Title	囚人のジレンマゲームにおける複雑性の解析(力学系と複雑性,基研長期研究会「複雑系4」)
Author(s)	森, 崇; 工藤, 清; 玉川, 洋一; 中村, 量空; 山川, 修; 村田, 拓生
Citation	物性研究 (1996), 66(5): 1002-1005
Issue Date	1996-08-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/95893
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

因人のジレンマゲームにおける複雑性の解析

福井大工、福井県立大生物資源^　森崇、工藤清、玉川洋一、
中村量空^、山川修^、村田拓生

1.　イントロダクション

非常に簡単なルールに従う系が複雑な挙動をすることは様々な系（ロジスティックマップ、ライフゲーム、セルオートマトン）で見られるが、こうした系を解析することは非常に困難である。このような複雑な系を定量化しようとする試みは P.Grassberger［1］から始まり現在に至っているが、未だにそれらを完全に定量化出来ていない。

そこで我々は因人のジレンマゲームを用いて複雑性について考察する。

2.　複雑性の指標

「複雑さ」を定量化しようとする試みは様々な人によってなされてきたが、未だに完全な定量化はなされていない。そんな中で Christopher G.Langton［2］は計算の基本機能という観点から「複雑さ」を捉えた。計算の基本機能は大きく分けて３つに大別され、それらは「情報の蓄積」、「情報の伝達」、「情報の変換」である。これら３つの機能を兼ね備えたものが複雑な計算を可能にすると考えた。そこで我々はこれら３つの機能を次のように解釈した。まず「情報の蓄積」は、「情報の豊富さ」（情報を蓄える能力）に対応させた。次に「情報の伝達」は、「情報の周期性」（情報を正確に伝えるには安定な周期解が適している）に対応させ、最後に「情報の変換」は、「カオス性」（変換というよりは新たな情報を見付けだす能力）に対応させた。以上より「情報の豊富さ」と「情報の周期性」は相互情報量で測れ、「カオス性」はブロックエントロピー［1］で測れる。

そこで、次に相互情報量とブロックエントロピーの簡単な説明をする。

（i）相互情報量

これは２つの情報源間の関連性を定量化したものである。まず２つの情報源X，Yを次のように表わす。

$$X=\begin{bmatrix} x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ p(x_1), & p(x_2), & \cdots, & p(x_n) \end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix} y_1, & y_2, & \cdots, & y_n \\ p(y_1), & p(y_2), & \cdots, & p(y_n) \end{bmatrix}$$

$p(x_i)$，$p(y_i)$ はそれぞれX，Yで生じる事象 x_i，y_i の生起確率である。
これらの情報源のエントロピーH（X），H（Y）は次のように表わせる。

$$H(X)=-\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\ \log(p(x_i))$$

$$H(Y)=-\sum_{i=1}^{n} p(y_i)\ \log(p(y_i))$$

次に２つの情報源Ｘ，Ｙの結合事象を考える。

$$X \cdot Y = \begin{bmatrix} (x_1,\ y_1), & (x_1,\ y_2), & \cdots, & (x_n,\ y_n) \\ p(x_1,\ y_1), & p(x_1,\ y_2), & \cdots, & p(x_n,\ y_n) \end{bmatrix}$$

結合事象のエントロピーＨ（Ｘ，Ｙ）も同様に次のように表わせる。

$$H(X,\ Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p(x_i,\ y_j)\ log(p(x_i,\ y_j))$$

これを結合エントロピーと呼ぶ。こうして相互情報量は次のように表わせる。

Ｉ（Ｘ；Ｙ）＝Ｈ（Ｘ）＋Ｈ（Ｙ）－Ｈ（Ｘ，Ｙ）

この指標はＸとＹの間に何らかの関連性があれば正の値を取る。

（ii）ブロックエントロピー

この指標は、情報源をX_1，X_2，．．．．，X_{n+1}と増やした時の結合エントロピーの漸近的な成長率を示す。これを式で表わすと次のようになる。

$$h = \lim_{n\to\infty}(H_{n+1} - H_n)$$

$$(h \geqq 0)$$

ここでH_nは情報源 X_1，X_2，．．．．，X_nの結合エントロピーである。この指標はＫＳエントロピーとほぼ同じである。よってリアプノフ指数のようにカオスの強さを示すものである。

これら２つの指標を使って囚人のジレンマゲームの複雑性の解析を行う。そこで次に我々が用いた囚人のジレンマゲームの説明をする。

３．　囚人のジレンマゲーム

囚人のジレンマゲーム自体は様々なアルゴリズムが提案されているが、今回我々は次のようなアルゴリズムを用いた［３］。まずＮ×Ｎのます上に囚人が配置されており、各囚人は「協力（０）」か「裏切り（１）」というどちらかの戦略をとる。そして各囚人は自分を含め近隣９人のの囚人と対戦をし、その得点を加算していく。その時の対戦の得点表を次に示す。

相手の戦略

自分の戦略		協力	裏切り
	協力	1	0
	裏切り	b	0

各囚人は自分の近隣において最も成功（一番高い点数）する戦略を自分の次の戦略にする。このようにして各囚人は次々と戦略を変えていく。ここで各囚人の戦略の時系列はパラメーターｂによって様々な挙動をする。しかし、予想としてはパラメーターｂが小さい時は協力者が強すぎて協力者だけになる事が予想される。逆にｂが大きくなりすぎると裏切り者が強くなりすぎて裏切り者だけになることが予想される。そうすると、パラメーターｂがその中間あたりで２つの力が拮抗して複雑な挙動をする事が予想される。そこで先に示した指標を用いて調べた結果を次の章で示す。

４．　結果

まずパラメーターｂの性質をブロックエントロピーで調べた結果を図１に示す。先に予想した通りカオスの強さは、ｂが小さい時には協力者だけになり０になる。逆にｂが大きすぎる(b>2.0)と裏切り者だけになってしまい０になっている。その中間(1.5<b<2.0)でカオス的な挙動をしていることがわかる。

このようにパラメーターｂによって３つの状態が存在していることがわかる。それは周期的な状態、弱いカオス的な状態、強いカオス的な状態である。そこでこれら３つの状態をより詳しく調べる為に個々の囚人に対して、ブロックエントロピーと相互情報量で調べた結果を図２に示す。周期的な状態の代表としてb=1.2、弱いカオス的な状態としてb=1.5、強いカオス的な状態としてb=1.8を選んだ。この結果より周期的な状態(b=1.2)ではブロックエントロピーは０になっているが、相互情報量は０か１のどちらかの値しか取らないことがわかる。次に弱いカオス的な状態(b=1.5)ではブロックエントロピーは全体として低い値を示すが、相互情報量は比較的高い値を示していることがわかる。最後に強いカオス的な状態(b=1.8)ではブロックエントロピーは全体として高い値を示すが、相互情報量は低い値を示していることがわかる。

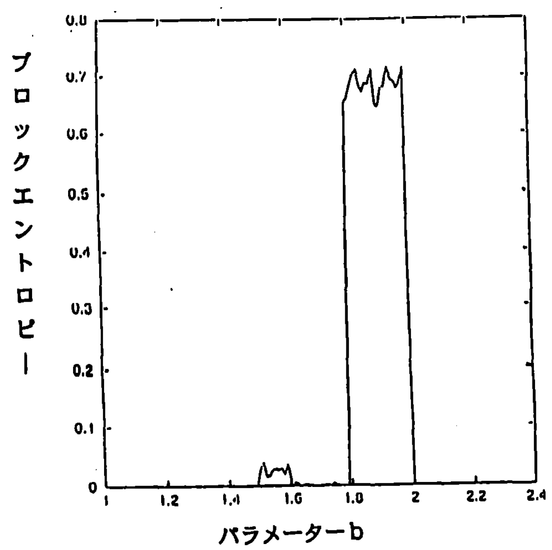

図１．パラメーターｂに対するブロックエントロピー

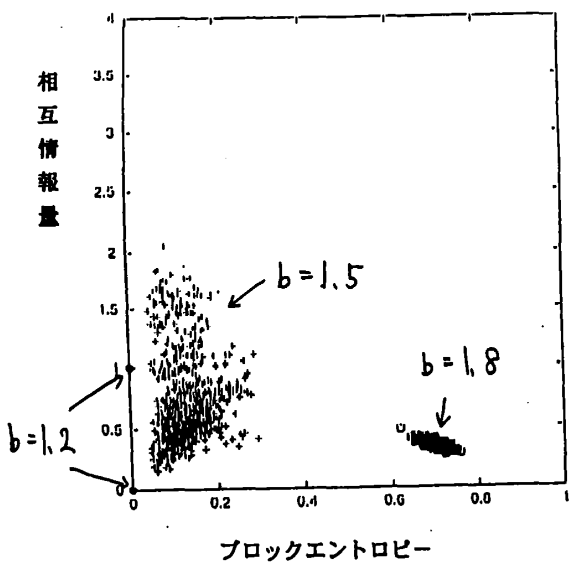

図２．相互情報量ーブロックエントロピーに対する各囚人の分布図

５．　考察

ｂ　の　値	情報の蓄積、伝達	情報の変換
１．２（周期状態）	中	なし
１．５（弱いカオス状態）	高	低
１．８（強いカオス状態）	低	高

以上の結果から「複雑さ」について考察をすると、イントロダクションで述べた様に複雑な状態は「情報の蓄積」、「情報の伝達」、「情報の変換」という３つの機能を持つと仮定した。それをまとめると上の表の様になる。周期状態(b=1.2)では情報の蓄積、伝達能力はある程度あるが、変換能力は全くないことがわかる。次に弱いカオス状態(b=1.5)では情報の蓄積、伝達能力は高いが、変換能力は低いことがわかる。最後に強いカオス状態(b=1.8)では情報の蓄積、伝達能力は低いが、変換能力は高いことがわかる。このように複雑さを計算の基本機能という観点からみると、弱いカオス状態と強いカオス状態が先の３つの機能をを持っている為に「複雑だ」という事になる。しかし、これら２つの状態は全く異なる状態であることが上の表からわかる。そこで、どちらが複雑かという事を推測すると弱いカオス状態はある有用な戦略を見付け、それを蓄積、持続し続ける事が出来るのではないか？逆に、強いカオス状態では有用な戦略を早く見付ける事は出来るが、それを蓄積、持続し続けさせる事が出来にくいのではないか？そうすると、強いカオス状態は複雑というより乱雑に近く、弱いカオス状態の方がシステムとしてより複雑ではないかと思われる。

今後の課題としてはこうした弱いカオス状態がどのような系で起こり、どのような役割をしているか調べていこうと思う。

参考文献

［1］P.Grassberger,Toward a quantitative theory of self-generated complexity, Int.J.Theor.Phys.25,907-938(1986)
［2］C.G.Langton,Computation at the edge of chaos:phase transition and emergent computation,Physica D.42,12-37(1990)
［3］M.A.ﾉｯｸ,R.M.ﾒｲ,K.ｼﾞｸﾞﾑﾝﾄ,"囚人のｼﾞﾚﾝﾏ"と生物の進化,日経ｻｲｴﾝｽ 8,50-61(1995)