

不規則系の示すスケーリング特性— 数値計算を中心として

上智大学理工学部物理 大槻東巳

1. 不規則系は規則的

一般に伝導体は完全な結晶をつくっておらず、多かれ、少なかれ格子欠陥や不純物などによる不規則ポテンシャルを含んでいる。こうした不規則系の研究の重要性は以前から認識されていたが [1, 2]、解析的な取り扱いが困難なため 1970 年代後半まで定量的な議論が十分できなかった。しかしながら 1979 年に提案されたスケーリング理論で状況は一変し [3, 4]、ダイアグラム法による解析や [5, 6] 数値計算により [7]、アンダーソン局在を定量的に議論できるようになった。これによりランダム系の物理量は決してサンプルごとにばらばらの性質を示すのではなく、独特のユニバーサルな性質を示すことが明らかになった。

例として、電子がスピンを反転する散乱を受けていないような 2 次元電子系を考えよう。不規則ポテンシャルがあまり強くない場合、電気伝導度 σ に対する温度、および磁場の量子補正項は

$$\Delta\sigma = \begin{cases} \frac{e^2}{2\pi^2\hbar} p \log T \\ \frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \log H \end{cases} \quad (1)$$

で与えられる [8]。ここで p は非弾性散乱時間 τ_1 の低温での温度依存性 $\tau_1 \propto T^{-p}$ から決まる量で 1 程度である。通常、温度、磁場を大きくすると散乱の頻度が増え、伝導度は小さくなると予想されるが、上記の結果は温度、磁場によって電流がかえって流れやすくなることを意味する。これは電流を流しにくくする、不規則ポテンシャルによる散乱の干渉効果が、磁場や温度によって壊されるからである。 $\log T$ 、 $\log H$ の前の係数は基本定数のみで決まっていることから、このような性質が非常にユニバーサルなものであることがわかる [4, 5, 6, 8]。

また、マクロとミクロの中間のいわゆるメソスコピックな系のコンダクタンスを磁場や電子密度 (実際にはゲート電圧) の関数として測定すると、コンダクタンスの絶対値によらず e^2/h 程度のゆらぎが観測される。この現象は 1980 年代中頃に発見され、以後 universal conductance fluctuation (UCF) として知られるようになった [9]。これら二つの例が示すように、一見不規則で無関係に見える系も多くの共通の性質を示すことが知られている。

それではすべての伝導体は同じ性質を示すのであろうか? こうした系を分類するのに重要な役割を果たすのが対称性による分類である。対称性という用語に浮かぶのが空間対称性であるが、ランダム系なのでこのような対称性はない。そこで時間反転操作による分類を考えよう。系に磁場がかかっていると電子は一定の向きにサイクロトロン運動し、逆向きには回れない。磁場中では時間反転対称性が破れているのである。こうしたハミルトニアン行列の集合 E_U は、あらゆるユニタリ行列 U に対して $U^{-1}E_U U$ という変換をしても不変である。これは unitary ユニバーサリティクラスと名付けられている。時間反転対称性が破れていない系は、さらにスピン-軌道相互作用によるスピン反転過程が存在しない系と存在する系に分類でき、それぞれ orthogonal、symplectic ユニバーサリティクラスと命名されている。(1) 式で表される伝導度の補正項や、UCF の値もこれらの対称性により決まっている。磁気抵抗が $\frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \log H$ となるのは orthogonal の場合で、symplectic の場合、 $-\frac{e^2}{4\pi^2\hbar} \log H$ となる。

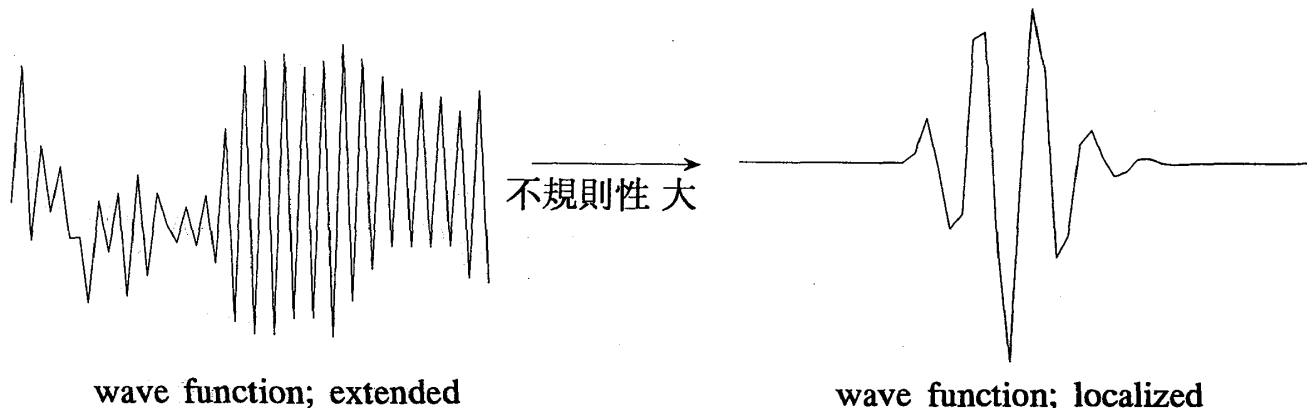


図1: 不規則系での波動関数。不規則ポテンシャルが強くなると、波動関数は空間的に局在し電流が運べなくなり、系は絶縁体へとアンダーソン転移する

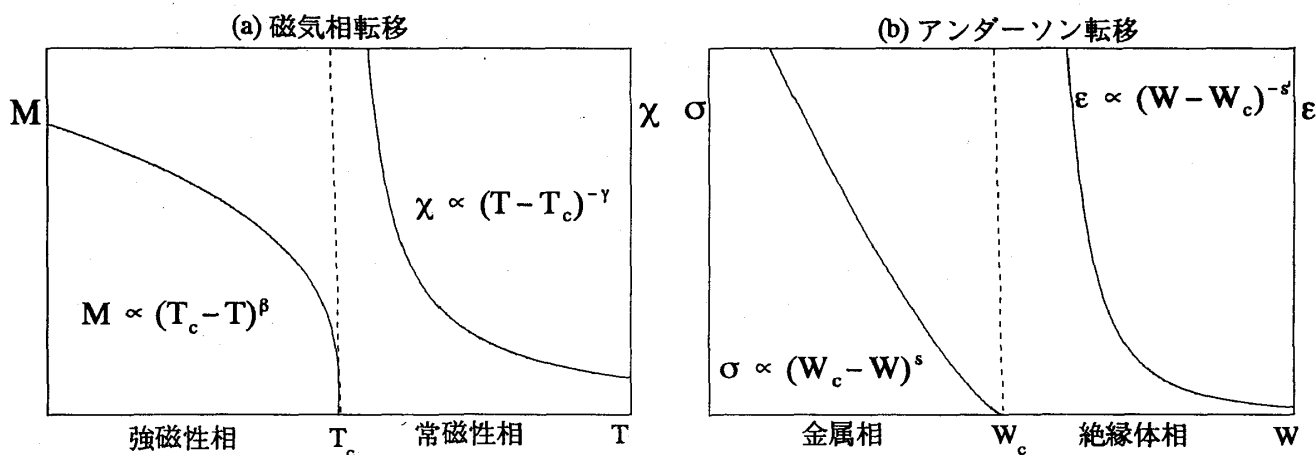


図2: 磁気相転移 (a)、及びアンダーソン転移 (b) 付近における物理量の振る舞い

このように金属的な電気伝導に関係した物理量は、ユニバーサルな振る舞いを示すことがわかっている。さらにランダムネスが増えると、系の波動関数は図1のように広がったものから局在したものへと変化し、電流がもはや運べなくなり系は絶縁体へと転移する。この金属-絶縁体転移がアンダーソン転移である。このアンダーソン転移付近では物理量はどのような振る舞いを示すのであろう？

試みに、強磁性体と常磁性体間の磁気相転移と、アンダーソン転移を比較してみる(図2)。磁気相転移の場合、温度 T を低温側(強磁性相)から転移温度 T_c に向けてあげていくと自発磁化 M が消失し、高温側(常磁性相)から近づくと帯磁率 χ が発散する。アンダーソン転移では強磁性相に対応するのが金属相で、自発磁化に相当するのが電気伝導度 σ 、不規則性を特徴づけるパラメータ W が温度にあたる。 W が大きくなると、転移点 W_c で系が絶縁体に転移し電気伝導度 σ が消失する。常磁性相には絶縁体相に対応し、転移点での静的誘電率 ϵ の発散が帯磁率の発散に相当する。

磁性体の相転移を特徴づけるのに精力的に議論されたのが臨界指数である。そこでアンダーソン転移における臨界指数を定義しよう。電子の波動関数は距離 ξ 程度の相関をもっているとする。この相関長 ξ は、絶縁体相では局在長 ξ_{loc} を意味し、金属相では波動関数がたまたま平均的な振幅からずれているとき、このずれが消失する距離 ξ_{ext} を表している。相転移点では相関長が発散している

と考えられるので、臨界指数 ν を

$$\xi \sim |W - W_c|^{-\nu} \quad (2)$$

から定義できる。また誘電率 ϵ の発散や電気伝導度 σ の消失を特徴づける臨界指数は、それぞれ

$$\epsilon \sim (W - W_c)^{-s'}, \quad (3)$$

$$\sigma \sim (W_c - W)^s \quad (4)$$

で定義される。磁気相転移では臨界指数が系のミクロな構造によらず、系の基本的な対称性に応じたユニバーサルをとった。アンダーソン転移でもこのようなユニバーサリティがみられるか、以下、数値計算を中心に紹介する。

2. 数値スケールリング法

アンダーソン転移は1体問題の範囲で議論できるので、比較的大きな系を数値計算で議論でき、基本的には行列の計算をすればよいのでプログラムがベクトル化しやすく高速に計算できる。単純に考えると数値計算によってかなりのことはわかりそうである。しかしながら、アンダーソン転移は一般には2次元以上で生ずるので、大きなサイズと言っても限りがあり、実際のマクロな系を議論するのは、何か工夫をしない限り難しい。こうした場合に用いられるのが数値スケールリング法である。

アンダーソン転移を特徴づける量として、無限系において転移の前後で値が不連続に変わるような無次元化した物理量 h を考える。系を特徴づける長さとしては、電子のフェルミ波長、不規則ポテンシャルの間隔、平均自由行程、相関長 ξ などが考えられるが、転移点付近では ξ がもっとも大きく、アンダーソン転移に関係した物理量は相関長 ξ とサイズ L との比で決まっているであろう。そこで h は、ある関数 $f(x)$ を用いて

$$h(L) = f(\xi/L) \quad (5)$$

と表されると仮定しよう。このような仮定をおくことにより、有限の系での計算からかなり多くのことがわかるのである。

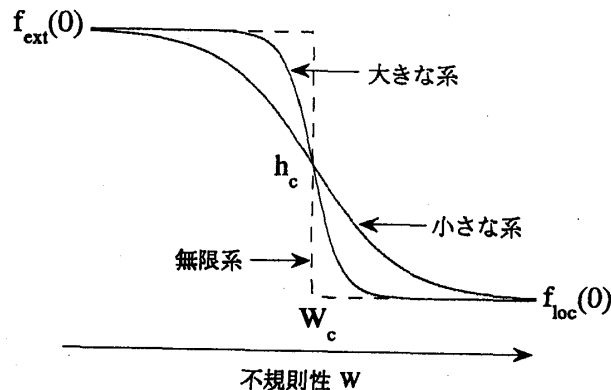


図3: アンダーソン転移を特徴づける無次元物理量 h の不規則性 W への依存性。転移点付近ではサイズ L が大きくなるほど鋭く変化する

関数 f は実際には2価で絶縁体相では f_{loc} 、金属相では f_{ext} となっている。無限系では h は $f_{loc}(0)$ という値から、 $f_{ext}(0)$ という値へとアンダーソン転移点で不連続にジャンプする(図3)。 L が有限の系では、絶縁体相といえども波動関数は完全には局在しておらず、系の端でも $\exp(-L/\xi_{loc})$ 程度の振幅をもってしまい、電気伝導度は0にならない。つまり金属と絶縁体の区別が有限系では曖昧なのである。よって f_{loc} と f_{ext} は有限系では連続になめらかにつながっていると考えられる。

さて、不規則性を表す W の関数として h を見ると、サイズ L の系で h を計算したとしよう。有限系の場合、 $h(L, W)$ の W 依存性は特異な振る舞いを示さないの、転移点 W_c 付近で $h(L, W)$ をテイラー展開し、

$$h(L, W) = h_c + f_1(L)(W - W_c) + \dots \quad (6)$$

を得る。(5) より W は $L/\xi(W)$ という形でしか $h(L, W)$ に寄与しないので、(2) を用いて

$$h(L, W) = h_c + aL^{1/\nu}(W - W_c) + \dots \quad (7)$$

となる。これより様々なサイズにおいて、 $h(L, W)$ を W の関数として計算するとこれらがすべて W_c という一点で交わり、そこでの傾き $\sim L^{1/\nu}$ から ν を評価できることがわかる。 h_c は転移点での h の値で、(5) 式よりサイズに依存しない普遍的な値であることがわかる。また、 $h \gtrless h_c$ を調べることで、系が金属相、絶縁体相どちらに属しているか、判別することができる。

以上の考えに基づき orthogonal な系でのアンダーソン転移を定量的に議論したのが MacKinnon と Kramer である [7, 10]。彼らは $M \times M$ の断面を持った、長さ L のバーにおける Green 関数 $G(L)$ を反復法で計算した。こうした系を伝搬する電子は、 $M \times M$ の断面に閉じこめられているので不純物ポテンシャルにより必ず後方散乱を受け、十分長い L に対して $G(L)$ は

$$|G(L)| \sim \exp\left(-\frac{L}{\xi_M}\right) \quad (8)$$

というように、崩壊長 ξ_M で減衰する。ランダムな擬1次元系での Green 関数は必ず減衰し、 $1/\xi_M$ は self-averaging であることが数学的に保証されているので [11]、 ξ_M は正確に計算できる。一般に M が大きくなると、不規則ポテンシャルを避けて電子が伝搬できるようになるので ξ_M は M とともに増加する。MacKinnon と Kramer が目を付けたのはその増加の仕方である。彼らはスケーリング関係式 (5) を念頭におき無次元量

$$\Lambda(M) := \frac{\xi_M}{M} \quad (9)$$

を定義した。十分大きな系では絶縁体相での電子の波動関数は局在しているので、 ξ_M は有限の値で飽和し、 $\Lambda(M)$ は M の減少関数となるであろう。逆に ξ_M が M よりも早く大きくならなければ、有限の伝導度が得られないので、金属相では $\Lambda(M)$ は増加関数である。さらに、転移点直上では $\Lambda(M)$ は Λ_c というサイズに依存しない値を取る。こうして $\Lambda(M)$ が先程述べた一般論での h に相当することがわかる。

上記の議論を unitary ユニバーサリティクラスに属する、磁場中の3次元不規則電子系を記述するハミルトニアン、

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle} e^{i\theta_{i,j}} a_i^\dagger a_j + \sum_i V_i a_i^\dagger a_i \quad (10)$$

に応用した結果を紹介しよう [12]。簡単のため、格子は格子定数 a の単純立方格子とし、ホッピングは最近接格子間のみを生じるとしよう。サイト上のエネルギー V_i が $-\frac{W}{2}$ から $\frac{W}{2}$ の間の一様乱数になっているとして、不規則性を導入する。 $\theta_{i,j}$ は磁場によるアハラノフ-ボーム位相を表し、磁場の大きさは、磁場に垂直な $x-y$ 面内の単位格子を貫く磁束と磁束量子 $\phi_0 = hc/|e|$ との比、

$$\tilde{\phi} := \frac{Ba^2}{\phi_0} \quad (11)$$

で特徴づけられる。このモデルで転移点 W_c 、臨界指数 ν 、及び Λ_c を計算し、これが磁場にどのように依存するかみてみる。

まずこのスケーリング理論の大前提である(5)式を $\Lambda(M)$ が本当に満たすかどうか、確かめてみる。図4に様々なサイズ、磁場、不規則性のもとで $\Lambda(M)$ を計算し、 ξ をうまく選んで、 ξ/M の関数としてプロットしたものを示す。するとすべてのデータが一つの曲線にのっていることがみとれる。 Λ_c を境に、上の分岐が金属相、下が絶縁体相となっている。こうしてスケーリング則が確かに成立していることが数値的に確かめられる。

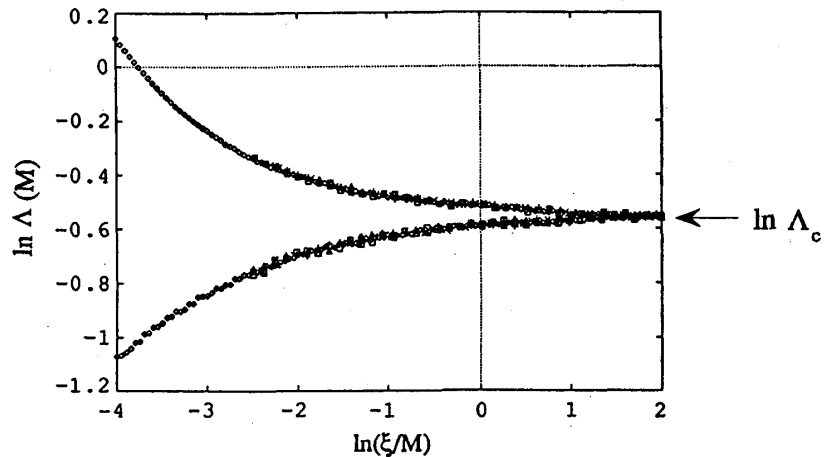


図4: $\Lambda(M)$ と ξ/M の両対数プロット。不規則性の強さ W/t は17.0から19.0の範囲で、 M は5から10の間で変え、また磁場の強さ $\tilde{\phi}$ は0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4としている。 ξ をうまく選ぶことにより、すべてのデータが一つの曲線にのることがわかる。 M が大きくなると増加する上の分岐が金属相で、逆に減少する下の分岐が絶縁体相である。文献[12]による

次に(7)を用いて臨界指数 ν と Λ_c を評価したのが表である。表から明らかなように W_c は磁場 $\tilde{\phi}$ に依存しているが、 ν 、 Λ_c は誤差の範囲で一致している。アンダーソン転移点付近での局在長の発散の仕方は、磁場の大きさには依存しない値となっている。

表: 転移点 W_c 、 Λ_c 、及び臨界指数 ν の磁場依存性。

$\tilde{\phi}$	0.05	0.1	0.2	0.4
W_c/t	17.67 ± 0.14	17.81 ± 0.12	18.06 ± 0.13	17.93 ± 0.15
Λ_c	0.57 ± 0.01	0.58 ± 0.01	0.59 ± 0.01	0.58 ± 0.01
ν	1.28 ± 0.15	1.33 ± 0.18	1.36 ± 0.15	1.38 ± 0.17

磁場をかけた系での臨界指数 ν は他のモデルでも計算されてる。応用上面白いものとして、例えば強磁場中の2次元電子系を層状に重ね、層間にホッピングを許すことにより3次元方向の運動もとり入れたモデルがある[13, 14]。このような系でも同様の方法で臨界指数 ν は1.3程度であると評価されている[15, 16]。

磁場がかかっていないときのアンダーソン転移の臨界指数は以前から1.3-1.5と見積もられており、 Λ_c は 0.59 ± 0.01 と評価されている[7, 10]。磁場がかかっている系とかがかかっていない系では系の対称性が異なるので、二つの系での臨界指数は一般には異なる値をとると予想されるが、実際の計算結果は誤差の範囲で一致している。最近、スピン-軌道相互作用が強い symplectic な系でも臨界指数 ν が 1.3 ± 0.2 となることがわかった[17]。これが単なる偶然の一致なのか、何か理由があるのかは現在のところ明らかではない。

アンダーソン局在の問題を非線形シグマモデルに帰着させ [18, 19]、摂動計算を高次まで行う方法がある [20, 21]。この方法で得られる臨界指数の漸近展開は、うまくパダ近似等を行わないと臨界指数に対する不等式 [22]、

$$\nu \geq 2/d \quad (12)$$

をやぶってしまうという問題点がある。非線形シグマモデルを、摂動計算でなくモンテカルロシミュレーションで解析した研究によると、臨界指数は 1.1 程度であり、数値スケールリング法の結果とほぼ同程度の値が得られている [23]。

3. 転移点におけるスケール不変性

転移点直上では、局在長およびコヒーレンス長が発散しており、系を特徴づける長さのスケールが存在しない。そのため様々な興味深い現象がみられる。ランダムな系での固有エネルギーの分布、即ち準位統計 [24, 25] を例にとろう。

まず、転移点での準位統計が定義できるかどうか考えてみる。相関長 ξ より系の大きさ L が小さければ、その系は十分臨界点に近い、いわゆる臨界領域にあると思ってよい。局在長 ξ は転移点近傍で、 $\xi \sim |E - E_c|^{-\nu}$ で発散する。 $\delta E \sim L^{-d/2}$ とし、 $|E - E_c| < \delta E$ というエネルギー領域を考えると、このエネルギー領域で相関長は、前出の不等式 $\nu \geq 2/d$ より

$$\xi \sim |E - E_c|^{-\nu} > L^{d\nu/2} \geq L \quad (13)$$

となるので、 E は必ず臨界領域にあることがわかる。すると、この臨界領域にあるエネルギー準位の数 N_c は、エネルギー準位の平均間隔を $\Delta (\propto L^{-d})$ とすると、

$$N_c \propto \delta E / \Delta \propto L^{d/2} \quad (14)$$

と見積もることができる。このことから、熱力学的極限 ($L \rightarrow \infty$) においては、臨界領域のエネルギー準位の数を十分大きくとることができることがわかり、転移点における準位統計というものが意味をもつことがわかる。

前節で述べたように絶縁体相では固有値がポアソン分布になっており、金属相では Wigner-Dyson 分布が実現している。転移点上では、Wigner-Dyson 分布とは異なる転移点特有の第 3 の分布関数を実現している可能性がある。実際、そのような第 3 の統計、いわゆる臨界準位統計が存在し、系のスケールによらないユニバーサルな性質を示すことが、数値計算によりいくつかの場合について示されている [26, 27, 28, 29, 30]。このような転移点上のスケール不変な準位統計は、アンダーソン転移における他の臨界現象とも密接に関係している可能性があり [31, 32]、その詳しい解析が現在盛んに行われている [33]。

上で触れた様に、転移点直上では系のミクロな構造に依らないスケール不変な振舞いが見られる。その一つとしてよく研究されているのが、波動関数のフラクタル構造である。転移点における波動関数のフラクタル性については量子ホール系 [34] や orthogonal な 3 次元系 [35] などにおいて盛んに議論されてきた [36]。

ここでは、波動関数のフラクタル性が電子の拡散の様子にどのように現れるかを見てみよう。2 次元系において、時刻 $t = 0$ で局在していた波束がランダムポテンシャル中を拡散していく現象を考える。時刻 t での波動関数 $|\psi(t)\rangle$ はハミルトニアン H と初期状態 $|\psi(0)\rangle$ を用いて

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt/\hbar)|\psi(0)\rangle \quad (15)$$

で与えられる。ここで、時刻 t での波動関数 $|\psi(t)\rangle$ と初期状態 $|\psi(0)\rangle$ との重なり

$$C(t) = \frac{1}{t} \int_0^t dt' |\langle \psi(t') | \psi(0) \rangle|^2 \quad (16)$$

を考えてみよう。初期状態として空間的に局在している状態を考えているので、この量は電子の再帰確率 (return probability) を時間平均したような量である。

電子の拡散が金属相のように拡散方程式で記述される場合、拡散半径は \sqrt{t} に比例し波束の拡がりは $t^{d/2}$ に比例することから $C(t)$ の漸近的振舞いは $C(t) \sim t^{-d/2}$ となることが予想される。しかし、波動関数やエネルギー準位にフラクタル構造が存在する場合には、この指数が系のフラクタル構造を反映して、 $d/2$ からずれることがわかっている [37]。つまり半径が r であっても波束のしめる体積が r^d にならないのである。

波動関数のフラクタル次元 D_2 は転移点での波動関数の密度相関の代数的減衰 η

$$\langle |\psi(0)|^2 |\psi(r)|^2 \rangle \propto r^{-2\eta} \quad (17)$$

を表す指数 η と

$$D_2 = d - 2\eta \quad (18)$$

という関係で結ばれている。一方、2次元系では、臨界点でのスケール不変性に基づく議論により、再帰確率の減衰の巾 κ ($C(t) \propto t^{-\kappa}$) は、密度相関の巾 η と $\kappa = 1 - \eta$ と関連づけられることがわかる [38, 39]。したがって、2次元系の転移点直上では、再帰確率の漸近的振舞いは

$$C(t) \propto t^{-D_2/2} \quad (19)$$

となり、通常の拡散方程式から予測される巾よりもゆっくり減衰することになる [40]。これは半径 \sqrt{t} で拡がっている波束のしめる体積が、フラクタル構造のために $t^{D_2/2}$ となっていると考えれば理解できるであろう。実際、量子ホール系やスピン-軌道相互作用のあるランダムな2次元系において $\kappa = D_2/2$ という関係は数値計算によって確認されている。たとえば、量子ホール系では、フラクタル次元 $D_2 = 1.62 \pm 0.02$ [39] に対し、指数 $\kappa = 0.81 \pm 0.02$ [39] と評価されており、またスピン-軌道相互作用の強い2次元系においても、 $D_2 = 1.66 \pm 0.05$ [41] 及び $\kappa = 0.84 \pm 0.03$ [42] と評価されている。特に後者の場合、モデルの詳細をかえても転移点上にいるかぎり κ の値は不変となるという結果が得られており、転移点において、波動関数が模型のマイクロな構造によらないユニバーサルなフラクタル構造をもつことを示唆している。

また、臨界点上における相関関数の共形変換に対する不変性を仮定することにより、擬1次元系におけるGreen関数の規格化された崩壊長 Λ_c (2.1節) と2次元系における波動関数の臨界点でのフラクタル構造とが関係づけられることが予想されている [36, 43, 44]。それによれば、ある近似 [41] のもとで、2次元系における相関関数の代数的減衰の巾 η と、擬1次元系における Λ_c との間に

$$\eta = \frac{1}{\pi\Lambda_c} \quad (20)$$

という関係が成り立つ。このような、2次元での臨界波動関数のフラクタル構造と擬1次元系の波動関数の指数的減衰との関係は、数値的にも量子ホール系およびスピン-軌道相互作用の強い2次元系などにおいて議論されている [40, 41, 44]。

4. パーコレーション理論との比較

不規則性を弱くしていくとあるところから電流が流れ始めるという現象は、パーコレーション理論でも盛んに議論されてきた [45]。パーコレーションとは正方格子などのサイトをランダムに点が占有していったとき、点がある密度に達すると系全体に拡がる点のネットワークができる現象である [45]。点を電流を流すことのできる領域と考えると、これは金属-絶縁体転移を記述することができる。

パーコレーションとアンダーソン転移は密接な関係がある。パーコレーションでも相関長を定義でき、転移点(パーコレーションしきい値)での発散を特徴づける臨界指数を定義できし、伝導度の消失を特徴づける臨界指数、転移点でのフラクタル構造などが議論できる。しかしながら相違点も多い。例えば2次元ではアンダーソン転移は一般には存在しないが、パーコレーション転移は存在する。また3次元系での例えば臨界指数 s はパーコレーションでは2.0と評価されており、アンダーソン転移の理論、および実験と定量的に一致しない。これから逆にアンダーソン転移にはかなり量子効果がきいていることがわかる。

5. 様々な系でのアンダーソン転移

本サブゼミではランダムポテンシャルによって引き起こされるアンダーソン転移が、系のミクロな構造にはよらないユニバーサルな振る舞いを示すことを紹介した。数値計算によると、相関長の発散を特徴づける臨界指数 ν は、3次元系ではモデルや磁場の大きさによらず1.3程度である。この値は磁場がないのときの値と誤差の範囲で一致している。また symplectic な場合も同程度の臨界指数が得られている。臨界指数 ν は系の対称性には強く依存しないようである。一方、転移点直上での物理量、例えば準位統計はモデルのミクロな構造によらないユニバーサリティを示すが、系の対称性を敏感に反映し、ユニバーサリティクラスごとに異なる振る舞いを示す。ここではふれなかったが、転移点での準位間隔分布関数等は系の対称性により異なる振る舞いを示すことが2次元系で示されている [27, 28, 30]。転移点での現象は実験的にはほとんど調べられていないが、これは準位統計やフラクタル構造が測定可能な物理量のどのように現れるか、対応づけるのが困難であるためである [46]。実験との比較をするためにはより一層の研究が必要である。

アンダーソン転移の本質は、ランダムネスにより空間の並進対称性が破れ、それによって散乱された波が干渉して局在波ができることにある。本解説ではランダムポテンシャル中の電子系に限って議論したが、非一様磁場などのベクトルポテンシャルがランダムな系でも、アンダーソン転移は生じる [47]。また誘電率が空間的にランダムな媒質中を伝搬するフォトンも [48]、不規則な格子を伝搬するフォノン [49] もアンダーソン転移を示すことが期待される。こうした系での転移がユニバーサルな性質を示すかどうかは、今後の研究を待たねばならない。

最近、短距離型反発力で相互作用する2電子の局在問題が、通常の1電子局在問題と全く異なった振る舞いを示すことが指摘され、注目を集めている [50, 51]。このように相互作用する不規則電子系におけるアンダーソン局在は大変興味深く、また実験との比較の上でも重要である。アンダーソン転移が実験的に調べられている系では、多くの場合、多体効果による特異なふるまいが観測されており、これが数値計算と実験結果が合わない一つの原因だと思われる。相互作用する不規則電子系でのアンダーソン転移の研究は、今のところ摂動計算が主で [52]、数値的研究は精力的にはなされていない。相互作用の効果が、アンダーソン転移にどのような変化をもたらすのかという問題は、非常に興味深い重要な問題である。

参考文献

- [1] P.W. Anderson: Phys. Rev. **109** (1958) 1492.
- [2] N.F. Mott: *Metal-Insulator Transitions, 2nd ed.* (Taylors and Francis 1990).
- [3] E. Abrahams, P.W. Anderson, D.C. Licciardello and T.V. Ramakrishnan: Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 673.
- [4] A. Kawabata: Prog. Theor. Phys. Suppl. **84** (1985) 16, 川畑有郷: “アンダーソン局在のスケール理論”, 物理学最前線 **13** (共立出版 1986).

- [5] 福山秀敏: “アンダーソン局在”, 物理学最前線 2 (共立出版).
- [6] P.A. Lee and T.V. Ramakrishnan: Rev. Mod. Phys. **57** (1985) 287.
- [7] アンダーソン局在の数値計算に関する総合解説として、B. Kramer and A. MacKinnon: Rep. Prog. Phys. **56** (1993) 1469 があげられる。
- [8] S. Hikami, A. Larkin and Y. Nagaoka: Prog. Theor. Phys. **63** (1980) 707.
- [9] P.A. Lee, A.D. Stone and H. Fukuyama: Phys. Rev. **B35** (1987) 1039.
- [10] A. MacKinnon and B. Kramer: Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 1546, Z. Phys. **B53** (1983) 1.
- [11] V. I. Oseledec: Trans. Moscow. Math. Soc. **19** (1968) 197 .
- [12] M. Henneke, B. Kramer and T. Ohtsuki: Europhys. Lett. **27** (1994) 389.
- [13] H.L. Störmer, J.P. Eisenstein, A.C. Gossard, W. Wiegmann and K. Baldwin: Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 85.
- [14] H. Noguchi, H. Sakaki, T. Takamasu and N. Miura: Physica **B 184** (1993) 293.
- [15] T. Ohtsuki, Y. Ono and B. Kramer: J. Phys. Soc. Jpn. **63** (1993) 685.
- [16] J.T. Chalker and A. Dohmen: Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4496.
- [17] T. Kawarabayashi, T. Ohtsuki, K. Slevin and Y. Ono: unpublished
- [18] F. Wegner: Z. Phys. **B35** (1979) 4496.
- [19] S. Hikami: Phys. Rev. **B24** (1981) 2671.
- [20] W. Bernreuther and F. Wegner: Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 1383; F. Wegner: Nucl. Phys. **316** (1989) 663.
- [21] S. Hikami: Prog. Theor. Phys. Suppl. **107** (1992) 213.
- [22] J.T. Chayes, L. Chayes, D.S. Fisher and T. Spencer: Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 2999.
- [23] T. Dupré : cond-mat 9512128, submitted to Phys. Rev. B
- [24] C.E. Porter, *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations* (Academic Press 1965).
- [25] M.L. Mehta, *Random Matrices* 2nd Edition (Academic Press 1991).
- [26] E. Hofstetter and M. Schreiber: Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 3137.
- [27] I.Kh. Zharekeshev and B. Kramer: Jpn. J. Appl. Phys. **34** (1995) 4361.
- [28] S.N. Evangelou: Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 2550.
- [29] L. Schweitzer and I.Kh. Zharekeshev, J. Phys.: Condens. Matter **7** (1995) L377.
- [30] T. Ohtsuki and Y. Ono: J. Phys. Soc. Jpn. **64** (1995) 4088.
- [31] A.G. Aronov, V.E. Kravtsov and I.V. Lerner: JETP Lett. (1994) 39; Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 1174.
- [32] V.E. Kravtsov, I.V. Lerner, B.L. Altshuler and A.G. Aronov: Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 888.
- [33] I. Varga, E. Hofstetter, M. Schreiber and J. Pipek: Phys. Rev. **B52** (1995) 7783.
- [34] H. Aoki: J. Phys. **C16** (1983) L205; Phys. Rev. **B33** (1986) 7310.

- [35] M. Schreiber and H. Grussbach: Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 607.
- [36] M. Janssen: Int. J. Mod. Phys. **B8** (1994) 943.
- [37] R. Ketzmerich, G. Petschel and T. Geisel: Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 695.
- [38] J.T. Chalker and G.J. Daniell: Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 593.
- [39] B. Huckestein and L. Schweitzer: Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 713.
- [40] B. Huckestein: Rev. Mod. Phys. **67** (1995) 357.
- [41] L. Schweitzer: J. Phys. Condens. Matter **7** (1995) L281.
- [42] T. Kawarabayashi and T. Ohtsuki: Phys. Rev. **B53** (1996) 6975.
- [43] J. Cardy: J. Phys. **A16** (1984) L385.
- [44] J.L. Pichard and G. Sarma: J. Phys. C: Solid State Phys. **18** (1985) 3457.
- [45] D. スタウファー: “浸透理論の基礎”, 小田垣孝訳、(吉岡書店 1988).
- [46] T. Brandes, L. Schweitzer and B. Kramer: Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 3582.
- [47] T. Kawarabayashi and T. Ohtsuki: Phys. Rev. **B51** (1995) 10897 とその中の参考文献.
- [48] S. John: Phys. Today **44** (5) (1991) 32.
- [49] P. Dean: Rev. Mod. Phys. **44** (1972) 127
- [50] D.L. Shepelyansky: Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 2607.
- [51] Y. Imry: Europhys. Lett. **30** (1995) 405.
- [52] D. Belitz and T.R. Kirkpatrick: Rev. Mod. Phys. **66** (1994) 261.