力学系におけるフレーム問題:計算可能性と積分可能性

梅野　健[1]

理化学研究所 FR 情報表現研究チーム

1 はじめに

系の**複雑さ**を測る尺度は数学的に定義可能であるが, 実際に系を与えてその尺度を計算するのは難しいのは経験上よく知られていることである。だが, 本当にその複雑さを時間をかければ測定可能, もしくは**計算可能**であるかというより根源的な問題となると, ほとんど研究が進んでいないのが現状である。

本報告では, $N = 2$ と $N \geq 3$ とで系の振る舞いが質的に変化をもたらす多体系としての力学系においてこの問題の研究の現状について報告者の知り得ることを記すこととする。

2 積分不可能性判定

何故 $N(\geq 3)$ 体問題が解けないかを今日の力学系の知見に照らし合わせると, それはその系が**積分不可能系**であるからということになる. よって力学系の複雑さを測る尺度としてその積分不可能性を考えることは, 妥当であろう。その積分不可能性の研究は, ポアンカレに始まり一世紀以上の歴史があるが [13], 具体的な少数自由度系 (自由度 2 または 3 の系) を与えて, その積分不可能性を証明できるようになったのは 1983 年のヂグリン, 1987 年の吉田等による最近の研究からである [5, 14, 16]. ところが, その多自由度積分不可能性判定は, **非共鳴条件**という数論的ボトルネックがあるため今まで未解決とされていた。まずここで, 上の様な状況にも関わらず, 積分不可能性判定が可能になったという例として以下の

1. 大域的かつ対称な結合を持つハミルトン系 (自由度 3 以上の任意の有限自由度)
2. 鏡映対称性を持つ一次元非線形格子 (自由度 3 以上の任意の有限奇数自由度)

の二種類の系の結果について記す. 上記の二種類のモデルうち前者のモデルは"多自由度ハミルトン系の積分不可能性にとって本質的な判定条件は何か?"を探る為, 著者が考案したモデルであり, 具体的には次のハミルトニアン

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{s} \sum_{<i_1,\cdots,i_r>}^{<n>} q_{i_1}^s q_{i_2}^s \cdots q_{i_r}^s \tag{1}$$

で記述される. 但し, $\sum_{<i_1,\cdots,i_r>}^{<n>}$ は $1, 2, \cdots, n$ から選ばれる r 種の全ての組み合わせについて和をとることを表し, $r(\leq n)$ は 3 以上の整数, s は 1 以上の整数とする. ここでは便宜上, type (n, r, s) と呼ぶ. 後者のモデルは実際の物質をより意識した一次元非線形格子模型であり, 今まで熱伝導などの非平衡現象を調べるのに数多くの数値計算が行われてきたモデルである. ここではハミルトニアンを

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} v(q_{i-1} - q_i) \tag{2}$$

[1]E-mail:chaosken@giraffe.riken.go.jp

として, ポテンシャル関数 $v(x)$ が偶数次の項だけを持つ多項式

$$v(X) = \frac{\mu_2}{2}X^2 + \frac{\mu_4}{4}X^4 + \cdots \frac{\mu_{2m}}{2m}X^{2m} \tag{3}$$

で与えられるとした. $2m = 4$ の時のハミルトニアンが, 調和項に四次の非線形項のついたFPU 格子となる.

この積分不可能性判定可能例を挙げた後, 判定可能性が不明な例として重力多体系を挙げ, 最後にこれらの例から浮かび上がるフレーム問題について言及する。

3 対称かつ大域結合を持つ多自由度系:決定可能例 I

ヂグリンの積分不可能性判定に関する定理の主張 (1983 年) は自由度 2 の場合 もし系にハミルトニアン H以外に正準変数に関し一価解析的な積分があるならば, ある周期解の周りの変分方程式の直交成分である直交変分方程式の持つ非共鳴なモノドロミー行列 m_1が存在したとき, m_1とは異なる任意のモノドロミー行列 m_2 に対して, 可換

$$[m_1, m_2] = m_1 m_2 m_1^{-1} m_2^{-1} = id \tag{4}$$

もしくは, $\mathrm{tr} m_2 = 0$ となる」ことであり, 一般に非可換なモノドロミー行列に大きな制約を与えるものである. 尚ここで自由度 n の系の直交変分方程式のモノドロミー行列は $(2n-2)\times(2n-2)$ であり, $2n-2$ 個の固有値 $\{\sigma_1, \sigma_1^{-1}, \sigma_2, \sigma_2^{-1}, \cdots, \sigma_{n-1}, \sigma_{n-1}^{-1}\}$ に対して,

$$\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\cdots\sigma_{n-1}^{l_{n-1}} = 1 \tag{5}$$

なる関係を満足する整数 $\{l_\nu\}$ が, 自明の場合 $l_1 = l_2 = \cdots = l_{n-1} = 0$ を除き存在しない場合に, 非共鳴なモノドロミー行列と言う. ヂグリンの定理は自由度 3 以上でも同様に成立し, ポテンシャルが同次式である場合に吉田 (1987 年) によって拡張されているが, 同様に非共鳴条件を使っている. 自由度 2 の時は, σ_1が 1 のベキ根でないことが非共鳴条件と同値となる。ところが報告者により, この方法のままでは, 自由度 3 以上の力学系で万能でなくなることが, 上記のモデル type (n,r,s) を使って示された [9]. type (n,r,s) の対称性から, 次の様な $n-r-1$ 種類の直線解

$$\begin{aligned} q_1 &= Z\phi(t), \cdots, q_{n_s} = Z\phi(t), q_{n_s+1} = 0, \cdots, q_n = 0 \\ p_1 &= Z\dot{\phi}(t), \cdots, p_{n_s} = Z\dot{\phi}(t), p_{n_s+1} = 0, \cdots, p_n = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

が考えられる (これを$\Gamma_{n_s}(n,r,s)$ とする.). ただし, Z は

$$1 = \frac{(n_s-1)!}{(m-1)!(n_s-m)!}Z^{sr-2} = ({}_{n_s-1}C_{m-1})Z^{sr-2} \tag{7}$$

で, ϕ は次の微分方程式

$$\ddot{\phi}(t) + \phi^{sr-1} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2}\dot{\phi}^2(t) + \frac{1}{sr}\phi^{sr} = \mathrm{Const} \tag{8}$$

を満たす. その直線解の周りの変分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{J}H_{\boldsymbol{zz}}(\boldsymbol{z}(t))\boldsymbol{\zeta}, \tag{9}$$

を考える．ただし，

$$\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta_1, \cdots, \eta_n) \tag{10}$$

で $H_{\boldsymbol{zz}}$を ハミルトニアンのヘシアン行列に$\boldsymbol{z}(t)$ を代入したもので，$\boldsymbol{J}$を次の $2n \times 2n$ Symplectic 行列

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

とする．この時ポテンシャル関数の $n \times n$ のヘシアン行列は

$$V_{\boldsymbol{zz}} = \begin{bmatrix} s-1 & s\frac{r-1}{n_s-1} & \cdots & s\frac{r-1}{n_s-1} & 0 & \cdots & 0 \\ s\frac{r-1}{n_s-1} & s-1 & s\frac{r-1}{n_s-1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ s\frac{r-1}{n_s-1} & \cdots & \cdots & s-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{for} \quad s \geq 3, \tag{12}$$

$$V_{\boldsymbol{zz}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{r-1}{n_s-1} & \cdots & \frac{r-1}{n_s-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{r-1}{n_s-1} & 1 & \frac{r-1}{n_s-1} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{r-1}{n_s-1} & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{n_s}{r} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{n_s}{r} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{n_s}{r} \end{bmatrix} \quad \text{for} \quad s = 2, \tag{13}$$

となり，$s = 1$ の場合は唯一種類の解 $(n_s = n)$ しかないので，$V_{\boldsymbol{zz}}$ は一意的に次の様に

$$V_{\boldsymbol{zz}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{r-1}{n-1} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \frac{r-1}{n-1} \\ \frac{r-1}{n-1} & 0 & \frac{r-1}{n-1} & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{r-1}{n-1} & \frac{r-1}{n-1} & 0 & \frac{r-1}{n-1} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{r-1}{n-1} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 0 & \frac{r-1}{n-1} \\ \frac{r-1}{n-1} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

決まる． さてこの全ての直線解の周りのポテンシャル関数のヘシアン行列の固有値 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ は，

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n_s-1} = s\frac{n_s - r}{n_s - 1} - 1, \lambda_{n_s} = sr - 1 \\ \lambda_{n_s+1}, \cdots, \lambda_n = \frac{n_s}{r} \quad \text{for}(s \geq 3) \\ \lambda_{n_s+1} = 0, \cdots, \lambda_n = 0 \quad \text{for}(s = 2), \end{aligned} \tag{15}$$

となり，$n \geq 4$ で常に縮退する。よってモノドロミー行列の固有値も常に縮退する。よってどの直線解を選んでも，モノドロミー行列の固有値が縮退してしまい，明らかに上の非共鳴条件を満足しない．そこで報告者は非共鳴条件が強すぎると考え，それに替えて**非共鳴的縮退条件**という新しいモノドロミー行列に対する条件を考えた [11]．ここでモノドロミー行列が非共鳴縮退的というのは，モノドロミー行列の固有値が，

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_{i_1}, \cdots, \cdots, \sigma_{i_{d-1}+1} = \cdots = \sigma_{n-1} = \sigma_{i_d} \tag{16}$$

のように $d(\leq n-1)$ 種類に縮退していても，その d 個の代表固有値が非共鳴条件を満足している場合のこととする．明らかに，この条件は非共鳴条件を含むより広い条件である．よって非共鳴条件を，非共鳴縮退条件に置き換えることで， type (n,r,s) の様に，粒子変換に対して対称，かつポテンシャルが同次式の n 自由度のハミルトン系を考える．そのときもし，系が角運動量 $p_iq_j-q_jp_i$の関数のみで書かれる積分以外の解析的積分が存在するとする．そのとき，2 種類の非共鳴縮退条件を満足するモノドロミー行列が存在するなら，その $n-1$ 個の内の少なくとも 1 つの小ブロック行列どうしが可換になる」という定理 [11] を得られた。これはヂグリン= 吉田型の定理の拡張となっている．上の定理により積分不可能性を示すには type (n,r,s) のモノドロミーが非共鳴縮退条件を満足するか否かを調べてみる必要がある。ここで$\Gamma_{n_s=n}(n,r,s)$ のモノドロミーの固有値が，(1) 変数変換

$$z=(\phi(t))^{sr}, \tag{17}$$

により変分方程式

$$\frac{d^2\xi_j}{dt^2}+\lambda_j\phi(t)^{sr-2}\xi_j=0 \tag{18}$$

がガウスの超幾何方程式

$$z(1-z)\frac{d^2\xi_j}{dz^2}+[(1-\frac{1}{sr})-(\frac{3}{2}-\frac{1}{sr})z]\frac{d\xi_j}{dz}+\frac{\lambda_j}{2sr}\xi_j=0. \tag{19}$$

に移ること [14]，(2) ガウスの超幾何方程式の基本モノドロミー $M(\gamma_0),M(\gamma_1)$ が次の公式

$$M(\gamma_0)=\begin{pmatrix}1 & e^{-2\pi ib}-e^{-2\pi ic}\\ 0 & e^{-2\pi ic}\end{pmatrix}$$

$$M(\gamma_1)=\begin{pmatrix}e^{2\pi i(c-a-b)} & 0\\ 1-e^{2\pi i(c-a)} & 1\end{pmatrix} \tag{20}$$

$$a+b=\frac{1}{2}-\frac{1}{sr},\quad ab=-\frac{\lambda_j}{2sr},\quad c=1-\frac{1}{sr} \tag{21}$$

で得られることから，

$$\begin{aligned}m_1(\lambda_j)&=\{M(\gamma_0)M(\gamma_1)\}^{4sr}\\ m_2(\lambda_j)&=\{M(\gamma_1)M(\gamma_0)\}^{4sr}\end{aligned} \tag{22}$$

の 2 種類のモノドロミー [15] の固有値が次式

$$\sigma=\sigma_j=\exp\left(2\pi i\sqrt{(rs-2)^2+8sr\frac{n(s-1)-sr+1}{n-1}}\right)\qquad \text{for}\quad (1\leq j\leq n-1). \tag{23}$$

により求められることに注意する。すると，例えばtype $(n,r,2)$ のモノドロミーは，縮退する固有値

$$\sigma=\sigma_j=\exp\left(4\pi i\sqrt{\frac{(r+1)^2n-(3r-1)^2}{n-1}}\right)\qquad \text{for}\quad (1\leq j\leq n-1) \tag{24}$$

の$\sqrt{\frac{(r+1)^2n-(3r-1)^2}{n-1}}$が有理数か無理数によって非共鳴縮退性が判定できるが，表 1 にある補題の列 を証明することによって，type$(n,r,2)$ のモノドロミーの非共鳴縮退性が示される．このような解析により，表 2 に示す n,r,s について，n 自由度のハミルトン力学系 type (n,r,s) の積分不可能性判定は可能と判明した [11]。

表 1: 積分不可能性証明に必要な数論的補題

ハミルトニアンのタイプ	補題
type$(n,2,2)$	$\sqrt{\frac{9n-25}{n-1}}$ は $n>3$ で無理数である。
type$(n,3,2)$	$\sqrt{\frac{n-4}{n-1}}$(r=3) は $n>5$ で無理数である。
type$(n,4,2)$	$\sqrt{\frac{25n-121}{n-1}}$ は $n\neq 5,7,26$ で無理数である。
type$(n,5,2)$	$\sqrt{\frac{9n-49}{n-1}}$ は $n\neq 6,9$ で無理数である。
type$(n,6,2)$	$\sqrt{\frac{49n-289}{n-1}}$ は $n\neq 6,7,11,28$ で無理数である。
type$(n,7,2)$	$\sqrt{\frac{4n-25}{n-1}}$ は $n\neq 8,13$ で無理数である。
type$(n,8,2)$	$\sqrt{\frac{81n-529}{n-1}}$ は $n\neq 9,15$ で無理数である。
type$(n,9,2)$	$\sqrt{\frac{25n-169}{n-1}}$ は $n\neq 10,17$ で無理数である。
type$(n,10,2)$	$\sqrt{\frac{121n-841}{n-1}}$ は $n\neq 11,19$ で無理数である。

表 2: 積分不可能性が証明された対称ハミルトン力学系

記号	条件	ハミルトニアン
type $(n,r,1)$	$3\leq n<\infty, 3\leq r\leq n$	$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}p_i^2+\sum_{<i_1,i_2,\cdots,i_r>}^{<n>} q_{i_1}q_{i_2}\cdots q_{i_r}$
type $(n,2,2)$	$4\leq n<\infty$	$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}p_i^2+\frac{1}{2}\sum_{<i_1,i_2>}^{<n>} q_{i_1}^2 q_{i_2}^2$
type $(n,3,2)$	$6\leq n<\infty$	$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}p_i^2+\frac{1}{2}\sum_{<i_1,i_2,i_3>}^{<n>} q_{i_1}^2 q_{i_2}^2 q_{i_3}^2$
type $(n,4,2)$	$n\neq 5,7,26$	$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}p_i^2+\frac{1}{2}\sum_{<i_1,\cdots,i_4>}^{<n>} q_{i_1}^2\cdots q_{i_4}^2$
type $(n,5,2)$	$n\neq 6,9$	$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}p_i^2+\frac{1}{2}\sum_{<i_1,\cdots i_5>}^{<n>} q_{i_1}^2\cdots q_{i_5}^2$
type $(n,6,2)$	$n\neq 6,7,11,28$	$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}p_i^2+\frac{1}{2}\sum_{<i_1,\cdots i_6>}^{<n>} q_{i_1}^2\cdots q_{i_6}^2$
type $(n,7,2)$	$n\neq 8,13$	$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}p_i^2+\frac{1}{2}\sum_{<i_1,\cdots i_7>}^{<n>} q_{i_1}^2\cdots q_{i_7}^2$
type $(n,8,2)$	$n\neq 9,15$	$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}p_i^2+\frac{1}{2}\sum_{<i_1,\cdots i_8>}^{<n>} q_{i_1}^2\cdots q_{i_8}^2$
type $(n,9,2)$	$n\neq 10,17$	$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}p_i^2+\frac{1}{2}\sum_{<i_1,\cdots i_9>}^{<n>} q_{i_1}^2\cdots q_{i_9}^2$
type $(n,10,2)$	$n\neq 11,19$	$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}p_i^2+\frac{1}{2}\sum_{<i_1,\cdots i_{10}>}^{<n>} q_{i_1}^2\cdots q_{i_{10}}^2$
type $(n,r,2)$	$n\neq r+1, 2r-1, r>10$	$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}p_i^2+\frac{1}{2}\sum_{<i_1,\cdots,i_r>}^{<n>} q_{i_1}^2\cdots q_{i_r}^2$
type (n,r,s)	$s>2, \frac{rs-2}{s-2}<n<\infty, 2\leq r\leq n$	$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}p_i^2+\frac{1}{s}\sum_{<i_1,\cdots,i_r>}^{<n>} q_{i_1}^s q_{i_2}^s\cdots q_{i_r}^s$

4 非線形格子系:決定可能例 II

フェルミ, パスタ, ウラムは, 調和項に 3 次の非線形項が付いたモデル

$$H_{FPU} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \frac{\mu_2}{2}\sum_{i=1}^{n+1}(q_{i-1} - q_i)^2 + \frac{\mu_3}{3}\sum_{i=1}^{n+1}(q_{i-1} - q_i)^3. \tag{25}$$

と調和項に 4 次の非線形項が付いたモデル

$$H_{FPU} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \frac{\mu_2}{2}\sum_{i=1}^{n+1}(q_{i-1} - q_i)^2 + \frac{\mu_4}{4}\sum_{i=1}^{n+1}(q_{i-1} - q_i)^4. \tag{26}$$

調べたが, ここでは変分方程式が対角化できる等の理由により, 後者のモデルの積分不可能性を厳密にどれくらい言えるかについての結果を報告する. まず FPU 格子 (26) の直線解で, パラメータ μ_2, μ_4, n を使って具体的に,

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{\frac{\sqrt{\mu_2^2 + \frac{4\epsilon}{n+1}\mu_4} - \mu_2}{\mu_4}}\, cn(k;\alpha t) \\ q_2 &= 0, q_3 = -q_1, q_4 = 0, q_5 = q_1, \cdots \end{aligned} \tag{27}$$

と書けるものがあること着目する. 但し, ϵは系のエネルギー, $cn(k;t)$ は母数 kのヤコビの cn 楕円関数で, 更に k, αも$\mu_2 > 0, \mu_4 > 0$ の時,

$$0 < k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\epsilon\mu_4}{(n+1)\mu_2^2}}}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{28}$$

$$\alpha = \sqrt{2\sqrt{\mu_2^2 + \frac{4\epsilon}{n+1}\mu_4}} \tag{29}$$

と具体的にシステムのパラメータで記述され得る量である. この時, この直線解のまわりの変分方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{\xi} = -(\gamma_2 + 3\gamma_4 cn^2(k;\alpha t))\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2, \end{bmatrix}\boldsymbol{\xi} \tag{30}$$

$$\gamma_4 = \sqrt{\mu_2^2 + \frac{4\epsilon}{n+1}\mu_4} - \mu_2 \tag{31}$$

で書き表さられるが, 直交変換$\boldsymbol{G} \to \boldsymbol{OGO}^{-1}$によって $n \times n$ 対称行列

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{32}$$

の固有値が, $\{4\sin^2(\frac{j\pi}{2(n+1)})|1\leq j\leq n\}$ によって求められることから, 上記のベクトル型変分方程式 (30) は, n 本の変分方程式

$$\ddot{\xi'}_j+4\mu_2\sin^2(\frac{j\pi}{2(n+1)})(1+\frac{2k^2}{1-2k^2}cn^2(k;\alpha t))\xi_j'=0,\quad j=1,\cdots,n \tag{33}$$

分離できる。この変分方程式は, **ラメ方程式 (Lamé Equations)**[8]

$$\frac{d^2y}{dt^2}-(E_1sn^2(k;\alpha t)+E_2)y=0, \tag{34}$$

とよばれるクラスに入る。この時, (27) の $cn^2(k;\alpha t)$ の極型特異点を周期格子に沿って一周する周期解のモノドロミー行列 g_* の特性指数σは, 次の決定方程式

$$\Delta^2-\Delta-(\alpha^2k^2)E_1=0,\quad \sigma=\exp(2\pi i\Delta) \tag{35}$$

により求めることができ,

$$\begin{aligned}\sigma_j&=\exp(2\pi i\frac{1\pm\sqrt{1+48\sin^2\frac{j\pi}{2(n+1)}}}{2})\\&=-\exp(\pm\pi i\sqrt{25-24\cos(\frac{j\pi}{n+1})})\end{aligned} \tag{36}$$

となる [9]. このモノドロミー g_* の非共鳴性は, 特性乗数の有理数体上一次独立性を円分体上のガロア理論を使って評価することによって示すことができる [12]。このことから, ヂグリン=吉田型の積分不可能性判定条件が使え, FPU 格子 (26) に関し, エネルギーが零に近い ($k\to 0$) ところで解析的な積分がハミルトニアン以外に存在しないことが示された [9].

以上の結果はエネルギーの値に依存するが, 最近, 報告者は Lamé 方程式に対する **Picard-Vessiot 理論**による可解性の知見 [2], また Ziglin 解析で用いられる変分方程式に対する Picard-Vessiot 理論 [6] によりエネルギーの値に依存しない積分不可能性の結果を得た [10]。これは, Lamé 方程式 (34) が次の 3 条件

$$A\equiv E_1\alpha^2k^2=m(m+1),m\in\boldsymbol{N}, \tag{37}$$

$$A=m(m+1),\quad m+\frac{1}{2}\in\boldsymbol{N},\quad \text{Brioschi-Halphen-Crawford 解} \tag{38}$$

$$A=m(m+1),\quad m+\frac{1}{2}\in\frac{1}{3}\boldsymbol{Z}\cup\frac{1}{4}\boldsymbol{Z}\cup\frac{1}{5}\boldsymbol{Z}\setminus\boldsymbol{Z},\quad \text{Baldassarri 解} \tag{39}$$

のいずれの場合も満足しない時, 変分方程式の直交成分を Lamé 方程式とする自由度 2 のハミルトン力学系の積分不可能性が示されるという Morales と Simo の結果 [6] があるので, 元の系の Lamé 方程式 (33) のパラメータが

$$A=E_1\alpha^2k^2=12\sin^2(\frac{j\pi}{2(n+1)})=6(1-\cos(\frac{j\pi}{n+1})). \tag{40}$$

のように求められ, かつ $j\notin\{\frac{n+1}{3},\frac{n+1}{2},\frac{2(n+1)}{3}\}$ の時に限り $\cos(\frac{j\pi}{n+1})\notin\boldsymbol{Q}$ であり, A が有理数であっても m が

$$m(m+1)=3\to m=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\notin\boldsymbol{Q},\quad m(m+1)=9\to m=\frac{-1\pm\sqrt{37}}{2}\notin\boldsymbol{Q} \tag{41}$$

の様に無理数であることからいずれのラメ方程式も上の **3** 条件を満足しないことを実際に証明することによって可能となる. 以上の解析は, 現在 6 次以上の非線形項を持ったモデルにたいしてもヤコビの楕円関数を **超楕円関数** に, ラメ方程式を **超ラメ方程式**に拡張することによってより応用範囲を広げつつある。

5　重力多体系:決定可能性が不明な例

以上の多自由度ハミルトン系の積分不可能性の結果より, n 体問題の n 依存性をよく反映し, かつ解析を容易たらしめる変分対称性を持つ特別解 (例えば平面上の n 体問題の正多角形解 [7]) をうまく見つけてくることができれば, 任意 の $n(n \geq 3)$ に対し, n 体問題は解けないという我々の信念の裏付可能と予想できるが, 任意の質量分布を与えた時の n 体問題の積分可能性判定を考えた場合, 非決定であるという予想 [1] もあり, 重力多体系の積分不可能性は (強く予想されるにもかかわらず), 決定可能か否かが不明であると言えよう。

6　力学系におけるフレーム問題

さて以上見てきた決定可能例, 決定可能不明例から, この決定可能性の鍵は, (1) 積分不可能性という力学系の複雑さを表す指標がある種の数論的条件に置き換えることが可能であることと (2) その数論的条件が判定可能であることの 2 つにかかっていることが判る。この状況は, 他の力学系の複雑さを示す指標, 例えばバーコフ標準系の収束性などと同じであることを考慮するとある程度一般性があると考えられる。

ここで (1) をうまくクリアーしたと仮定して, この数論的判定問題を Turing の計算機械上の決定問題の計算可能性の問題に焼き直すことができた場合でさえ, 可算無限自由度の力学系に対しては可算無限個の整数決定方程式の解の存在非存在を決定しなければならず, マチャセビッツによりヒルベルト第 10 問題のゲーデル的非決定性が証明されたことから, 一般には積分不可能性は非決定という状況が示唆される (ただし完全にこの非決定性が示された訳ではない。) このことからパターン=個々の力学系, パターン認識=積分不可能性判定, パターンの背景=我々の数学的知見と対応させると, 人工知能におけるフレーム問題的状況が浮かびあがる。それで"力学系におけるフレーム問題"とここで呼ぶことにするが, これでこの問題解決への進歩がある訳では無い。むしろこの力学系の積分不可能性判定問題の泥沼的状況を強調したいのである。

他のアプローチとしては, 力学系の複雑さの尺度としての積分不可能性を判定するのなら, 力学系に適した計算可能性を扱わなければいけないというものがある。これには, 例えば実数上の計算理論 [3] 等があるが, いずれも積分不可能性判定の問題においては無力であるので報告者は, 系のエントロピー

$$I = \int dpdqf(p,q)\ln f(p,q) \tag{42}$$

(但し,$f(p,q)$ は $2n$ 次元の位相空間 (q,p) 上の分布関数) を不変とする [4] 正準変換のみから構成される計算機械 (Canonical Computing Machines) の計算理論ができる必要があり, その時, 計算可能性と積分可能性という 2 つの概念はその正準変換からなる計算過程としての力学系のシミュレーション可能性という 1 つの概念になることでこの問題に対する見通しが良くなるのではないかと考えている。

参考文献

[1] V.I. Arnold, private communication at *NATO ASI 3DHAM* meeting.

[2] F. Baldassarri, "On algebraic solutions of Lamé differential equation", *J. Diff. Eq.***41**(1981)44-58.

[3] L. Blum, M. Shub, and S. Smale, "On a theory of computation and complexity over the real numbers; NP-completeness, recursive functions and universal machines", *Bul. AMS***21** (1989)1–46.

[4] J.W. Gibbs, *Collected Papers*(New York: Longmans, Green and Co., 1928), p. 154

[5] V. V. Kozlov, *Symmetries, Topology, and Resonances in Hamiltonian Mechanics*, Springer-Verlag,1996.

[6] J.J. Morales and C. Simó, "Picard-Vessiot theory and Ziglin's theorem", *J. Diff. Eq.* **104**(1994)140-162.

[7] L.M. Perko and E.L. Walter, "Regular polygon solutions of the N-body problem ",*Proceedings of the American Mathematical Society***94**(1985), p.p.301–309.

[8] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, (Cambridge Univ. Press, London/New York, 1969).

[9] K. Umeno,"Non-perturbative non-integrability of non-homogeneous nonlinear lattices induced by non-resonance hypothesis", to appear *Physica D* (1996)

[10] K. Umeno, "Singularity analysis towards nonintegrability of nonhomogeneous nonlinear lattices", submitted to *Proc. of NATO ASI Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom*(S'Agaró(Catalunya, Spain), 1995) (Kluwer Academic Publisher)

[11] K. Umeno, "Nonintegrable character of Hamiltonian systems with global and symmetric coupling" *Physica D* **82**(1995), p.p.11–35.

[12] K. Umeno, "Galois extensions in Kowalevski exponents and nonintegrability of nonlinear lattices", *Physics Letters A* **190**(1994), p.p.85–89.

[13] 梅野 健, "積分不可能性判定条件", 数理科学 No.**384**(1995), p.p.30–36.

[14] H. Yoshida, "A criterion for the non-existence of an additional integral in Hamiltonian systems with a homogeneous potential", *Physica D***29**(1987), p.p.128-142.

[15] H. Yoshida, "A criterion for the non-existence of an additioanl analytic integral in Hamiltonian systems with n degrees of freedom", *Phyiscs Letters A* **141**(1989), p.p.108–112.

[16] S.L. Ziglin, "Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics. *Funct. Anal. Appl.***16**,p.p.181–189; **17**,p.p.6–17.