

力学の作るフラクタル構造と非可逆性の問題

- 力学と統計力学の対応について -

基礎化学研究所 田崎 秀一

§1. 序

熱平衡にある系の「巨視的」状態は熱力学によって記述される。平衡から少しはずれた系は非可逆過程を経て平衡状態に達するが、この過程は Ohm の法則や Fick の法則といった現象論的法則により記述される。そして、これらの現象は系を構成する原子・分子の可逆な運動から演繹されると考えられている。この考えに沿って熱力学的諸量を微視的な力学量から計算する処方箋が統計力学である。特に平衡統計力学では、孤立系の熱平衡状態が等エネルギー面上の一様統計分布（マイクロ・カノニカル分布）で表わされることを前提に、熱力学量が統計平均として「微視的」力学から一義的に計算される¹⁾。この処方箋は、孤立系がマイクロ・カノニカル分布についてエルゴード性を持つとき、即ち、(ほとんど) 全ての初期点から出発する軌道に沿う任意の物理量の長時間平均がマイクロ・カノニカル平均と一致する場合に、力学から演繹されると考えられている。つまり、巨視的観測には微視的に見るときわめて長い時間がかかるので、巨視的観測は長時間平均と見なせる。よって、エルゴード性から、この平均量がマイクロ・カノニカル平均として計算されると考えるのである。しかし、力学系理論で知られているように、一つの力学系は無数のエルゴード的測度をもつことが可能である。つまり、力学法則と統計的に記述される状態の対応は一般には 1 対多なのである。この統計的状态の多義性は、線形非平衡熱力学から結論することもできる。この点については第 2 節で論じる。さて、力学系理論では、測度の滑らかさや Kolmogorov-Sinai エントロピー最大といった条件で、単一の「物理的」測度を選び、他のエルゴード的測度を捨てる工夫がなされている。第 3 節以降で、統計的性質が厳密に調べられるエルゴード的な可逆力学モデル、多重パイこね変換を用い、統計的状态の多義性がどう現れるかを具体的に示し、状態選択の条件に力学に還元されない要素が含まれることを論じる。

多重パイこね変換は拡散を示す純力学的カオスモデルの一つである。拡散現象は酔歩によって確率的にモデル化できる。酔歩でランダム変数の役割を決定論的カオスに置き換えることにより拡散の力学モデルが構成できる²⁻¹⁰⁾。多重パイこね変換はこのカオス系としてパイこね変換を用いたものである⁶⁻¹⁰⁾。モデルについては第 3 節で説明する。第 4 節では、この系が非可算無限個の異なる不変測度のそれぞれについて混合的であることを示す。この結果自身、力学法則と統計的記述の対応が 1 対多であることを意味するが、次の理由から面白みは少ない。まず、後述する意味で巨視的に見ると、これら全ての統計的状态は一様分布に対応しており、その差は観測不可能である。さらに、Lebesgue 測度以外の測度は特異的であるため、例えば「物理的に実現される測度は Lebesgue 測度について非特異である」という仮定を設ければ容易に唯一のエルゴード的測度を選び出すことができる。第 5 節では、不変測度の一様定常解を求め、その「流れ」の性質を調べる。この解は流れを伴った非平衡定常状態に対応している。そして、平衡分布が周期的有限系のエルゴード測度の極限として、非平衡定常分布が有限開放系のエルゴード測度の極限として特徴付けられることを示す。このとき、与えられた一

よって一つの状態を選ぶことはできない。また、各状態の輸送の性質及び分布は巨視的に見ても異なり、力学法則と統計的に記述される状態が1対多に対応していることが如実に示される。さらに、すべての非平衡定常分布はフラクタル的で Lebesgue 測度について特異的な成分を持っており、測度の滑らかさから単一の状態を選ぶこともできない。このような場合、Kolmogorov-Sinai エントロピー最大といった条件で、単一の「物理的」測度が選ばれるが、この「選択則」の根拠は「情報生成速度が大きい状態が実現している」と言ったもので、力学には還元できない。この点については第6節で論じる。

§2. 熱力学的考察

エルゴード性は熱平衡状態の特徴を力学的に読み替えることにより結論できる。ここでは同様の議論を線形非平衡熱力学に適用することにより、一つの力学系が非可算無限個の局所的安定な統計的定常状態を持ち得ること、非平衡定常状態の記述に平衡不変測度について特異的な測度が不可欠であることを結論し、その意味を論じる。

まず、無限のサイズを持つ系の議論から始めよう。熱力学では体積無限大の極限で境界の効果が無視できるような系を考える。よって、無限の拡がりをもつ系は有限開放系のサイズ無限大の極限ととらえることができる。さて、有限開放系では、境界条件により、系の状態を熱平衡からはずすことができる。このずれがあまり大きくない場合、線形現象論によって記述される非可逆な輸送過程が生じ、系は境界条件から一義的に定まる定常状態に向かって時間発展する。因みに、この定常状態は、エントロピー生成を最小にする唯一の状態として特徴付けられる（エントロピー生成最小の原理）。この結論が非平衡定常状態の安定性も意味していることに注意。つまり、固定境界条件の下で系の状態が定常状態からずれると、系はエントロピー生成が最小の元の定常状態に戻るのである。

熱力学的状態が統計分布によって記述されることを仮定して、上の結論を力学系の立場から見直してみる。サイズ Ω の有限開放系に境界条件 γ_Ω を課したときに実現される定常状態を Γ_Ω とすれば、この系のサイズ無限大の極限で得られる系は Γ_Ω の極限である定常状態 $\Gamma_{\Omega \rightarrow \infty}$ を持つ。境界条件 γ_Ω は連続的に変えられるので無限系の定常状態 $\Gamma_{\Omega \rightarrow \infty}$ も非可算無限個ある。熱力学的状態が統計分布に対応していると考え、結局、今考えている無限系が非可算無限個の不変測度を持つことが結論される。各不変測度は次の意味で局所安定である。今無限系の非平衡定常状態に局所的に攪乱が加えられたとする。この攪乱部分を含む十分大きい有限の広がりを持つ領域を考える。すると、この領域は元の定常状態を実現するような境界条件が課せられた開放系と考えられる。そして、非平衡熱力学より、この領域の状態は時間と共に元の定常状態に戻っていく。よって、元の定常状態、つまり不変測度は局所的攪乱に対して安定である。この測度の安定性は物理量を通して観測されるのであるから、弱収束の意味での安定性と解釈するのが妥当であろう。すぐ分かるようにエルゴード的測度はこの意味で局所安定である。以上まとめると、熱力学的状態が統計分布に対応しているという仮定の下で、

「(無限の拡がりを持つ) 力学系において、線形非平衡熱力学が成立するためには、系は非可算無限個の局所安定な不変測度を持たなければならない。」

ということが結論される。

さて、有限な熱力学系の考察に戻ろう。上述の議論から、有限系からサイズ無限大の極限で得られる系は非可算無限個の不変測度を持つ。熱力学で扱われる有限系はもともと非常に大きいので、そのサイズを無限大にする極限操作で質的变化が生じるとは考えにくい。よって、有限系もまた非可算無限個の不変測度を持つと考えるのが自然である。各不変測度は平衡状態および非平衡定常状態に対応する。特に系を長時間放置すると唯一の平衡状態が実現されることから、平衡状態に対応する不変測度はエルゴード的であると考えられる。このとき非平衡定常状態に対応する不変測度は平衡不変測度について特異な成分を含まなければならない。なぜなら、仮に非平衡不変測度 $\mu_{noneq.}$ が平衡不変測度 $\mu_{eq.}$ について特異な成分を含まない（つまり絶対連続である）とすれば、平衡不変測度 $\mu_{eq.}$ について可積分な密度 $\rho(\xi)$ を用い $\mu_{noneq.}(d\xi) = \rho(\xi) \mu_{eq.}(d\xi)$ と表わされる。両不変測度は異なるので密度 ρ は定数ではない。ところが、平衡不変測度 $\mu_{eq.}$ はエルゴード的であるから、長時間極限 $t \rightarrow +\infty$ で

$$U_t \rho(\xi) \mu_{eq.}(d\xi) \rightarrow (const.) \mu_{eq.}(d\xi),$$

が成立しなければならない。ここで U_t は密度の時間発展演算子であり、収束は弱収束の意味である。この結論は明らかに非平衡不変測度 $\mu_{noneq.}$ の定常性に反する。よって、密度 ρ は存在せず、非平衡不変測度は平衡不変測度について特異な成分を含む。これは非平衡定常状態を統計的に記述する際に特異測度が不可欠であることを示している。

非平衡不変測度の特異成分の台は平衡不変測度について零測度集合である。従って、平衡不変測度のエルゴード性からは、この台に初期点を持つ軌道の長時間のふるまいについては何も言えない。非平衡不変測度で表わされる定常状態の安定性から、この台に初期点を持つ軌道に沿う物理量の長時間平均は非平衡不変測度の特異成分についての相空間平均となる、つまり非平衡不変測度の特異成分がエルゴード的であると考えるのが妥当であろう。この時、系は少なくとも2個のエルゴード的測度をもつ¹。これらエルゴード的測度のそれぞれについて「ほとんど全ての」初期点から出発した軌道に沿う物理量の長時間平均が、対応する測度についての統計平均と一致する。これは閉じた力学系で長時間平均を与える分布として定義される統計的状态が、どの測度を通じて初期点を測ったかに依存し、一義的には定まらないことを意味する。つまり、系の長時間のふるまいを与える統計的状态は力学法則と多対1に対応しており、これを力学法則だけから演繹することはできない。実際には複数の統計的状态のうち一つが実現される。どの状態が実現されるかを定める条件（状態の選択条件）は上の議論から力学には還元できないことが分かる。付加的条件がなければ統計的状态を確定することができないので、統計的記述と力学的記述とが自然現象の記述の異なる階層に属していると考えられることもできる。

以上の観察結果に基づいて不可逆性の出現について一つのシナリオを提示することができる。これを最も単純な場合について示す。まず平衡不変測度は $\mu_{eq.}$ で、非平衡不変測度は特異測度 μ_s を用い $\mu_{noneq.} = \alpha \mu_{eq.} + (1 - \alpha) \mu_s$ とパラメタライズできるとする。この非平衡不変測

¹非平衡不変測度は非可算無限個あるがこれは平衡不変測度 $\mu_{eq.}$ と特異成分 μ_s を用い、実パラメータ α によって $\mu_{noneq.} = \alpha \mu_{eq.} + (1 - \alpha) \mu_s$ とパラメタライズされている可能性がある。従って、互いに特異的な測度は少なくとも2つである。

度を与えるのと同じ境界条件を課し、系を負の方向に時間発展させると $t \rightarrow -\infty$ の極限で一つの不変測度が得られ、正の時間発展の場合と同様、平衡不変測度について特異的な成分 $\bar{\mu}_s$ をもつ。簡単のため3つの不変測度： μ_{eq} 、 μ_s 、 $\bar{\mu}_s$ だけで系の統計的状态が尽くせる場合を考える。すると力学法則と平衡状態の時間反転不変性から時間反転の操作により μ_{eq} は不変で、 μ_s と $\bar{\mu}_s$ が互いに写り合わねばならない。これが力学法則の可逆性からの結論である。そして、 $\bar{\mu}_s$ が「状態の選択条件」に適合しなければ、結局、正の時間発展の極限として得られる状態 (μ_{eq} と μ_s の重ね合せ) のみ为实现されることになり、不可逆性が出現すると考えられるのである。

以下の節では、この一般論で論じた各側面を多重パイこね変換という力学モデルについて具体的に見ていく。

§3. 多重パイこね変換：モデルと時間発展

一次元の酔歩では、一次元格子上を動く粒子が各時間ステップに一つの格子点から左右両隣の格子点にそれぞれ $1/2$ の遷移確率で移動する。格子点を単位正方形に、両隣への振り分けをパイこね変換に置き換えることにより、酔歩の性質を持つ可逆な力学系が構成できる。これが、一次元格子上に配置された単位正方形列で次のように定義される多重パイこね変換 B である。

$$B(n, x, y) = \begin{cases} (n-1, 2x, \frac{y}{2}), & 0 \leq x < 1/2 \\ (n+1, 2x-1, \frac{y+1}{2}), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

ここで、整数 n は、単位正方形のラベルであり、実数の組 (x, y) ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$) は、各単位正方形内での座標を表わす。図1に、写像 B を模式的に示す。容易にわかる様に、写像 B は、(Lebesgue 測度について) 保測かつ可逆で時間反転不変である。また、 B は、一様に双曲的で、最大 Lyapunov 指数 $\ln 2$ を持つ。

統計力学の通常のアプローチでは、考えている系の状態は分布関数によって指定される。分布関数は Liouville 測度に関して絶対連続な測度を定め、逆にそのような測度は分布関数を定める。つまり、系の状態は、相空間上で定義された測度により表わされている。今、測度の

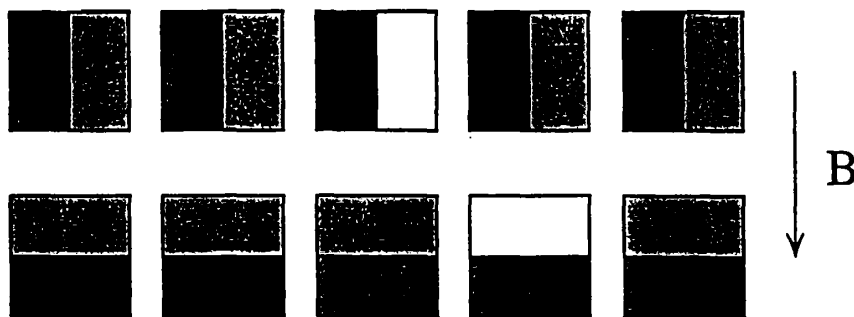


図1: 多重パイこね変換 B

時間発展を直接考えると、必ずしも Liouville 測度に関して密度を持たない測度も含めることができ、より一般の場合も扱える。

多重パイこね変換の場合、測度の時間発展は以下ようになる。測度 μ を Borel 測度というクラスに限ると、任意の μ -可測集合は、半開矩形

$$\{[0, x) \times [0, y)\}_n, \quad (3.2)$$

の可算個の和集合として表わされる。ここで添字 n は、矩形 $[0, x) \times [0, y)$ が n 番目の単位正方形の部分集合であることを示す。従って、測度 μ は、累積分布関数 G :

$$G(n, x, y) \equiv \mu\left(\{[0, x) \times [0, y)\}_n\right), \quad (3.3)$$

により完全に指定される。測度 μ の時間発展方程式は、Liouville 方程式と同様に導出される。

$$\mu_{t+1}(A) = \mu_t(B^{-1}A), \quad (3.4)$$

ここで、 μ_t は時刻 t での測度を表し、 A は任意の可測集合である。よって、累積分布関数 G の発展方程式は

$$G_{t+1}(n, x, y) = \begin{cases} G_t(n+1, \frac{x}{2}, 2y), & 0 \leq y \leq 1/2 \\ G_t(n+1, \frac{x}{2}, 1) + G_t(n-1, \frac{x+1}{2}, 2y-1) \\ \quad - G_t(n-1, \frac{1}{2}, 2y-1), & 0 \leq y \leq 1/2 \end{cases} \quad (3.5)$$

となる。ここで $G_t(n, x, y) \equiv \mu_t\left(\{[0, x) \times [0, y)\}_n\right)$ は時刻 t での測度の累積分布関数である。

§4. エルゴード性

容易に分かるように、累積分布の運動方程式 (3.5) は

$$G(n, x, y) = f_\alpha(x)f_\alpha(y), \quad (4.1)$$

という定常解を持つ。ここで、関数 f_α はパラメータ α ($0 < \alpha < 1$) により特徴付けられ、deRham の関数方程式¹¹⁻¹³⁾

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha f_\alpha(2x), & 0 \leq x \leq 1/2 \\ (1-\alpha)f_\alpha(2x-1) + \alpha, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

の解として定義される。 $\alpha \neq 1/2$ のとき、 f_α は狭義単調増加で Lebesgue 測度についてほとんど至るところ微係数 0 をもつ、つまり、Lebesgue の特異関数である。

(4.1) の測度 $\mu_{\alpha eq.}$ が与えられた相空間 $[0, 1]^2 \times \mathbf{Z}$ は、格子点座標 n について周期性をもち、そこで定義される多重パイこね変換も n について周期的である。この変換は α ($0 < \alpha < 1$) のすべての値について、次の意味で混合性をもつ：

Proposition 4.1 : 混合性

$A, C \subset [0, 1]^2 \times \mathbf{Z}$ を $\mu_{\alpha eq.}$ -可測で有界な集合とする。すると、次式が成り立つ。

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_{\alpha eq.}(A \cap B^t C) = 0, \tag{4.3}$$

これは、多重パイこね変換が可算無限個の測度 $\mu_{\alpha eq.}$ のそれぞれについてエルゴード的であることを意味する。つまり、エルゴード性を課しても、力学法則と統計的記述の対応は 1 対多である。しかし、次の理由から面白みは少ない。まず、多重パイこね変換において正方形内の自由度は微視的なダイナミクスに対応していると考えられる。そこでこの自由度を粗視化すると測度 $\mu_{\alpha eq.}$ はパラメータによらず格子点上の一様分布に対応している。つまり、粗視化によって可算無限個の測度 $\mu_{\alpha eq.}$ は区別できない。また、 $\alpha \neq 1/2$ のとき測度 $\mu_{\alpha eq.}$ は Lebesgue 測度について特異的であり、「物理的に実現される測度は Lebesgue 測度について非特異である」という仮定を設ければ唯一のエルゴード的測度を選び出すことができる。そこで次節では、非平衡定常状態を扱う。

§5. 非平衡一様定常状態 とその性質

この節では、a) (3.5) 式の定常解で、b) $\alpha_n \equiv G(n, 1/2, 1)/G(n, 1, 1)$ が格子点座標 n によらない一様定常解を調べる。多重パイこね変換は、 x 方向を x 方向に、 y 方向を y 方向に写すので、両方向は独立であると考えられ、積測度 (累積分布関数が x の関数と y の関数の積に書ける測度) で表される定常状態が存在することが示唆される。(因に、前節で扱った測度 $\mu_{\alpha eq.}$ は積測度かつ B の不変測度である。) このとき累積分布関数は次の様に置ける。

$$G(n, x, y) = G(n, 1, y)F(n, x), \tag{5.1}$$

ただし、 $F(n, 1/2) = \alpha$ は n によらない。 α の値により (3.5) は次のような定常解をもつ。

Proposition 5.1 : (一様定常状態) ^{14,15)}

ア) $\alpha \neq 1/2, 0 < \alpha < 1$ の場合 : 定常状態の累積分布関数は

$$G(n, x, y) = f_\alpha(x) \left\{ A \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^n f_{1-\alpha}(y) + A' f_\alpha(y) \right\}. \tag{5.2}$$

となる。ここで A, A' は定数で、 f_α は deRham の関数方程式 (3.2) の解として定まる特異関数である。図 2 (a),(b),(c) のそれぞれに (4.2) の n, x, y 依存性を示す。

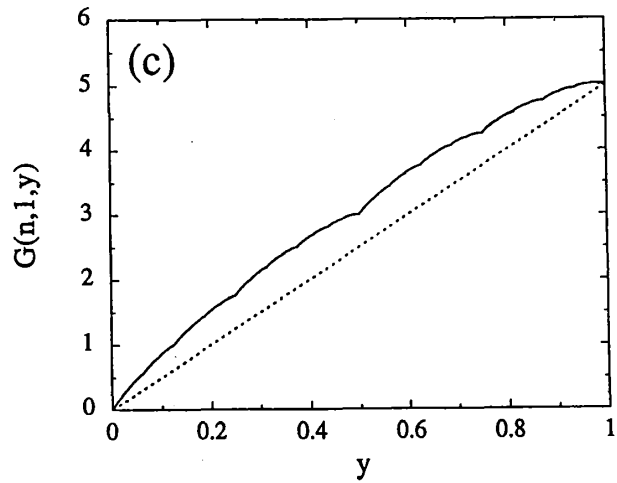
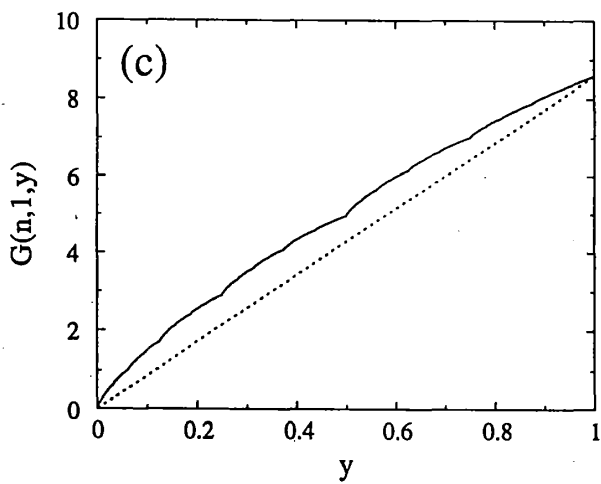
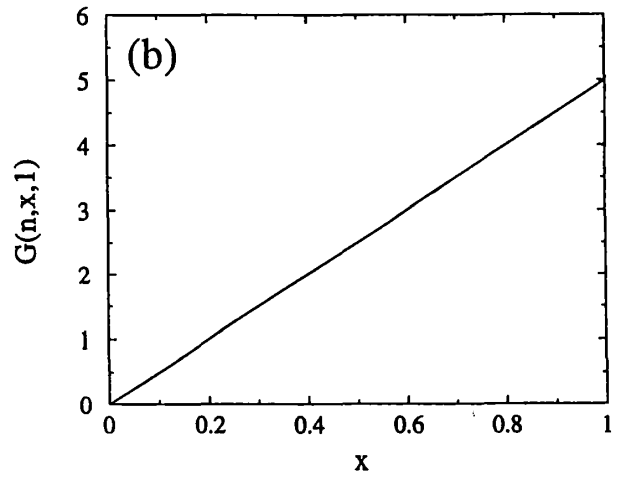
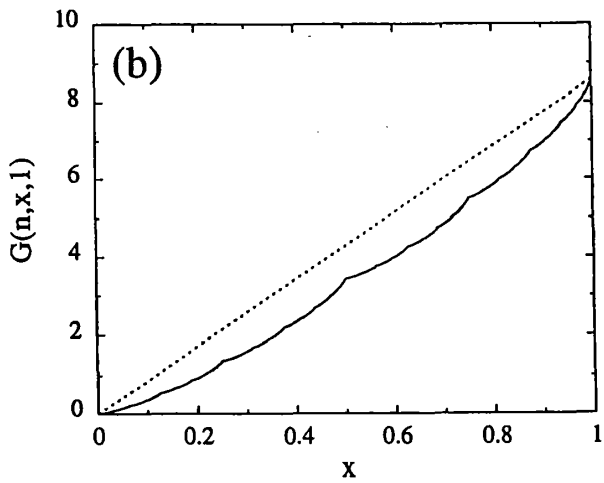
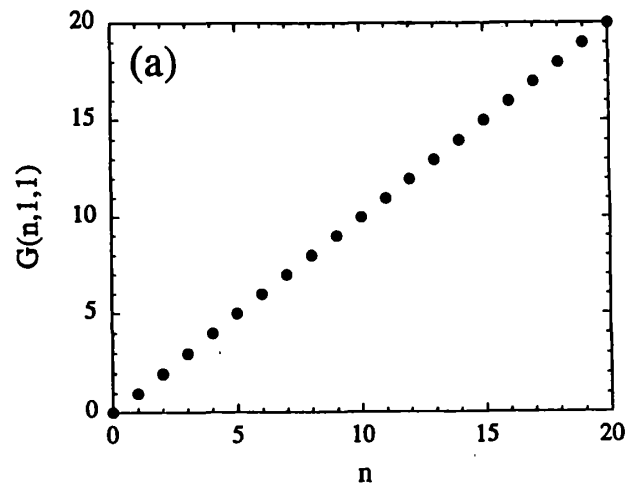
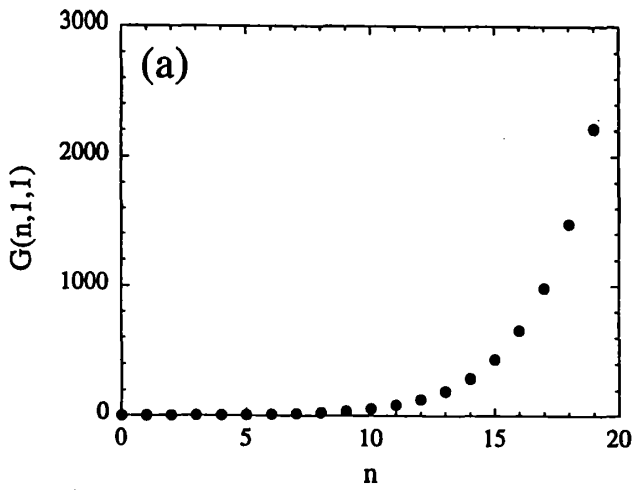


図 2 : 累積分布 $G(n, x, y)$ のふるまい
 $(\alpha = 2/5)$ (a): $G(n, 1, 1)$ v.s. n ,
 (b): $G(5, x, 1)$ v.s. x , (c): $G(5, 1, y)$ v.s. y

図 3 : 累積分布 $G(n, x, y)$ のふるまい
 $(\alpha = 1/2, \text{Fick 状態})$ (a): $G(n, 1, 1)$ v.s. n ,
 (b): $G(5, x, 1)$ v.s. x , (c): $G(5, 1, y)$ v.s. y

イ) $\alpha = 1/2$ の場合：定常状態の累積分布関数は

$$G(n, x, y) = x[B\{ny + T(y)\} + B'y] . \quad (5.3)$$

となる。B、B'は定数である。関数 $T(y)$ は方程式

$$T(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}T(2y) + y, & 0 \leq y \leq 1/2 \\ \frac{1}{2}T(2y - 1) + 1 - y, & 1/2 < y \leq 1 \end{cases} \quad (5.4)$$

の一意解として定義される。これは、高木関数^{16,12,13}と呼ばれ、連続でいたるところ有限な導関数を持たない。高木関数とそれに関連した関数の諸性質は畑、山口^{12,13}により詳しく調べられている。(5.3)の n, x, y 依存性をそれぞれ図3 (a),(b),(c) に示す。

ウ) 時間反転状態：変換 B は時間反転のもとで不変であるから、定常状態イ) を時間反転したものも定常状態である：

$$\bar{G}(n, x, y) \equiv \mu\left(I\{[0, x] \times [0, y]\}_n\right) = y[B\{nx - T(x)\} + B'x] . \quad (5.5)$$

Proposition 5.1 の一様定常状態は流れを伴っている。 n 番目と $n+1$ 番目の正方形の境界を考えると (図4 参照)、一回の多重パイクね変換 B の作用により半正方形の移動が起こる。図4 から、右に移動する n 番目の正方形内の $[1/2, 1] \times [0, 1]$ という領域の測度と左に移動する $n+1$ 番目の正方形内の $[0, 1/2] \times [0, 1]$ という領域の測度の差が境界を左から右へ横切る流れを表わしていることが分かる：

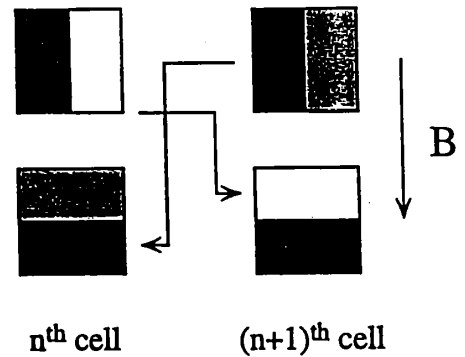


図4: n と $n+1$ 番目の境界を横切る流れ

$$\begin{aligned} J_{n|n+1}(t) &= \mu_t\left(\left\{[1/2, 1] \times [0, 1]\right\}_n\right) - \mu_t\left(\left\{[0, 1/2] \times [0, 1]\right\}_{n+1}\right) \\ &= G_t(n, 1, 1) - G_t(n, 1/2, 1) - G_t(n+1, 1/2, 1) . \end{aligned} \quad (5.6)$$

Proposition 5.1 の各状態の「流れ」は次の様になる。

Proposition 5.2 : (定常状態の流れ) ^{14,15}

ア) $\alpha \neq 1/2, 0 < \alpha < 1$ の場合：流れは分布の格子点座標 n に依存しない部分から生じる。

$$J_{n|n+1} = (1 - 2\alpha)A' . \quad (5.7)$$

イ) $\alpha = 1/2$ の場合：流れは分布の格子点座標 n に依存する部分から生じ、拡散の Fick の法則が成り立つ。

$$J_{n|n+1} = -\frac{B}{2} = -\frac{1}{2}\{G(n+1, 1, 1) - G(n, 1, 1)\}. \quad (5.8)$$

ウ) 時間反転状態：流れは「反」Fickの法則に従う。

$$J_{n|n+1} = \frac{B}{2} = \frac{1}{2}\{G(n+1, 1, 1) - G(n, 1, 1)\}. \quad (5.9)$$

前節扱った平衡測度が周期的有限系の極限として捉えられたように、非平衡定常測度は有限開放系の極限として捉えられる。

Proposition 5.3 : (有限開放系の漸近状態と一様定常状態)¹⁵⁾

ア) 格子点座標 $n=0$ と $n=N$ の半正方形で

$$\begin{cases} \mu_t(\{[0, x] \times [1/2, y]\}_{n=0}) = \rho_- f_\alpha(x) [f_\alpha(y) - f_\alpha(1/2)], & 1/2 \leq y \leq 1 \\ \mu_t(\{[0, x] \times [0, y]\}_{n=N}) = \rho_+ f_\alpha(x) f_\alpha(y), & 0 \leq y \leq 1/2 \end{cases} \quad (5.10)$$

という固定境界条件を測度に課す。すると、初期累積分布 $G_{t=0}$ が x について可微分な部分密度によって $G_{t=0}(n, x, y) = \int_0^x df_\alpha(x') G(n, x', y)$ と表わされるなら、 $t \rightarrow +\infty$ で累積分布は Proposition 5.1 ア) の分布 (5.2) に漸近する。ただし、定数 A, A' は条件 $\rho_- = A' + \alpha A / (1 - \alpha)$, $\rho_+ = A' + A \{(1 - \alpha) / \alpha\}^{N+1}$ から定まる。

イ) 格子点座標 $n=0$ と $n=N$ の半正方形で

$$\begin{cases} \mu_t(\{[0, x] \times [1/2, y]\}_{n=0}) = \rho_- x [y - 1/2], & 1/2 \leq y \leq 1 \\ \mu_t(\{[0, x] \times [0, y]\}_{n=N}) = \rho_+ xy, & 0 \leq y \leq 1/2 \end{cases} \quad (5.11)$$

という固定境界条件を測度に課す。すると、初期累積分布 $G_{t=0}(n, x, y)$ が x について2階可微分であれば、 $t \rightarrow +\infty$ で累積分布は

$$G(n, x, y) = x \left[\frac{\rho_+ - \rho_-}{N+2} \{(n+1)y + T_n(y)\} + \rho_- y \right]. \quad (5.12)$$

に漸近する。ここで、関数 $T_n(y)$ は高木関数に似た関数で、 $N=10$ の時 $T_5(y)$ は高木関数とほぼ同一である。 $N \rightarrow \infty$ の極限で (5.12) の状態の中心近く ($n \simeq N/2$) の分布は無限系の分布 (5.3) に漸近する。状態 (5.12) は、無限系の場合と同様 Fick の法則をみたす「流れ」を伴っている。

さて、前節で見たように各格子点上の正方形の全測度 $G_t(n, 1, 1)$ を考えることは巨視的記述に対応している。Proposition 5.1 の結果は、巨視的分布 $G_t(n, 1, 1)$ の一つの境界条件について非可算無限個の非平衡定常状態が存在することを意味する。これらの状態は微視的分布だけでなく、巨視的分布も異なっており、さらに、Proposition 5.2 に示すように、巨視的に見られる輸送過程も異なっている。つまり、力学法則と統計的に記述される状態の対応が1対

多であることが如実に示された。また、Proposition 5.1 で見たように、これらすべての非平衡定常分布はフラクタル的で Lebesgue 測度について特異的成分を含む。この結果は第 2 節の一般論と合致する。非平衡定常分布が特異的成分を含むので、前節で扱った平衡状態の場合と違って測度の滑らかさから単一の状態を選ぶことはできない。結局、非平衡定常状態を考えることにより、力学法則と統計的に記述される状態の対応の 1 対多性が浮き彫りにされるのである。このような状況下では、付加的な条件を課して力学法則と状態の 1 対 1 対応を回復させる試みがなされている。これについては、次節で論じる。

§6. 状態の選択

一つの力学系が無数に多くの不変測度をもつことは、力学系理論ではよく知られており、付加条件を課して単一の測度が選ばれる。ここでは、二つの選択条件を紹介し、力学に還元できない要素を持つことを示す。

a). KS エントロピー最大：これは「物理的」状態では KS エントロピーが最大になるという条件で、考えている状態において単位時間に生成される「情報量」が最大になるという条件にあたる。しかし、なぜ情報生成速度が最大でなければならないかという理由は力学的に答えられず、ここに力学に還元できない要素がある。多重パイこね変換の場合、(単位正方形あたりの) KS エントロピーは $h_{KS} = -\alpha \ln \alpha - (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha)$ となり、Fick 状態、「反」Fick 状態の双方で最大値 $h_{KS} = \ln 2$ をとる。つまり、KS エントロピーは Fick 状態と「反」Fick 状態を区別しない。これは一般論からも結論することもできる。事実、Fick 状態 G と多重パイこね変換 B の組、 (G, B) は、「反」Fick 状態 \bar{G} と逆変換 B^{-1} の組 (\bar{G}, B^{-1}) と、時間反転 I により同型であるから、両者は等しい KS エントロピーを持つ¹⁷⁾。他方 (\bar{G}, B^t) の KS エントロピーは (\bar{G}, B) のその $|t|$ 倍であるから¹⁷⁾、結局 (G, B) と (\bar{G}, B) の KS エントロピーは一致するのである。さらに、KS エントロピーは境界条件によらない。つまり、これは系が平衡状態にあるか非平衡状態にあるかを区別できない。この意味で KS エントロピーは非平衡状態を分類するには十分な量ではない。

b). Lebesgue 測度についての滑らかさ：これは「物理的」測度は引き伸ばされる方向に関し、Lebesgue 測度について絶対連続であるというもので、Sinai-Ruelle-Bowen 測度¹⁸⁾の条件に対応している。これを多重パイこね変換の場合に適用すると、Fick の法則に従う非平衡定常状態のみが選ばれる。この付加条件には次のような「物理的説明」を与えることもできる：多重パイこね変換による引き伸ばしのため分布は伸びる方向に沿って一様化される傾向がある。従って、伸びる方向に関して特異的な分布が終状態として実現するには伸びる方向に自己相似的な初期分布から出発しなければならない。このような分布は、準備をするのに fine tuning が必要であるから実現されない。しかし、この考えの背景には、Lebesgue 測度について滑らかな分布が実現されやすいという考えがあり、この考えは力学に還元できず、恣意的な感じを与える。結局、この条件は経験に合う非平衡定常分布を選ぶことができるが、その根拠は不確かである。

ここでは多重パイコネ変換を例にとり、力学法則と統計的に記述される状態の間に1対多の対応関係があり、これが非平衡状態では、より顕著に現れることを見てきた。第2節で議論したように、この1対多の対応は、系が「境界条件に依存する複数の定常状態をもち、各定常状態へは初期状態によらずに漸近する」という多様性をもつために不可欠な要素である。そして、この節で見たように、多数の統計的状态から単一の状態を選択するには、力学に還元できない付加条件が必要なのである。

謝辞

本稿は Brussels 自由大学の Dr. P. Gaspard との共同研究によって得られた結果を基にしており、この共同研究に関し Dr. P. Gaspard に感謝する。また、本研究への支援および有益なコメントを頂いた基礎化学研究所の福井謙一所長、龍谷大学の山口昌哉教授、Solvay 研究所 (Brussels) の Prof. I. Prigogine、Dr. I. Antoniou、Dr. Z. Suchanecki に感謝します。さらにこの研究は、文部省の科学研究補助金、国際学術研究から助成を受けています。

参考文献

- [1] e.g., ランダウ、リフシッツ「統計物理学 (第3版)」小林秋男他訳 (岩波書店、1980)、戸田盛和、久保亮五、斎藤信彦、橋爪夏樹「統計物理学 (第2版)」岩波講座 現代物理学の基礎 5 (岩波書店、1978)。
- [2] S. Grossman and H. Fujisaka, *Phys. Rev. A* **26** (1982) 1779.
- [3] S. Thomae, "Chaos-induced diffusion", in *Statics and Dynamics of Nonlinear Systems*, G. Benedek et al., Eds. (Springer, Berlin, 1983) 204.
- [4] H.H. Hasegawa and D.J. Driebe, *Phys. Lett. A* **168** (1992) 18.
- [5] P. Gaspard, *Phys. Lett. A* **168** (1992) 13.
- [6] S. Tasaki, I. Antoniou and Z. Suchanecki, *Phys. Lett. A* **179** (1993) 97.
- [7] P. Gaspard, *J. Stat. Phys.* **68** (1992) 673.
- [8] P. Gaspard, *Chaos* **3** (1993) 427.
- [9] H.H. Hasegawa and D.J. Driebe, *Phys. Rev. E* **50** (1994) 1781.
- [10] S. Tasaki, A. Hakmi and I. Antoniou, to appear.
- [11] G. de Rham, *Rend. Sem. Mat. Torino* **16** (1957) 101.
- [12] M. Hata and M. Yamaguti, *Japan J. Appl. Math.* **1** (1984) 183.
- [13] M. Hata, in *Patterns and Waves* eds. T. Nishida, M. Mimura and H. Fujii, *Studies in mathematics and its Application*, Kinokuniya & Northholland, 1986, p.259.
- [14] S. Tasaki and P. Gaspard, in *Towards the Harnessing of Chaos*, Ed. M. Yamaguti, Elsevier, Amsterdam, 1994, p.273.
- [15] S. Tasaki and P. Gaspard, *J. Stat. Phys.* **81** (1995) 935.
- [16] T. Takagi, *Proc. of Physico-Mathematical Society of Japan, ser.II*, **1** (1903) 176.
- [17] Ya. G. Sinai, *Introduction to Ergodic Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1972.
- [18] J.-P. Eckmann and D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.* **57** (1985) 617.