量子的状態の空間における距離

富山大・理　平山　実

ヒルベルト空間hの正規直交系をなすN個のベクトルの組

$$\Psi = (|\psi_1>, |\psi_2>, \ldots, |\psi_N>)$$

はN枠と呼ばれ，集合

$$[\Psi] = \{\Psi u : u \in U(N)\}$$

はN平面と呼ばれる．hのベクトルから作られるN平面の全体G_Nは複素次元N（dimh－N）の多様体となりグラスマン多様体と呼ばれる．ここでは

（a）G_Nの２点［Ψ］と［Φ］の間の距離d（［Ψ］，［Φ］）を求めること．
（b）その距離が三角不等式

$$d([\Psi],[\Phi]) \leq d([\Psi],[\Xi]) + d([\Xi],[\Phi])$$

をみたすことの証明．
（c）距離公式をAnandan-Aharonov型不確定性関係式へ応用すること．

を行った．本稿では（c）についてのみ記す．尚，稿末に現れる不等式の右辺が d（［Ψ(t_1)］，［Ψ(t_2)］）を表している．

時間・エネルギー不確定性関係式は

$$\tau_A \Delta H \geq \frac{\hbar}{2}$$

で与えられる．ここでAはtを陽に含まない演算子で

$$\Delta A = \sqrt{<\psi(t)|A^2|\psi(t)> - <\psi(t)|A|\psi(t)>^2}$$

$$\tau_A = \left| \frac{d}{dt} <\psi(t)|A|\psi(t)> \right|^{-1} \Delta A$$

である．これに対し，１９９０年にAnandan とAharonovは

$$\int_{t_1}^{t_2} \Delta\mathcal{E}(t)dt \geq \hbar \mathrm{Arccos}(|<\psi(t_1)|\psi(t_2)>|)$$

なる不等式を導いた．H(t)は一般には時間に依存してもよいものとし，そのバラツキは

$$\Delta\mathcal{E}(t) = \sqrt{<\psi(t)|H(t)^2|\psi(t)> - <\psi(t)|H(t)|\psi(t)>^2}$$

で定義される．Arccos が現れるのは，複素射影空間の幾何学による．（a）と（b）の結果から

$$<\psi_i(t)|\psi_j(t)> = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,\ldots,N$$

をみたすN個のベクトルの組に関するエネルギーのバラツキ

$$\Delta\mathcal{E}_N(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} < \psi_i(t)|H(t)^2|\psi_i(t) > - \sum_{i,j=1}^{N} | < \psi_i(t)|H(t)|\psi_j(t) > |^2}$$

が，不等式

$$\int_{t_1}^{t_2} \Delta\mathcal{E}_N(t)dt \geq \hbar\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left\{\mathrm{Arccos}\sqrt{\kappa_i(t_1,t_2)}\right\}^2}$$

をみたすことが導かれる．但しκ_i（t_1，t_2）は下で定義されるN×N行列K（t_1，t_2）の固有値である．

$$A(t_1,t_2) = (a_{ij}(t_1,t_2)) \ , \quad a_{ij}(t_1,t_2) =< \psi_i(t_1)|\psi_j(t_2) >$$

$$K(t_1,t_2) = A^{\dagger}(t_1,t_2)A(t_1,t_2)$$