定義域 $\{\ell, \ell+1, \cdots, r\}$ を時間域と呼ぶ. 自然数 d に対して, W 内の d 次元の流れとは, d 個の一次元の流れ $\mathbf{Y}_j = (Y_j(n); \ell \le n \le r)$ $(1 \le j \le d)$ の組 $\mathbf{Y} = (Y(n); \ell \le n \le r)$:

$$Y(n) \equiv {}^t(Y_1(n), Y_2(n), \cdots, Y_d(n))$$

のことを言う.

一般的な記法を導入する. W の中の二つの L 次元の縦ベクトル $x = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_L), y = {}^t(y_1, y_2, \cdots, y_L)$ に対して, x と y の内積行列を

$$(x, {}^t y) \equiv ((x_j, y_k))_{1 \le j,k \le L}$$

として定義する. これは $L \times L$ 型の行列である.

$(W, (\star, *))$ を $\mathbb{R}$ 上の計量ベクトル空間とする. W 内の d 次元の流れ $\mathbf{X} = (X(n); -N \le n \le N)$ が $(1, N)$-定常性をもつとは行列関数 $R : \{-N, -N+1, \cdots, N-1, N\} \to M(d; \mathbb{R})$

が存在して

$$\begin{aligned}
(X(m),\ {}^tX(n)) &= R(m-n) && (0\leq \forall m,n\ \leq N)\\
(X(-m),\ {}^tX(-n)) &= R(-m+n) && (0\leq \forall m,n\ \leq N)\\
(X(m),\ {}^tX(-1)) &= R(m+1) && (0\leq \forall m\ \leq N-1)\\
(X(1),\ {}^tX(-n)) &= R(1+n) && (0\leq \forall n\ \leq N-1)
\end{aligned}$$

が成り立つときを言い, 流れ $\mathbf{X}$ を d 次元の $(1,N)$-定常流と言う. この行列関数 R を $(1,N)$-定常流 $\mathbf{X}$ の共分散行列関数と名づける.

p を $1\leq p\leq N$ を満たす任意の自然数とする. $(1,N)$-定常流の定義の関係式が成り立つ範囲を拡げて, $(p,N+p)$-定常流の定義を与える.

W 内の d 次元の流れ $\mathbf{X}=(X(n);-N\leq n\leq N)$ が $(p,N+p)$- 定常性をもつとは, 行列関数 $R:\{-N-p,-N-p+1,\cdots,N+p-1,N+p\}\rightarrow \mathbb{M}(d;R)$ が存在して

$$\begin{aligned}
(X(m),\ {}^tX(n)) &= R(m-n) && (0\leq \forall m,n\ \leq N)\\
(X(-m),\ {}^tX(-n)) &= R(-m+n) && (0\leq \forall m,n\ \leq N)\\
(X(m),\ {}^tX(-n)) &= R(m+n) && (0\leq \forall m\ \leq N, 1\leq \forall n\leq p)\\
(X(m),\ {}^tX(-n)) &= R(m+n) && (1\leq \forall m\leq p, 0\leq \forall n\ \leq N)
\end{aligned}$$

が成り立つときを言い, 流れ $\mathbf{X}$ を d 次元の $(p,N+p)$-定常流と言う. この行列関数 R を $(p,N+p)$-定常流 $\mathbf{X}$ の共分散行列関数と名づける. 特に p が N のとき, 即ち, $(N,2N)$-定常流のことを単に定常流と呼ぶことにする.

$\mathbf{X}=(X(n);|n|\leq N)$: 計量ベクトル空間 W 内の d 次元の $(1,N)$-定常流とする.

$$T_n^{\pm}=\begin{pmatrix} R(0) & R(\pm 1) & \dots & R(\pm(n-1))\\ R(\mp 1) & R(0) & \dots & R(\pm(n-2))\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ R(\mp(n-1)) & R(\mp(n-2)) & \dots & R(0)\end{pmatrix}$$

で定義し, テープリッツ行列と言う.

次のことを注意する:

$$T_1^{+}=T_1^{-}=R(0).$$

今後，次のテープリッツ条件を満たすものとする．

$$T_n^{\pm} \in GL(nd;\mathbb{R}) \quad (1 \le \forall n \le N+1).$$

$\mathbf{X} = (X(n); |n| \le N)$: 計量ベクトル空間 W 内の d 次元の $(1,N)$-定常流でテープリッツ条件を満たすものとする．

ベクトルの二つの集まり $\{X_j(\ell); 1 \le j \le d, 0 \le \ell \le N-1\}, \{X_j(\ell); 1 \le j \le d, -N+1 \le \ell \le 0\}$ がそれぞれ一次独立であることを示すので，$X(n)$ の j 成分である $X_j(n)$ の部分空間 $\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})$ への射影 $P_{\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})} X_j(n)$ を直接書き下すと

$$P_{\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})} X_j(n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{d} \gamma_{+j\ell}(n,k) X_\ell(k) \qquad (1 \le j \le d)$$

を満たす実数の組 $\{\gamma_{+j\ell}(n,k); 1 \le n \le N, 0 \le k \le n-1, 1 \le \ell \le d\}$ が一意的に存在する．$d \times d$ 型の行列 $\gamma_+(n,k)$ を

$$\gamma_+(n,k) \equiv \begin{pmatrix} \gamma_{+11}(n,k) & \gamma_{+12}(n,k) & \dots & \gamma_{+1d}(n,k) \\ \gamma_{+21}(n,k) & \gamma_{+22}(n,k) & \dots & \gamma_{+2d}(n,k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{+d1}(n,k) & \gamma_{+d2}(n,k) & \dots & \gamma_{+dd}(n,k) \end{pmatrix}$$

で定義すると，上は次のようにベクトル表現される：

$$P_{\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})} X(n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n,k) X(k).$$

したがって

$$X(n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n,k) X(k) + \nu_+(n) \quad (1 \le n \le N)$$

と表現される．

同様に行列の組 $\{\gamma_-(n,k); 1 \le n \le N, 0 \le k \le n-1\}$ を用いて次のような後ろ向きの方程式を得る：

$$X(-n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_-(n,k) X(-k) + \nu_-(-n) \quad (1 \le n \le N).$$

さらに，行列 $\gamma_\pm(n,0)$ を特別に

$$\delta_\pm(n) \equiv \gamma_\pm(n,0)$$

と置く.

$\mathbf{X} = (X(n); |n| \le N)$: 計量ベクトル空間 W 内の d 次元の $(1, N)$-定常流でテープリッツ条件を満たすものとする.

ベクトルの二つの集まり $\{X_j(\ell); 1 \le j \le d, 0 \le \ell \le N-1\}, \{X_j(\ell); 1 \le j \le d, -N+1 \le \ell \le 0\}$ がそれぞれ一次独立であることを示すので, $X(n)$ の j 成分である $X_j(n)$ の部分空間 $\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})$ への射影 $P_{\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})} X_j(n)$ を直接書き下すと

$$P_{\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})} X_j(n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{d} \gamma_{+j\ell}(n,k) X_\ell(k) \qquad (1 \le j \le d)$$

を満たす実数の組 $\{\gamma_{+j\ell}(n,k); 1 \le n \le N, 0 \le k \le n-1, 1 \le \ell \le d\}$ が一意的に存在する. $d \times d$ 型の行列 $\gamma_+(n,k)$ を

$$\gamma_+(n,k) \equiv \begin{pmatrix} \gamma_{+11}(n,k) & \gamma_{+12}(n,k) & \dots & \gamma_{+1d}(n,k) \\ \gamma_{+21}(n,k) & \gamma_{+22}(n,k) & \dots & \gamma_{+2d}(n,k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{+d1}(n,k) & \gamma_{+d2}(n,k) & \dots & \gamma_{+dd}(n,k) \end{pmatrix}$$

で定義すると, 上は次のようにベクトル表現される:

$$P_{\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})} X(n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n,k) X(k).$$

したがって

$$X(n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n,k) X(k) + \nu_+(n) \quad (1 \le n \le N)$$

と表現される.

同様に行列の組 $\{\gamma_-(n,k); 1 \le n \le N, 0 \le k \le n-1\}$ を用いて次のような後ろ向きの方程式を得る:

$$X(-n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_-(n,k) X(-k) + \nu_-(-n) \quad (1 \le n \le N).$$

さらに, 行列 $\gamma_\pm(n,0)$ を特別に

$$\delta_\pm(n) \equiv \gamma_\pm(n,0)$$

と置く.

§2 $\mathbf{KM_2O}$-ランジュヴァン方程式論—構成定理

今までの設定とは逆に，任意に固定した自然数 d と N に対して，$d \times d$ の実行列からなる組 $\{V,\ \delta_+(n); 0 \leq n \leq N\}$ が始めに与えられているとする．但し，V は正定値の対称行列とする．

（第一段）　まず，組 $(V_+(0), V_-(0))$ を

$$V_+(0) = V_-(0) = V$$

で定める．揺動散逸定理を考慮して，三つ組 $(V_+(1), \delta_-(1), V_-(1))$ を

$$\begin{cases} V_+(1) = V_+(0) - \delta_+(1)V_-(0)\ {}^t\delta_+(1) \\ \delta_-(1) = V_-(0)\ {}^t\delta_+(1)V_+(0)^{-1} \\ V_-(1) = V_-(0) - \delta_-(1)V_+(0)\ {}^t\delta_-(1) \end{cases}$$

によって定める．同じく揺動散逸定理を考慮して，数学的帰納法によって，三つ組 $(V_+(n-1), \delta_-(n-1), V_-(n-1))$ から三つ組 $(V_+(n), \delta_-(n), V_-(n))$ を

$$\begin{cases} V_+(n) = V_+(n-1) - \delta_+(n)V_-(n-1)\ {}^t\delta_+(n) \\ \delta_-(n)V_+(n-1) = V_-(n-1)\ {}^t\delta_+(n) \\ V_-(n) = V_-(n-1) - \delta_-(n)V_+(n-1)\ {}^t\delta_-(n) \end{cases}$$

によって，$n = 2$ から $n = N$ まで構成する．その際，次のことを仮定する必要がある：

$$V_+(n) \text{ は正定値である} \quad (1 \leq n \leq N).$$

（第二段）　つぎに，$d \times d$ の実行列からなる組 $\{\gamma_+(n,k), \gamma_-(n,k); 0 \leq k < n \leq N\}$ を，散逸散逸定理を考慮して，次のアルゴリズムで構成する：

$$\begin{cases} \gamma_+(n,k) &= \gamma_+(n-1,k-1) + \delta_+(n)\gamma_-(n-1,n-k-1) \\ \gamma_-(n,k) &= \gamma_-(n-1,k-1) + \delta_-(n)\gamma_+(n-1,n-k-1). \end{cases}$$

そこで行列 $\gamma_\pm(n,0)$ を

$$\gamma_\pm(n,0) \equiv \delta_\pm(n)$$

と置いた．

（第三段）　任意の計量ベクトル空間 $(W,(\star,*))$ とその中の $d(N+1)$ 次元線形部分空間 W_+ を考え，W_+ の中の正規直交ベクトル系を $\{w_j^+;1\le j\le d(N+1)\}$ とする：

$$\begin{cases} w_j^+\in W_+ & (1\le j\le d(N+1)) \\ (w_j^+,w_k^+)=\delta_{j,k}. \end{cases}$$

このとき，計量ベクトル空間 W 内の d 次元のホワイトノイズ流 $\xi_+=(\xi_+(n);0\le n\le N)$ を

$$\xi_+(n)\equiv {}^t(w_{nd+1}^+,w_{nd+2}^+,\cdots,w_{nd+d}^+)$$

で定める．d 次元の流れ $\xi_+=(\xi_+(n);0\le n\le N)$ の性質は

$$(\xi_+(m),\ {}^t\xi_+(n))=\delta_{m,n}I \qquad (0\le m,n\le N)$$

のみである．

そのとき，W 内の d 次元の流れ $\nu_+=(\nu_+(n);0\le n\le N)$ を

$$\nu_+(n)\equiv V_+(n)\xi_+(n)$$

で定める．

$$(\nu_+(m),\ {}^t\nu_+(n))=\delta_{m,n}V_+(n)$$

が成り立つ．

（第四段）　W 内の d 次元の流れ $\mathbf{X}_+=(X(n);0\le n\le N)$ を，前向き $\mathbf{KM_2O}$-ランジュヴァン方程式を考慮して，次のアルゴリズムに従って定義する：

$$X(0)=\nu_+(0)$$
$$X(n)=-\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_+(n,k)X(k)+\nu_+(n)\quad (1\le n\le N).$$

構成定理．　$\mathbf{X}_+$ は次の定常性を満たす：

$$(X(m),\ {}^tX(n))=R(m-n)$$

（第五段）　計量ベクトル空間 $(W,(\star,*))$ の $d(N+1)$ 次元線形部分空間 W_- を考え，W_- の中の正規直交ベクトル系を $\{w^-_{-j}; 1 \leq j \leq d(N+1)\}$ とする：

$$\begin{cases} w^-_{-j} \in W_- & (1 \leq j \leq d(N+1)) \\ (w^-_{-j}, w^-_{-k}) = \delta_{j,k}. \end{cases}$$

ただし,（第三段）での $d(N+1)$ 次元線形部分空間 W_+の中の正規直交ベクトル系 $\{w^+_j; 1 \leq j \leq d(N+1)\}$ とは

$$(\star) \qquad (w^+_1, w^+_2, \cdots, w^+_d) = (w^-_{-1}, w^-_{-2}, \cdots, w^-_{-d})$$

なる関係をもつとする．

計量ベクトル空間 W 内の d 次元の規格化されたホワイトノイズ流 $\xi_- = (\xi_-(-n); -N \leq -n \leq 0)$ を次で定める：

$$\xi_-(-n) \equiv {}^t(w_{-nd-1}, w_{-nd-2}, \cdots, w_{-nd-d}).$$

関係式 $(\star)$ は

$$\xi_+(0) = \xi_-(0)$$

とベクトル表示される．d 次元の流れ ξ_- を特徴づける性質は次の正規直交性である：

$$(\xi_-(-m), {}^t\xi_-(-n)) = \delta_{m,n} I \qquad (0 \leq m, n \leq N).$$

W 内の d 次元の流れ $\nu_- = (\nu_-(-n); -N \leq -n \leq 0)$ を

$$\nu_-(-n) \equiv V_-(n)\xi_-(-n)$$

で定める．

$$\nu_+(0) = \nu_-(0)$$

$$(\nu_-(-m), {}^t\nu_-(-n)) = \delta_{m,n} V_-(n) \quad (0 \leq m, n \leq N)$$

が成り立つ．

（第六段）　W 内の d 次元の流れ $\mathbf{X}_- = (X_-(-n); -N \leq -n \leq 0)$ を，後ろ向き $\mathbf{KM_2O}$-ランジュヴァン方程式を考慮して，次のアルゴリズムに従って構成する：

$$X_-(0) = \nu_-(0)$$

$$X_-(-n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_-(n,k) X_-(-k) + \nu_-(-n) \quad (1 \leq n \leq N).$$

構成定理． $\mathbf{X}_-$ は次の定常性を満たす:その共分散関数は流れ $\mathbf{X}_+$ のそれと

$$(X_-(-m),\ {}^tX_-(-n)) = (X(n),\ {}^tX(m))$$

なる関係を満たす．

新しい予測公式—理論． 計量ベクトル空間 $(W,(\star,*))$ の中の d 次元ベクトル $\nu_-(-1)$ で

$$(\nu_+(n),\ {}^t\nu_-(-1)) = I(n,1)(\equiv -\delta_+(n+1)V_-(n)\ (1 \leq n \leq N-1)$$

を満たすものが存在する．

KM$_2$O-ランジュヴァン方程式論の新しい予測公式—データ解析． $R(M+1)$ を

$$(\star\star) \qquad R(M+1) \equiv (X(M),\ {}^tX(-1)) \quad (\text{空間平均})$$

で定める．これによって信頼できる見本共分散関数 $R(\star)$ の数が一つ増えた．あとは前の予測公式において M を $M+1$ に置き換えて新しい予測公式が得られる．

§3 KM$_2$O-ランジュヴァン方程式論—予測理論

$\mathbf{X} = (X(n); |n| \leq N)$: 計量ベクトル空間 W 内の d 次元の $(1,N)$-定常流でテープリッツ条件を満たすものとする．

予測公式とは，時刻 ℓ から時刻 r $(-N \leq \ell \leq r < N)$ 迄の情報 $\mathbf{M}_\ell^r(\mathbf{X})$ を用いて，p 時刻先の未来 $X(r+p)$ $(0 < p \leq N-r)$ の動きを捕まえる公式のことである．

数学としては，ベクトル $X(r+p)$ を線形部分空間 $\mathbf{M}_\ell^r(\mathbf{X})$ に射影したベクトル

$$P_{\mathbf{M}_\ell^r(\mathbf{X})}X(r+p)$$

を具体的に求めることになる．

予測する際に，$\mathbf{M}_\ell^r(\mathbf{X})$ と直交する情報は切り捨てる考えである．

$P_{\mathbf{M}_\ell^r(\mathbf{X})}X(r+p)$ を前向きの（局所的）線形予測子と名づける．

1 期先予測公式.　$\mathbf{X}$ を $(1,N)$-定常流とする．各 $\ell, r\ (-1 \le \ell \le r < N)$ に対して

$$P_{\mathbf{M}_\ell^r(\mathbf{X})}X(r+1) = -\sum_{k=\ell}^{r} \gamma_+(r-\ell+1, k-\ell)X(k).$$

§4 KM$_2$O-ランジュヴァン方程式論—データ解析

自然数 d, N を固定し，$\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}(n); 0 \le n \le N)$ を d 次元時系列とする．各 $\mathcal{Z}(n)$ は $\mathbb{R}^d$ の元で表現された d 次元データである．

$\mu^{\mathcal{Z}}$ －－－時系列 $\mathcal{Z}$ の見本平均ベクトル

$$\mu^{\mathcal{Z}} \equiv \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} \mathcal{Z}(n)$$

$R^{\mathcal{Z}} = (R_{jk}^{\mathcal{Z}}(*))_{1\le j,k\le d}$ －－－時系列 $\mathcal{Z}$ の見本共分散行列関数

$$R_{jk}^{\mathcal{Z}}(n) \equiv \frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N-n} (\mathcal{Z}_j(n+m) - \mu^{\mathcal{Z}})(\mathcal{Z}_k(m) - \mu^{\mathcal{Z}}).$$

$\widetilde{\mathcal{Z}} = (\widetilde{\mathcal{Z}}(n); 0 \le n \le N))$—$\mathcal{Z}$ の規格化:

$$\widetilde{\mathcal{Z}}_j(n) \equiv (R_{jj}^{\mathcal{Z}}(0)^{-1}(\mathcal{Z}_j(n+m) - \mu^{\mathcal{Z}}).$$

$R^{\widetilde{\mathcal{Z}}} = (R_{jk}^{\widetilde{\mathcal{Z}}}(*))_{1\le ,k\le d}$—その見本共分散行列関数

時系列解析での経験則より，見本共分散行列関数 $R^{\widetilde{\mathcal{Z}}}(n)$ の信頼できる n の最大数 M は次で与えられる：

$$M \equiv [3\sqrt{N+1}/d] - 1.$$

$\mathcal{LD}(\widetilde{\mathcal{Z}})$ を時系列 $\widetilde{\mathcal{Z}}$ に付随する見本 KM$_2$O-ランジュヴァンデータとする：

$$\mathcal{LD}(\widetilde{\mathcal{Z}}) = \{\gamma_\pm(\widetilde{\mathcal{Z}})(n,k), \delta_\pm(\widetilde{\mathcal{Z}})(n), V_\pm(\widetilde{\mathcal{Z}})(\ell); 1 \le n \le M, 0 \le k \le n-1, 0 \le \ell \le M\}.$$

d 次元時系列 $\widetilde{\mathcal{Z}} = (\widetilde{\mathcal{Z}}(n); 0 \le n \le N))$ は弱定常性の検定 Test(S) を通過したとする．

時系列 $\widetilde{\mathcal{Z}}_{N-M} = (\widetilde{\mathcal{Z}}(N-M+n); 0 \le n \le M)$ はある d 次元弱定常過程 $\mathbf{X}_{N-M} = (X_{N-M}(n); 0 \le n \le M)$ の実現値であり，系 $\mathcal{LD}(\widetilde{\mathcal{Z}})$ は $\mathbf{X}_{N-M}$ に付随する KM$_2$O-ランジュヴァンデータの候補である．

1期先予測公式　時系列 $\tilde{\mathcal{Z}}$ の時刻 N の1期先線形予測値 $\hat{\tilde{\mathcal{Z}}}_1(N+1)$ を求める予測公式を与える．その際の態度は，確率過程 $\mathbf{X}_{N-M}$ が1期先まで弱定常性を保って時間発展すると仮定し，時系列 $\tilde{\mathcal{Z}}$ の時刻 $N+1$ の1期先線形予測値を

$$\hat{\tilde{\mathcal{Z}}}_1(N+1) \equiv P_{\mathbf{M}_1^M(\mathbf{X}_{N-M})}X_{N-M}(M+1) \text{ の実現値}$$

として採用することである．1期先の予測公式において $r=M, \ell=1$ とし，それは次で与えられる:

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{\mathcal{Z}}}_1(N+1) &= -\sum_{k=1}^{M}\gamma_+(\tilde{\mathcal{Z}})(M,k-1)\tilde{\mathcal{Z}}(N-M+k)\\ &= -\sum_{k=0}^{M-1}\gamma_+(\tilde{\mathcal{Z}})(M,k)\tilde{\mathcal{Z}}(N-M+k+1).\end{aligned}$$

文献

[1]. Okabe, Y., *On a stochastic difference equation for the multi-dimensional weakly stationary process with discrete time*, Prospect of Algebraic Analysis(ed. by M. Kashiwara and T. Kawai), Academic press, Tokyo, 1988, pp. 601–645.

[2]. Okabe, Y. and Y. Nakano, *The theory of KM_2O-Langevin equations and its applications to data analysis (I):Stationay analysis*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 45-90.

[3]. Okabe, Y., Langevin 方程式と因果解析，数学 **43** (1991), 322–346.

[4]. ———, 自然科学と定常過程，数理科学 **340** (1991), 21–28.

[5]. ———, *Applications of the theory of KM_2O-Langevin equations to the linear prediction problem for the multi-dimensional weakly stationary time series*, J. Math. Soc. Japan **45** (1993), 277-294.

[6]. ———, *A new algorithm derived from the view-point of the fluctuation-dissipation principle in the theory of KM_2O-Langevin equations*, Hokkaido Math. J. **22** (1993), 199-209.

[7]. Okabe, Y. and A. Inoue, *The theory of KM_2O-Langevin equations and its applications to data analysis (II):Causal analysis*, Nagoya Math.J. **134** (1994), 1-28.

[8]. Okabe, Y. and T. Ootsuka, Applications of the theory of KM_2O-Langevin equations to the non-linear prediction problem for the one-dimensional strictly stationary time series, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[9]. ———, The theory of KM_2O-Langevin equations and its applications to data analysis (III): Prediction analysis, in preparation.

[10]. Okabe, Y. and A. Kaneko, The theory of KM_2O-Langevin equations and its applications to data analysis (IV): Prediction analysis, in preparation.