研究会報告

過剰敷衍過程モデルと一般化シフト写像

豊田信一（神戸大　自然科学）
郡司ペギオ幸夫（神戸大　理　地球惑星科学）

概要

生物システム等の複雑なシステムの記述に関する観測過程の問題は無限の精度によって表される連続状態を有限精度の離散状態へ写し取ることに起因する。我々はこの観測過程の問題を表現するモデルとして過剰敷衍過程モデル（Hyper - dilation model）を提出し、このモデルによって表現される特徴的な挙動を明らかにした。

１．はじめに

生物システムに端的に見られるような複雑なシステムをモデル化しシミュレートすることが可能であると言うことは、即ち、システムを計算機とみなすことである。もし、対象を写し取る過程の客観性に一切の疑いをはさまないならば、観測によって対象を写し取る者ー観測者ーについて一切語る必要はなく、対象を記号空間に写し取ったものーモデルーによるシミュレーションは観測者と無関係であり実行的である。すなわち、ここにおいて語られる観測ー記述と言う立場は、状態が確定可能であるという仮定に基づき、状態が確定する以前の観測仮定については無視できるという立場である。

しかしながら自己組織化、学習等システムが進行する過程、あるいは、階層的システムなど生物システムに顕著に見られる性質を中心においた理論においてシステムの記述はパラドックスを導き出す［１－３］。システムの運動それ自体が静止状態の並びあげとしてしか記述できない。無限の精度において静止状態が確定できないにも関らず、システムは客観的に写し取られたと考えることは、システムの記述において特定の観測装置により特定の精度が確定され、その精度において近似された状態が確定可能であり、システムの持つ不定さはこの精度からもれた部分にのみ帰せられるものであるとすることである。状態の不定さはここで選ばれた特定の観測装置の不定さに由来するもので、不定さを生成する機構が実在する、と考えられる。

一方、運動する観測対象の記述において、並びあげられる静止状態の確定に至る観測過程に目を向けると、その様な観測過程を実現する特定の観測装置を決定できない。結果、得られる状態は不定さを含み、その不定さは特定の観測装置の精度からもれた部分に起因するものではなく、精度そのものの不定さに起因する。

この発表において、我々は観測過程を考慮に入れた特定のモデルとして無限ビット列の生成過程を有限で近似する過程のモデル、過剰敷衍モデル（HYPER-DILATION-MODEL ）を提出し、その挙動の特徴を、特にリターンマップとして得られるカントール集合の時系列、及び、生成時系列の１／ｆパワースペクトルを中心に、計算過程を表現したモデルとしての一般化シ

フト写像との比較を交えながら論ずる。

２．近似過程としての過剰敷衍過程と過剰敷衍モデル

計算可能なモデルとしてこの問題を構成するには、状態概念を使用しなければならない。なぜなら、記述の前提として状態が確定されなければならないから。したがって、観測過程の問題は次のように構成される。有限回の有限精度の観測から特定の論理に従って記号空間へと写し取られた規則を任意の状態へと敷衍したときに生じる矛盾を解消する形の異なる論理に変換され、矛盾の解消が再び第一の論理に変換され、それによって観測される規則に新たな矛盾を生成していく過程が構成される。この一般的な過程を“過剰敷衍過程”と呼ぶ。ここで、状態概念は、それを確定しようとしながら新たな矛盾を継起しつづける観測過程を伴って、二つの論理間の接続による規則の変更という形で構成される。

我々は過剰敷衍過程の特定のモデルとして過剰敷衍モデル（Hyper-dilation-model,HDM）と名付けた無限長ビット列の生成過程を有限で近似する過程のモデルを提出した［４－６］。ここで簡単な説明をする。二つの論理として有限束、無限束上の論理を考える。その二つの異なる束は、有限ツリー構造と無限ループ構造の規則で表現され［７］、その接続としてモデルは構成される。具体的な計算は次のように行われる時間ｔ、ｔ＋１の観測される状態を以下のｎ桁ビット列。

$$a^t = (a_0^t, a_1^t, a_2^t, \Lambda, a_n^t)$$
$$a^{t+1} = (a_0^{t+1}, a_1^{t+1}, a_2^{t+1}, \Lambda, a_n^{t+1})$$

ここで、a_i^τ はそれぞれ０または１の値を持つ。この状態は、無限の長さから、有限なｎ記号に近似された値とみなされる。個々のビットはそれぞれ独立した規則を持つことを表現するために、a^t から a^{t+1} への関数は、それぞれ何桁目のビットかで区別される。すなわち関数は次の形となる。

$$a_i^{t+1} = f(a_i^t, a_{i-1}^t, a_{i-1}^{t+1}, i)$$

関数は、$i=1$ から与えられた境界条件 (a_0^t, a_0^{t+1}) のもとで、asynchronous に計算される。桁は独立した規則を持つ階層ではない。即ち、桁を指定することで関数は指定できない。したがって、観測による生成規則の推定では、桁を明示的に引数に指定することができない。よって変わりにカウンターである次の関数を考える。

$$g(x,y,z,i) = s$$

この関数は、triplet (x,y,z) が i-記号迄に、ｓ回出現したことを示す。この関数はある特定の桁の値については、それ以下の桁が決まらなければ決定できない。この関数を使って、関数 f を関数 F に置き換える。

$$a_i^{t+1} = F(a_i^t, a_{i-1}^t, a_{i-1}^{t+1}, g(a_i^t, a_{i-1}^t, a_{i-1}^{t+1}, i))$$

一回の観測によって、各 triplet にｓの最大値 $s_{x,y,z}^{\max}$ がきまっている。つまり観測によって確定的に得られる関数は有限ツリー状の構造をなしている。このツリー状の有限束を以下のようにループ構造の無限束に変換する。

各 triplet にランダムに $\lambda(x,y,z) < s_{x,y,z}^{\max}$ を与え、次の関数 h で F の中の g を置き換える。

$$h(x,y,z,i) = (g(x,y,z,i) \bmod \lambda(x,y,z)) + 1$$

Fの中のgをhで置き換えることによって、ツリー状プログラムとして観測された関数Fは、ループ状プログラムとして全体に対し定義された関数となり、任意の状態にたいして適用される。ＨＤＭにおいては、近似操作による関数の決定はツリー→ループへの変換によって以下の手順で構成されている。

① a^tとa^{t+1}の二進数列から、ツリー状プログラムとして$F(x,y,z,g(x,y,z,i))$を決定して、同時に$s^{\max}_{x,y,z}$を決定する。

② $\lambda(x,y,z) < s^{\max}_{x,y,z}$をアトランダムに決定し、ループ状プログラムとして$F(x,y,z,h(x,y,z,i))$を完成させる。

③ $F(x,y,z,h(x,y,z,i))$を適用してa^{t+1}からa^{t+2}を計算する。

この①～③を続けて繰り返すことにより、状態が逐次生成されていく。

３．ＨＤＭのリターンマップにおけるカントール集合

過剰敷衍モデルのビット列を二進小数とみなし実数化しリターンマップを作ると、そこに表れるアトラクターは毎時刻変化し（Fig 1）、多くの場合カントール集合をなしている。リターンマップがカントール集合をなすことは、使用される規則がループ構造であることに起因する。この特定のカントール集合のうちの実際の状態として実現された一点が一致するカントール集合が次の規則として選ばれるが、それは、一定の不定さを伴いどの点が実際の状態として観測されたかに依存して決まる。すなわち、生成規則が観測された状態に依存しており、規則と状態は不可分なものとして構成されている。我々は、特定の自己相似的構造がそのシステム

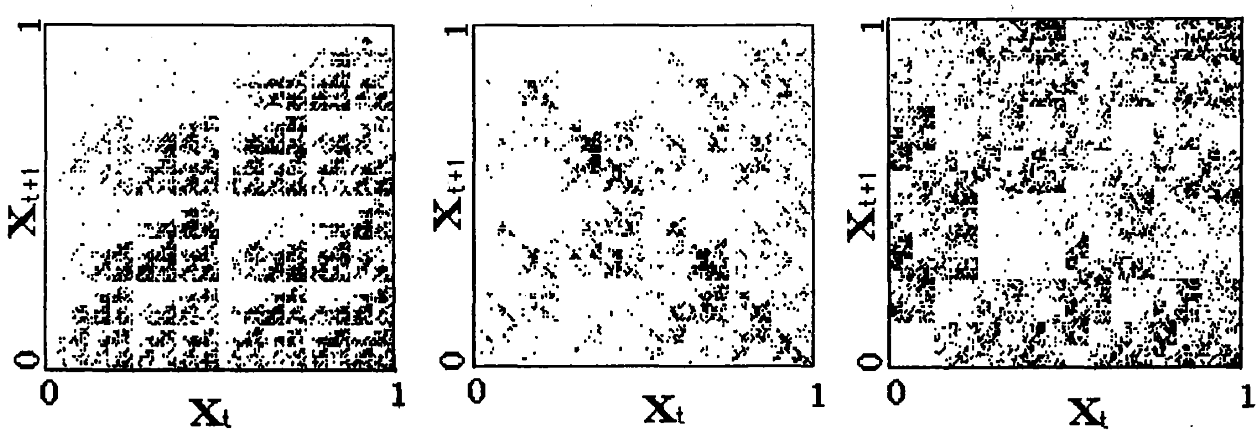


Fig.1 ＨＤＭのある時刻Ｔにおけるビット列生成規則のリターンマップ。ビット列を二進小数とみなして実数化し横軸に時刻ｔにおける状態、縦軸にその状態が規則によって遷移した時刻ｔ＋１の状態をとり対応する位置にプロットした。左からＴ＝１００、Ｔ＝３００、Ｔ＝５００

の属性として実在しているとの考えを退ける。このモデルにおいては、ある特定のカントール集合が個別のシステムに存在しており、それを特定の観測装置で観測することにより特定の精度でシステムが記述できるのではなく、観測の結果、外部観測者の視点が内部状態の記述に投影されるため、自己相似的な構造が見て取れる様相を表現している。

また、リターンマップによりＨＤＭでは生成規則の推定のために観測したビット列の長さに

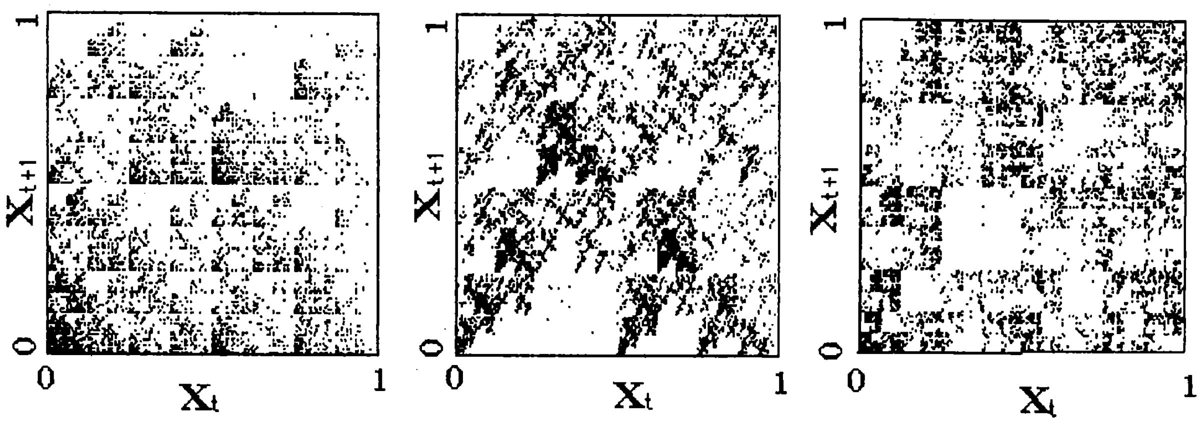


Fig.2　ＨＤＭのある時刻の長さｎの違うビット列に対して、生成規則を推測し、それぞれの規則のリターンマップを示したもの。左からｎ＝１００，ｎ＝８０，ｎ＝６０

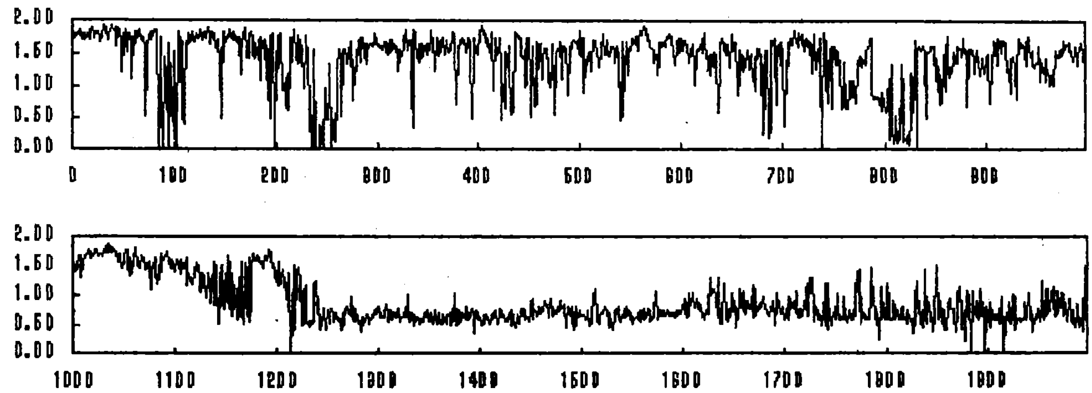


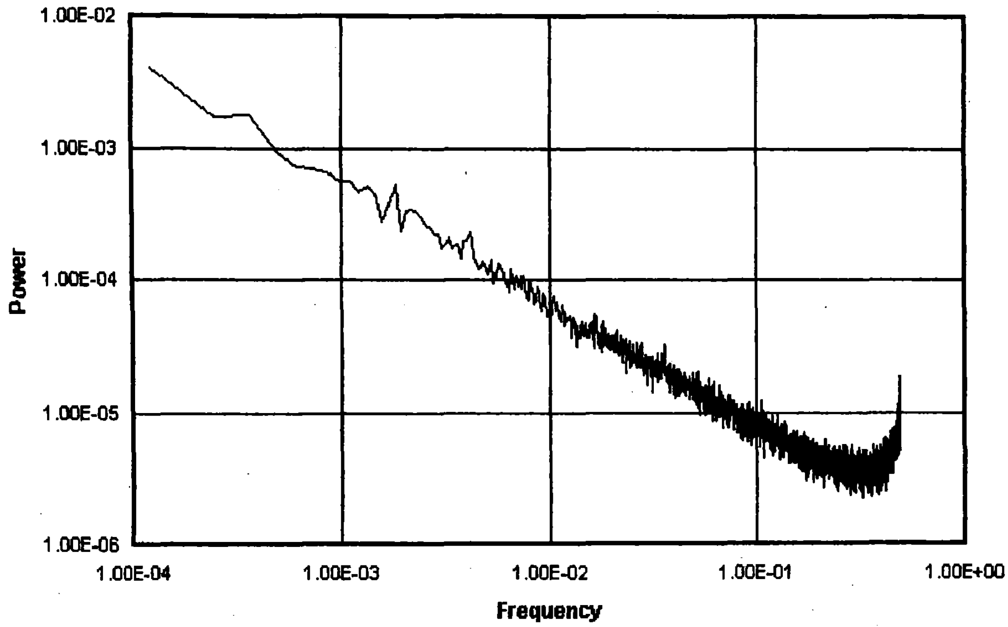
Fig.3　ＨＤＭのリターンマップの位相次元の時系列。横軸に時間、縦軸に次元をとっている。

よって、異なった規則が構成されることが示される（Fig.2）。異なった精度で観測されたシステムは、それぞれの精度に対して異なった規則をもつ。ＨＤＭは、固有の規則を持つ階層の実在を否定しながら、観測による階層性の発現を含意するモデルとして構成されていることが示される。

常に変更される生成規則の変化の様子を量的に見るために、リターンマップのドットカウンティング次元を測り、その時系列を示す（Fig.3）。図に見られるように、比較的巾の小さな変化が常に見られると同時に、０もしくは０に近い値に急減したり逆に０から１以上の値に急増する現象が不規則に生起するのが見られる。位相次元が０であるということはその系が不動点もしくはリミットサイクルの定常状態に落ちていることを示している。つまり、ＨＤＭはシステムが急に定常状態に落ちる可能性をもつにもかかわらず、すぐこの定常状態が解かれてしまう。このシステムは一時的に安定した素子として振る舞うが、すぐに不安定になり、特定の安定した素子とはならない。このような素子を結合すると、その結合により何らかの構造を執りながら、同時にその構造は自発的に解消され、新たな構造に変更されていくことが予想される。

４．パワースペクトル

ＨＤＭにおいては実数化された状態の時系列のパワースペクトルは１／ｆ揺らぎのパターンを示す（**Fig.4**）［５，６］。１／ｆ揺らぎは自然界に普遍的に数多く存在するが、計算可能なモデルにおけるシミュレートでは生成が困難である。通常、１／ｆ$^{\alpha}$のベキで減少するパターンはその普遍性故、特定の機構に依拠しないと考えられ、例えば自己組織化臨界現象（ＳＯＣ）［８、９］のような複雑なシステムの持つ一般的な性質によって説明されるが、多くの場合$\alpha \neq 1$である。パワースペクトルによる秩序－カオスの分岐は一般化シフト写像（ＧＳ）



Fig。4　ＨＤＭの時系列をＦＦＴにかけ、パワースペクトルをとり、両対数グラフにプロットした。異なった乱数系列を用い、５０回の平均を使った。時系列の長さＴ＝8192 ステップ。ＨＤＭのビット列の長さｎ＝１００。

［１０］においても見られるが（**Fig.5**）、秩序（不動点、リミットサイクル）－カオス（シフト写像）の境界に属するＧＳは多くが複雑なパターンを示し、べき乗分布のスペクトルをもつＧＳは限られ、やはり$\alpha > 1$である。以上の例はＧＳによって説明される巾乗則は、規則空間の非常に狭い領域でしか実現されず、普遍的な現象の説明としては困難であることを示している。１／ｆ揺らぎは、リターンマップの次元時系列でも見られ（**Fig.6**）、また、状態のビット列に対して　桁に依存しない関数として表現できる最大の桁の長さ、という特殊な量を測ってその時系列をとってもやはり１／ｆ揺らぎが見出せる（**Fig.7**）。ＨＤＭは、状態概念を使用するが、生成規則と状態は互いに依存しあっており、その状態概念はオペランドとしての状態ではなく、また、生成規則は状態に作用するオペレータとして状態から分離されていない。言い換えれば、１／ｆ揺らぎは、特定の生成規則によって生成された状態の特殊な性質ではない。すなわち、特定のシステムのもつ属性と理解されるのではなく、観測の効果を最大に考慮しなければならないシステムにおいて、本質的なものであるとＨＤＭでは理解される。ＨＤＭ

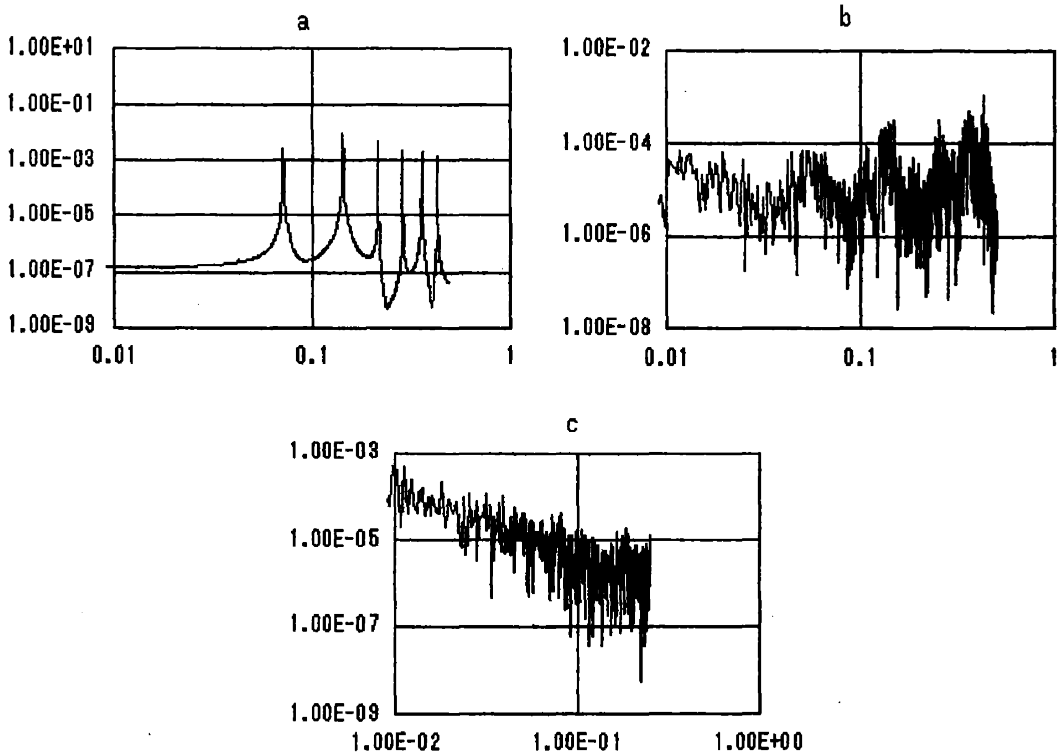


Fig.5 一般化シフト写像（ＧＳ）においてビット列を実数化しその時系列のパワースペクトルを両対数グラフで示したもの。ａは周期的、ｂはカオス、ｃは臨界状態にそれぞれ対応する規則をもつＧＳについてのパワースペクトルである。時系列の長さは8192ステップ。

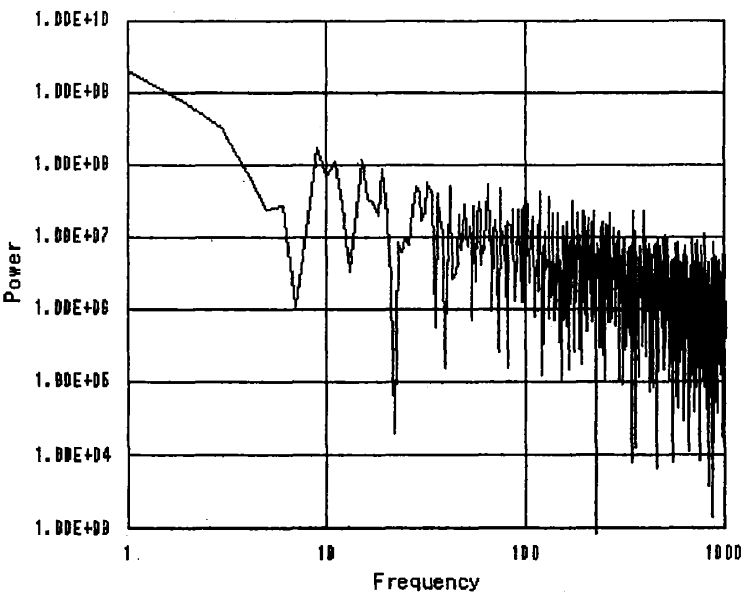


Fig.6 ＨＤＭのリターンマップの位相次元の時系列のパワースペクトルの両対数グラフ。時系列の長さＴ＝2049ステップ。ＨＤＭのビット列の長さｎ＝１００。

ペクトルの説明の有用性は、モデル内部で状態を表象する値のみならず、その他多くの測定量でそれが見られることにも示されている。

5．結論

本研究によって、観測問題の特定のモデルとして提出された過剰敷衍モデルの挙動のいくつかが明らかにされた。リターンマップに表れるカントール集合の時系列により、システムの記述におけるカントール集合の重要性と、ＨＤＭが安定－不安定な二つの状態を移りつづけるシステムとして挙動することが示された。周波数解析から得られたパワースペクトルにより、

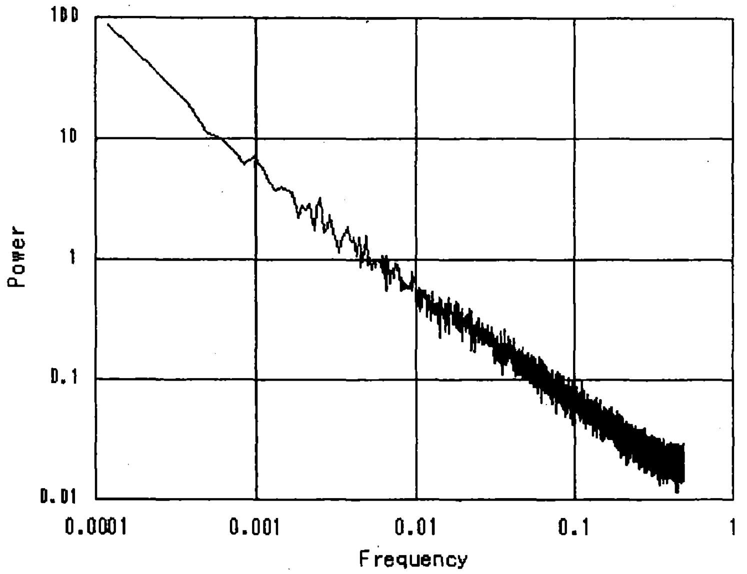


Fig.7　ＨＤＭの生成規則推定において、精度非依存関数として推定可能な最大のビット列の長さの時系列のパワースペクトル。両対数で描いている。横軸は周波数（回／ステップ）、縦軸はパワー。時系列の長さはＴ＝8192。ＨＤＭのビット列の長さｎ＝１００。

たパワースペクトルにより、従来のモデルによっては得ることが困難であった１／ｆ揺らぎのパターンがモデルに関する多くの量で得られることが示された。ＨＤＭのもつこれらの挙動の性質は如何に理解されるのか？ＨＤＭは計算可能なモデルである以上、“状態”としての計算機あるいはプログラム内変数と“規則”としてのプログラムが完全に分離されている。プログラムの様な特定の規則をシステムのもつ機構として理解し、そのような特殊な規則により以上の性質が実現されると理解することも可能である。しかし、我々はこのモデルを実在する機構として現象を説明するものではないことを強調する。ＨＤＭは観測過程の問題を理解する見取り図として使われ、よって、この研究によって示されたＨＤＭの挙動は観測過程の問題とそれらの挙動が対応する現象との関係を隠喩するものである。

引用文献

［１］ M.Conrad, Microscopic-macroscopic interface in biological information processing *Biosystems* 16(1984):345-363.

［２］ H. Pattee, The measurement problem artificial world of models. *Biosystems* 23(1989):281-290.

［３］ P-Y. Gunji, Autonomic life as the proof of incompleteness and Lawverre's theorem of fixed point. *Appl.Math.Comput.* 61(1994):231-267.

［４］ P-Y.Gunji,S.Toyoda, Tree and loop as moments for measurements.*Biosystems* (1995)(in press).

［５］ P-Y.Gunji,S.Toyoda, A model for generalized measurement process based on the relationship between finite and infinite lattices. *Proc.Int.Symp.Cybernetics (Barden-Barden)* (1995)(in press)

［６］ P-Y.Gunji,S.Toyoda,Universal 1/f noise in hyper-dilation and general $1/f^a$ noise in critical phenomena.(to be submitted to physica D).

［７］ D. Scott , The lattice of flow diagram. *Springer Lecture Notes in Mathematics* 38(1972):311-366.

［８］ P.Bak , C. Tang, K. Wiesenfield, Self-organized criticality. *Phys.Rev.* A38(1988):364-374.

［９］ P.Bak, *Physica* A191(1992):41-

［１０］ C. Moore , Generalized-shifts: unpredictability and undecidability in dynamical systems. *Nonlinearity* , 4(1991):199-230.