テューリング機械計算論と力学系との関係

東大教養　斉藤 朝輝　金子 邦彦

saito@complex.c.u-tokyo.ac.jp

1　動機、目標、手法

情報処理を理解したいというのが、この研究を始めた動機である。そもそも情報や情報処理という言葉自体、明確に定義されたものではない。情報や情報処理という言葉を聞いて思い描くものは、人によっても様々である。しかしそうは言っても、皆、漠然と情報や情報処理というものが存在すると思ってるのであり、また同じようなものを情報や情報処理だと認識している。例えば情報処理を行なっていると考えられる系(システム)として次の様なものが挙げられる。テューリング機械、ニューラルネット、セルオートマトン、……、生物(脳など)。この様な系を情報処理系という言葉でまとめてしまえる何ものかを、もう少しはっきりと理解したい。

ところで、ある系を理解するときの強力な方法として、その系の時間発展の仕方、つまり力学法則を理解することが挙げられる。その様な力学的取り扱いによって情報処理系を理解することを考える。

ここで、情報処理を理解するための新しい方向として、以下の様なものが考えられる。情報処理を力学的に取り扱うことによって、別の言葉で言えば、処理系を力学系であると意識して捉える力学的視点から眺めることによって、力学系の持つ豊富なイメージを活用しつつ、従来からある情報処理の新しい理解を目指す方向である。また、同様に、処理系を力学的対象という同じ範疇の中で捉えることによって、処理系同士を比較して相対的に理解するという方向である。この様な方向で、情報処理を理解していきたい。また、副次的ではあるが、この方向で処理系を詳しく調べることによって、力学系自体についても新しい知識が得られるかもしれない。よって、これにも注目していきたい。

情報処理を力学的視点から眺める、その初めとしてテューリング機械計算論を選ぶことにする。もちろんテューリング機械計算論においては、テューリング機械が行なう情報処理の原理、やり方が明確に定義されているので扱いやすい。さらにテューリング機械計算論の利点としては、テューリング機械の計算は、入力に対して出力を返すといったinput-output型の計算であるために、力学的な取り扱いが容易である点が挙げられる。実際にテューリング機械は区分的に線形な2次元写像と等価であることがMooreのgeneralized shiftによって示されてもいる。この様にテューリング機械計算論は、他の情報処理系と比較して、力学的に取り扱いやすい。よって、情報処理系を力学的視点から眺める、その初めとして最も適当だと考えられる。

テューリング機械計算論自体は、かなり完成された体系である。しかしながら、その体系の中で扱われている概念などには直観的に理解しにくいものも多い。また、かなり閉じた体系であるために、その他の情報処理との関係も考えにくくなっている。テューリング機械計算論を対象とした今回の研究の目標として、テューリング機械を力学的視点から眺めることによっ

て、テューリング機械計算論の持つ力学的性質を明らかにする。そうすることによって直観的に分かりにくい概念などにも力学的な意味づけを加える。そのようなことを積み重ねてテューリング機械計算論の新しい理解を進める。他の処理系との比較が可能になるようにする。さらに他の情報処理を理解することを目指したい。

そこで、テューリング機械を力学的に取り扱うことを考えるのだが、その取り扱いについてのヒントを与えてくれるものとして、カオス散乱を考えてみる。カオス散乱において、入射する粒子を何らかの入力、そしてその粒子が最終的にとる状態(例えば、どの角度で散乱されるかや、ポテンシャルの山の間に留まるかなど)を出力と考えると、このカオス散乱は、我々の持つ input-output 型の計算のイメージにかなり近いものとなる。

テューリング機械計算論との間に対応をつければ次の様なものになる。

$$
\begin{aligned}
\text{停止状態} &\leftrightarrow attractor \\
\text{停止する入力の集合} &\leftrightarrow basin \\
\text{停止しない入力の集合} &\leftrightarrow invariant\ set \\
\text{計算時間} &\leftrightarrow lifetime\ of\ transient \\
\text{計算} &\leftrightarrow transient
\end{aligned}
$$

今後はこの様な視点から、テューリング機械計算論を力学的に取り扱うことにする。

上に示した対応の様にテューリング機械を力学系として捉えることによって、非線形の力学系に対して使われる実験的な手法を用いて、テューリング機械計算論を扱うことを考えることができるのである。今までの厳密なテューリング機械計算論の枠組では出て来なかった様な、新しい理解を目指す。

2 計算時間

テューリング機械計算論では入力を与えたときに計算が終るまでにかかる時間、つまり停止するまで要する計算時間に関心がある。(例えば NP 完全問題など。) 本章では主に万能テューリング機械の停止問題に関心があるので、例えば、ある入力を万能テューリング機械に与えた時に停止するかしないか。停止するとしても、どれくらいの時間で停止するかに関心がある。

一方で、停止する入力集合を空間(平面)上に code すると無限に異なった微細構造が続く図形になることが分かっている。これはテューリング機械と等価な区分的に線形な写像の basin である。一般に chaotic な力学系で Cantor set 的な basin を持つものは、 attractor に引き込まれるまでの transient の長さの分布をとれば、それは指数関数的に減衰していく。力学系からの関心のある点としては、 Cantor set 的ではない、無限に異なった微細構造が続く今の場合に transient の長さの分布をとったときに、それが Cantor set をつくる分布と異なったものになっているかどうかということである。もし異なっていれば、それは transient の長さの分布という面からも、 Cantor set をつくる作り方とは異なった作り方をしていることが分かる。

Minsky の万能テューリング機械と Watanabe の万能テューリング機械で、停止するまでの計算時間の分布をシミュレーションによって実際に求めた結果、計算時間の分布の減衰する速度が計算時間が長くなるとともに初めは指数的に減衰していたのが、だんだんベキ的に緩やかになっていくことが分かる。

計算時間の分布を求めることは、Chaitin number Ωを見積もることに相当する。Chaitin number ΩはChaitinによって万能チューリング機械で停止する入力の割合として定義された、決定不能な数である。そのΩの決定不能性は、計算可能だとすると矛盾が起きるという背理法を使って証明されている。計算時間の分布を用いてΩを見積もるためには、計算時間の分布を積分してやればよい。

ここでもし、この計算時間の分布(関数)が、十分大きな計算時間では、積分が計算可能なある関数でおさえられる(上限をもつ)とする。すると、その計算可能性からΩを任意の精度で求める事ができてしまい、矛盾する。よって、計算時間の分布は積分が計算可能な関数でおさえられない。その一方で、この計算時間の分布を積分した数値(Ω)は、停止する入力の割合である以上、0から1の間の値をとらなければならない。計算時間の分布は少なくともこの2つの条件を満たさなければならない。

ところで、計算時間の分布は、実際に見てみた範囲内では、かなりなめらかな関数になっている。計算時間の分布が十分大きな計算時間でも、このままかなりなめらかな関数になっているとすれば、上の2つの条件を満たす1つのケースとして、計算時間の分布の減衰する速度が計算時間が長くなるとともに指数的な減衰からベキ的な減衰へ、また高次のベキから低次のベキへと緩やかになっていき、最終的に1次のベキ的な減衰へと近づいていくケースが考えられる。

理論的に厳密なΩの値は求められないのだが、計算時間の分布を用いて数値的にΩを見積もることを考えたとする。もちろん、上の考察から、計算時間の分布の無限遠での振舞を、例えば指数関数的に減衰している等と見積もることによってΩを求めることは、原理的に不可能なのは明らかである。よって、Ωを見積もるためには実際に計算を実行するしかない。ところが上に挙げたようなケースでは、分布の減衰が緩やかになっていくために、Ωを数値的に見積もることは困難でできない。もちろん少しでもシミュレーションをやればΩの値の下限を上げることはできる。(上限についても、停止しないことが明らかな場合を探すことによって下げることができるだろう。)しかし、この上限と下限の間の幅を縮めようとしても、分布の減衰が緩やかになっていくために困難でできない。

Ωの決定不能性は背理法を使って証明されているが、これには直観的なイメージが全く伴わない。この様な計算時間の分布は、Ωの決定不能性に直観的な説明を与えていると考えられる。

今までのところ、計算時間の分布の減衰する速度が指数的な減衰からベキ的な減衰に緩やかになっていく事は言えるが、高次のベキから低次のベキへと緩やかになっていくとまでは言えない。しかし、おそらく計算時間をさらに長くとれば、高次のベキから低次のベキへと緩やかになっていく現象がみえれると予想できる。

力学系としての関心としていえば、attractorに引き込まれるまでのtransientの長さの分布が、先に説明したような形でだんだん緩やかになっていくというのは特殊である。また、自己相似なbasin(Cantor setなど)を作るtransientの長さの分布は、一般的に指数関数的になるのだが、無限に異なった微細構造が続くbasinを作るtransientの長さの分布は、この様になっていた。このようなbasinになるためには、このような分布になることが必要なのかもしれない。区分的に線形な2次元写像の中には、以上の性質を持つものが存在することが分かる。

References

[1] J.E.Hopcroft,J.D.Ulman, オートマトン 言語理論 計算論 I,II, サイエンス社 (1984)

[2] Cristopher Moore,Unpredictability and undecidability in dynamical systems, Phys.Rev.Lett.vol.64 no.20(1990)

[3] Cristopher Moore,Generalized shifts: unpredictability and undecidability in dynamical systems,Nonlinearity 4(1991) 199-230.

[4] Edward Ott,Chaos in dynamical systems,Cambridge University Press(1993)

[5] M.L.Minsky, 計算機の数学的理論, 近代科学社 (1970)

[6] G.J.Chaitin,Algorithmic Information Theory,J.Assoc.Comput.Mach.22 329; IBM J.Res.Develop.21 350,496(1977)

[7] 渡辺茂, チューリング機械, 数理科学,No.98(1971)