

# Collective Behavior in Globally Coupled Chaotic System with Distributed Nonlinearity

柴田達夫

東京大学総合文化研究科

## 1 導入

多くの動的要素が相互作用することではじめて成り立つ現象は多い。すなわち、多くの要素が相互作用をして集団を形成し、巨視的な現象が成り立っている系である。例えば、物理系ではジョセフソン素子回路、多モードレーザー振動、流体系における渦の動力学等々、化学系では化学反応系、分子クラスター等の分子多体系等々、生物系では代謝反応の巨大な回路、ニューラル・ダイナミクス、多細胞系等のネットワーク系が挙げられる。

非線形科学ではこれらの系を具体的なレベルから、あるいは抽象的なレベルから様々な角度で調べて来た。そこでは、局所的な動力学を部分系として、それらの多体相互作用系として対象を捉えた。特に、部分系が空間中で近接する他の部分系と相互作用をしている反応拡散系等の局所結合系や、直接の相互作用が長距離に及ぶ場合や、何かの保存量を通じて結合している大域結合系が詳しく調べられて来た。非線形科学における大域結合系の研究はこれまで特に、カオス要素や非線形振動子の局所結合系を中心に膨大な蓄積がある。

ところで、これまでの研究では性質が一様である多くの要素が相互作用をする系に関するものだった。しかし、上に挙げた多くの例においては、要素の性質が一様である系は稀である。例えば、ニューラル・ダイナミクスでは系を構成するニューロンの性質は様々である。また、流体系における渦の動力学も、渦の性質はそれぞれ一様ではない。

本報告ではそれらを抽象的なレベルで考察する為に、カオス要素が大域的に結合する、大域結合カオス系: Globally Coupled Map (GCM) を調べる。その際、要素の性質の不均質性を個々の要素のダイナミクスを決めるパラメータが分布していて、要素毎に違っているということによって表す事にする。そのうち本報告は特に要素の振動がカオティックで要素間に明らかな相関が無い乱流相で見られる集団運動 (Collective Behavior) を扱う [1,2].

<sup>1</sup> E-Mail: shibata@complex.c.u-tokyo.ac.jp

## 2 モデル

大域的な結合をしているカオス素子集団として以下のモデルを採用する。

$$x_{n+1}(i) = (1 - \epsilon)f_i(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f_j(x_n(j)), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (1)$$

ただし、 $x_n(i)$  は  $i$  番目の要素の状態を表す変数、 $f_i(x(i))$  はそれぞれの要素の内部動力学を表す。ここでは  $f_i(x(i))$  として Logistic Map:

$$f_i(x) = 1 - a(i)x^2,$$

を採用する。 $a(i)$  は  $i$  番目の要素の非線形パラメータを表し、区間  $[a_0 - \frac{\Delta a}{2}, a_0 + \frac{\Delta a}{2}]$  を一様に分布している (実際には  $a(i) = a_0 + \frac{\Delta a(2i-N-1)}{2(N-1)}$ )。また、平均場  $h_n$  を以下のように定義する。

$$h_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x_n(i)).$$

平均場はシステムのひとつの観測量として重要な役割を果たす。

## 3 隠れたコヒーレンス

GCM(式 (1)) において要素毎の性質が一様 ( $\Delta a = 0$ ) である時、その乱流相では要素の振動の間に一見して分かる相関はない。従ってシステムの有効な自由度はシステムサイズ  $N$  と同程度であると考えられる。

ではシステムは独立なカオス振動子の集団と同等であろうか。もしも独立な要素の集団であれば、平均場の値  $h$  に対して大数の法則が成立ち、また  $h$  の分布が中心極限定理に従う。このことは、平均場  $h$  の分散 (Mean Square Deviation(MSD))  $\langle (\delta h)^2 \rangle = \langle (h - \langle h \rangle)^2 \rangle$ , がシステムサイズ  $N$  に反比例し、 $h$  の分布がガウス分布に従うか否かで確かめる事が出来る。

しかし、数値計算の結果によれば、MSD はシステムサイズ  $N$  の増大と共に  $1/N$  に比例して減少して行くが、あるシステムサイズを境にある定常値に漸近して行く。

このように一様なカオス振動子の集団系では大数の法則が破れ、要素間はある隠れた相関を持っている事が分かっている (隠れたコヒーレンス)[3]。

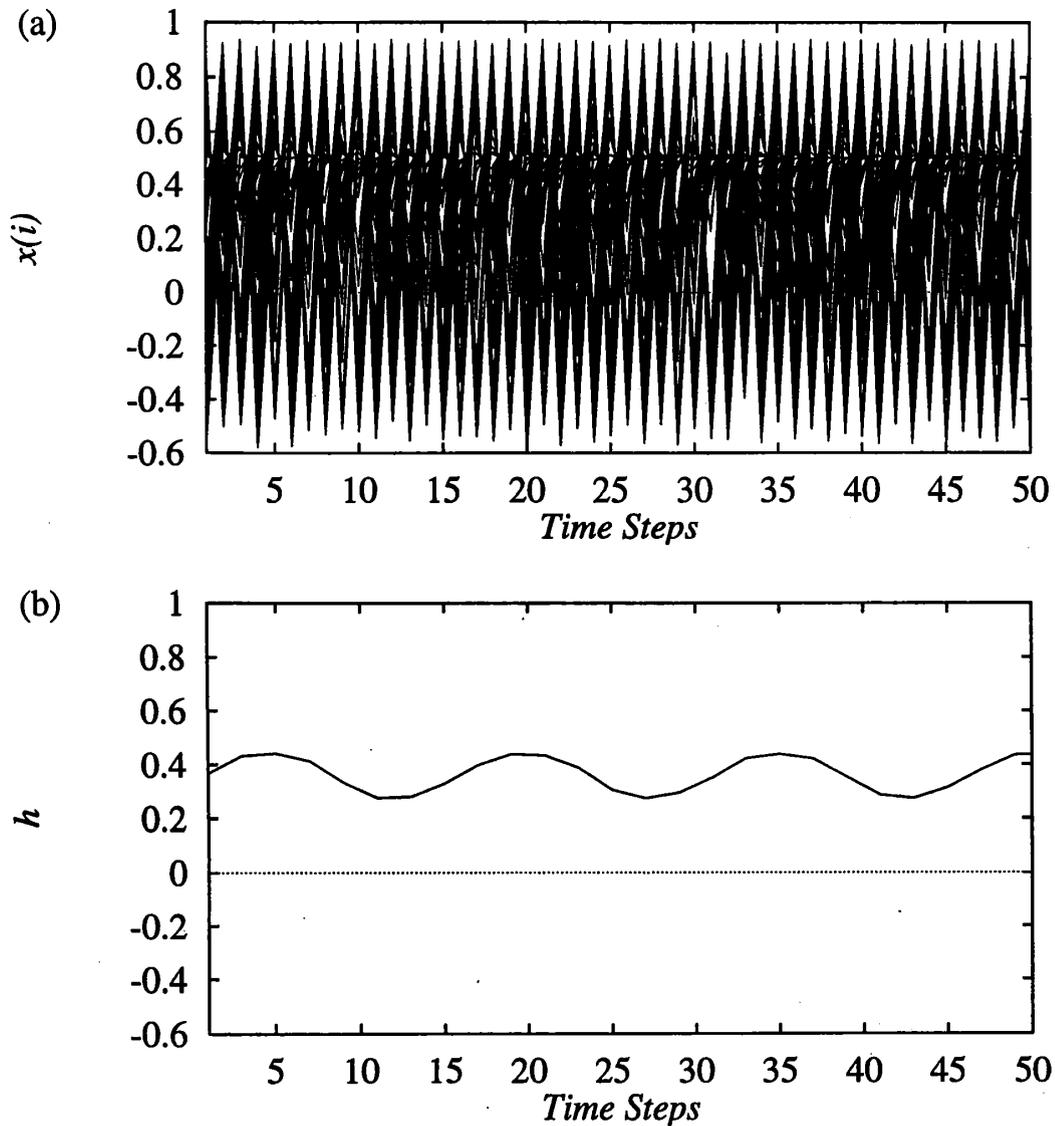


Fig. 1. 各要素および平均場の軌跡 (a) 各要素の軌跡を重ね書きしたもの.  $N = 2^{16}$  から非線形性の分布が一様になるように64個の要素の軌跡を取り出した. (b) その時の平均場の時間発展. 各2ステップおきに描いた.  $a_0 = 1.9, \Delta a = 0.05, \epsilon = 0.11, N = 2^{16}$

#### 4 集団的なトーラス運動

図1(a)はモデル(1)で $\Delta a \neq 0$ の場合における各要素の軌跡を重ね書きしたものである(パラメータは $a_0 = 1.9, \Delta a = 0.05, \epsilon = 0.11$ )。一つ一つの要素の軌跡はカオティックであり要素の間に一見して分かる相関は無い。これは、系の状態が十分に発達した高自由度カオスの状態(乱流相)で系の実効的な自由度はシステムサイズ $N$ と同程度である事を意味している。

一方、図1(b)は平均場 $h$ の時間発展を描いたものである。この図からは平均場は個々の要素からは想像できない低自由度性の周期運動をしているように見える。

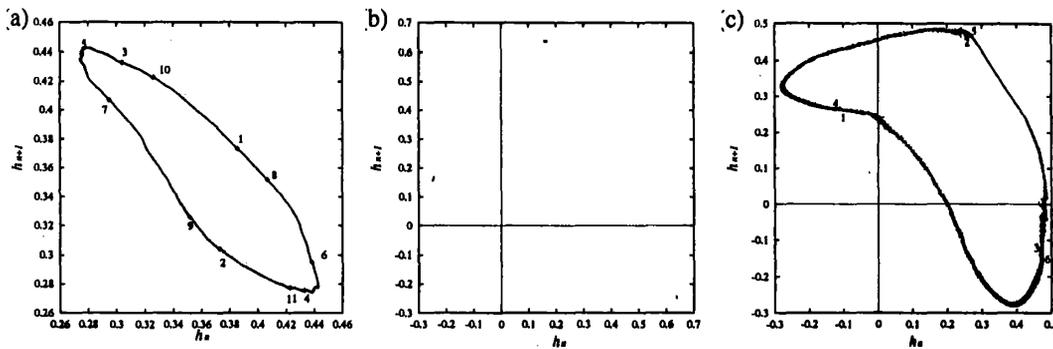


Fig. 2. A return map of mean field  $h$ .  $a_0 = 1.9$  (a)  $\Delta a = 0.05, \epsilon = 0.11, N = 8 \times 10^6$  (b)  $\Delta a = 0.1, \epsilon = 0.055, N = 2^{16}$  (c)  $\Delta a = 0.1, \epsilon = 0.053, N = 2^{18}$

この平均場を系の観測量と考えよう。普通、実験などで得られた1次元の観測量から系の性質を知る方法としては“埋め込み (Embedding)”の方法が用いられる。“埋め込み (Embedding)”の方法が有効であるならば、平均場  $h$  は系の有効な自由度を示すはずである。

図2(a)は平均場の動力学を  $h_n$  から  $h_{n+1}$  への写像として表したリターンマップ(2次元空間への埋め込み)である。平均場の動力学は2次元相空間に埋め込まれ、系の有効自由度 ( $N$ ) を示さない。また、パワースペクトルも、平均場の時間発展が2次元トーラス上の準周期運動である事を支持している。

更に、トーラス面の1次元性を確かめるために相関次元による解析を行なう。図は相関関数の積分をスケールの関数としてプロットした。図から、あるスケールの範囲で系の埋め込み次元が1次元であることがわかる。しかし、スケールが小さくなるにつれて相関関数の傾きが大きくなり高次元性をしめしている。また、システムサイズを大きくしていくと1次元を示す範囲がスケールの小さい方へ伸びて行く。以上から、1) システムサイズの増大とともに平均場の動力学は2次元トーラスに収束して行くが、2) 依然システムサイズは有限であるので、あるスケールよりも小さい範囲ではトーラス面の周りの高次元性揺らぎが残っていることが分かる。

ところでシステムが準周期運動を示す場合、リャプノフ解析を行なうと指数に中立安定を表す0が含まれる。では我々の系においても同様な事が成り立つであろうか。通常の方法により数値計算を行なったが結果は否定的で全てが正であった。一方で平均場の時系列を実験のデータと同様に考えてリャプノフ指数を推定した場合、それは0を示すであろう。

この、“完全なリャプノフ解析”と“現象論的なリャプノフ指数”の間の相違は何に起因するのであろうか。完全なリャプノフ解析は  $\delta x \rightarrow 0$  の極限での振舞を問題にしている。しかし、相関次元による解析からも分かるように平均場はトーラス運動を示すものの、常に揺らぎを伴っている。完全なリャプノフ解析ではこの揺らぎのスケールでの安定性を見ている事になる。従って、指数には0が含まれない。一方で、平均場の動力学はある粗視化の範囲でのトーラス運動であると考えられるので、現象論的なアプローチによればリャプノフ指数は

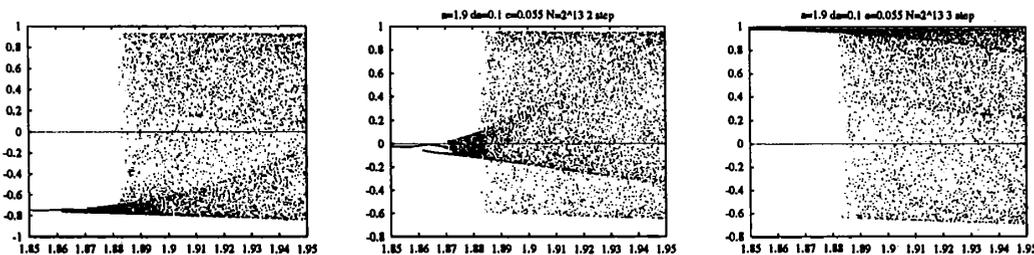


Fig. 3. 平均場が3周期であるときの  $x_n(a)$  の引き続く3ステップのスナップショット. 横軸が非線形性  $a$  で, 縦軸がそれに対応する要素の値  $x(a)$ . 横軸は要素のインデックス  $i$  と考えてよい. 詳しくは本文参照.  $a_0 = 1.9, \delta a = 0.1, \epsilon = 0.055, N = 2^{13}$ .

0 を示す。

## 5 内部分岐構造

ここまでは、現象論的に平均場の動力学が準周期運動を示す事を見てきたが、各要素の非線形性が分布していることの効果については明らかにして来なかった。本節では非線形性の分布の効果が比較的に見え易い場合について共同現象の発生機構を考える。

系 (1) では要素の性質にばらつきがある。従って、各要素の非線形パラメータの非一様性は個々の要素の動力学の違いとなって現われるはずである。時刻  $n$  でのシステムの状態は  $x_n(a)$  のように、各要素のインデックス  $i$  の代りに各要素の非線形パラメータ  $a$  の関数として表すことが出来る。図3はある時刻  $n$  での  $x_n(a)$  を表したものである。横軸は非線形パラメータ  $a$  で縦軸はそれに対応する  $x_n(a)$  である。注意しなければならないのは、図3は普通よく見られる外部のコントロールパラメータに対する系のアトラクターの変化を描いた分岐ダイアグラムによく似ているが、図は  $N$  個の要素からなる系の、ある一時刻  $n$  での系の状態のひとつの表現である、という点である。従って、これを内部分岐構造と呼ぶ。

図3では、接線分岐、周期倍化分岐、クライシスと同様の振舞を見る事が出来る。通常これらの現象は外部パラメータの変化に対して考えられたのに対し、今の場合個々の要素は他の要素と平均場を通じて相互作用をしているので各要素は self-consistent に分岐構造を形成していると考えられる。

図2(b)では平均場が周期3にロックされた状態で、図3はその時の内部分岐構造を引き続く3ステップについて描いたものである。1点で接線分岐が起こり同期運動を形成している。また、クライシスにより非同期運動がそれに共存している。

このことは、以下のように理解する事ができる。個々の要素の動力学は、時刻  $n$  での平均場の値  $h_n$  を“外部入力”と見なせば、

$$F_h(x) = (1 - \epsilon)(1 - ax^2) + \epsilon h \quad (2)$$

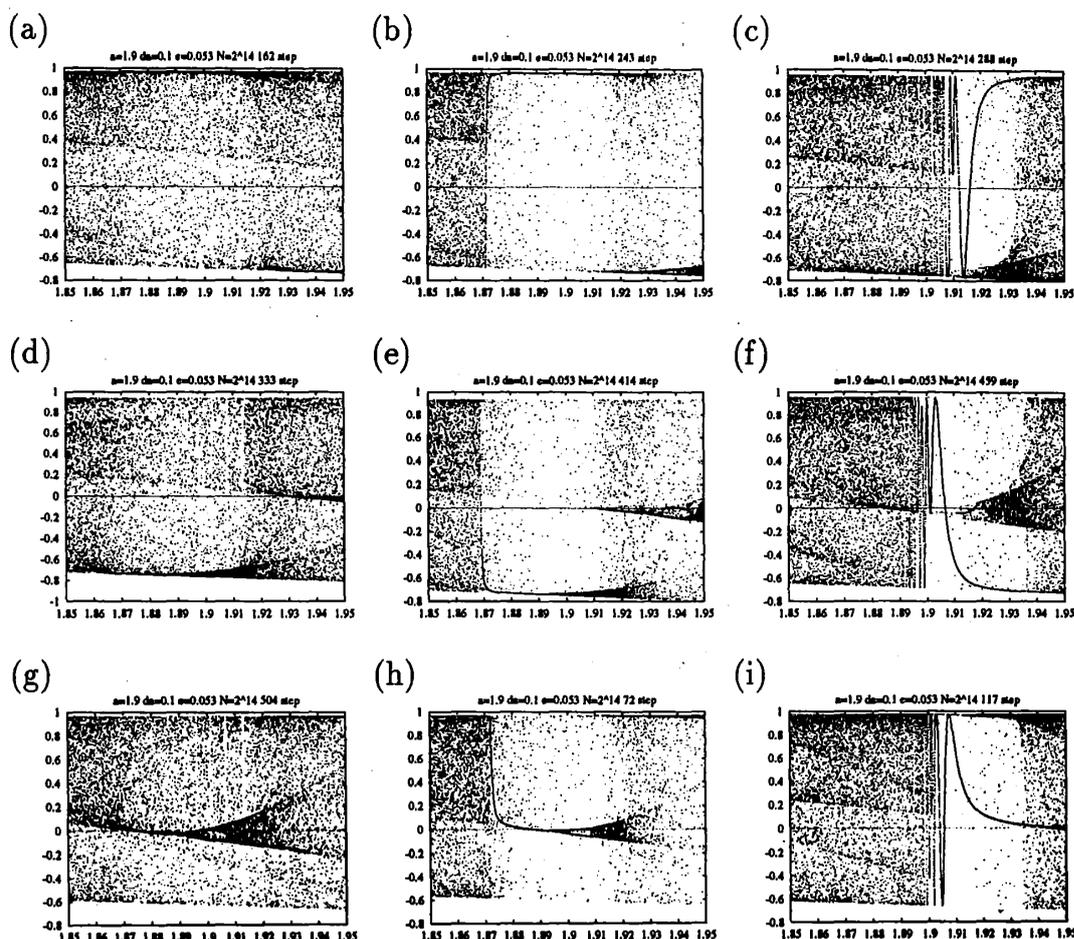


Fig. 4. 平均場が準周期であるときの  $x_n(a)$  の引き続くのスナップショット. 横軸が非線形性  $a$  で, 縦軸がそれに対応する要素の値  $x(a)$ . (a)→(c)→(d)→(f)→(g)→(i)→(a) のように横方向に見れば  $3n$  ステップでの変化. 縦方向で見れば  $3n, 3n+1, 3n+2$  ステップの変化として見る事が出来る. (a)→(b)の間は81ステップ, (b)→(c)は45ステップ, (c)→(d)は45ステップ. 以下同じ. 詳しくは本文参照.  $a_0 = 1.9, \delta a = 0.1, \epsilon = 0.053, N = 2^{13}$ .

に従う。個々の要素に対する周期3の“外部入力”は内部分岐構造に周期3の同期運動と非同期運動の共存状態を作り出す。一方、平均場の値は

$$h = \sum_{i=1}^N f_i(x(i)) \quad (3)$$

で決まるので、内部分岐構造は周期3の平均場の動力学を作り出す事になる。このように各要素の動力学(内部分岐構造)と平均場の間に self-consistent な構造を作り出す事により平均場の周期3の動力学は形成されている。

図2(b)から要素間の結合の強さ  $\epsilon$  を小さくしていくと、ロッキングされた状態は不安定化して系は図2(c)に見られる準周期運動をはじめめる。図4はその場合の内部分岐構造の変化を描いたものである。時間の経過とともに第1の同期運動と第2の同期運動が形成されている。それぞれは安定ではなく、一方の形成、成長と共に他方の同期運動は崩壊して行く。そして、一つの同期運動の崩壊後、

第3の同期運動が生成される。(例えば図4において、(a)→(b)→(c)→(d))

このような、同期運動の生成と崩壊はどのように理解されるであろうか。周期3にロックされた場合と同様に個々の要素の動力学と平均場の間のフィードバック機構の生成によって理解される。ここでは簡単に以下のように触れるに止める。内部構造が形成されていくにつれて平均場の値は変化して行く。平均場の値の変化は式2を通じて個々の要素の分岐構造に変化を及ぼす(例えば接線分岐点の移動等)。この内部分岐構造の変化は同期運動に変化を及ぼし、3を通じて平均場の値が変化していく。この2者のフィードバック機構が形成されて、平均場の準周期性(系のマクロな性質の準周期性)が生まれている。

## 6 議論

前半で触れたリャプノフ解析に関しては、“完全なリャプノフ解析”と“現象論的なリャプノフ指数”の間の橋渡しをする必要がある。これは見方を変えれば微視的動力学と巨視的動力学の関係性を明らかにして行く事に他ならない。統計的に見えて来る巨視的性質を微視的な過程に結びつけて理解しようとするのは、物理学における習慣と言える。

後半では個々の要素の動力学(微視的動力学)と平均場の動力学(巨視的動力学)の間に見られるフィードバックの機構の例を挙げた。その機構を通じて系は動的な役割分化を起こし(同期運動と非同期運動の共存)、巨視的な秩序を作り出している。また、役割分担は時間的に変化して行く。このことは要素の間に非均質性があることが本質的に重要な役割を果たしていると言える。

微視的過程と巨視的過程の関係は、完全に分離して考える事が出来る場合から、分離不可能な相互のフィードバック機構が生成されている場合まで順次存在しているように思われる。このうち統計力学が扱って来たのは分離可能な場合で、ミクロからマクロを導出する様々な方法が開発されて来た。しかし、一つの現象における微視的過程と巨視的過程は、必ずしも後者が前者より導出されるという関係ばかりではない。そのことは、過程が動的である場合より顕著になるかもしれない。“ミクロ”と“マクロ”の間の相互作用のループを明らかにしていくことは今後様々な領域で重要になって来ると思われる。

## References

- [1] 柴田達夫, 修士論文“カオス結合多体系における協同現象” 東京大学総合文化研究科
- [2] T. Shibata, K. Kaneko, “Heterogeneity induced order in Globally Coupled Chaotic Systems” submitted to PRL.
- [3] K. Kaneko, Physica D 55(1992)368-384