Title	Kitakadoさんの話への若干の補足(マニフォールド上での量子化および量子論)
Author(s)	大貫, 義郎
Citation	物性研究 (1996), 67(3): 291-295
Issue Date	1996-12-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/95965
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kitakadoさんの話 *への若干の補足

大貫義郎（名古屋女子大・文）

すでに［I］で示されたように、S^D上の量子論の基本代数にはゲージ構造が内在している。 $D=1$では、それは Aharanov-Bohm 型のゲージポテンシャル、$D=2$では単磁極子のつくるゲージポテンシャルであった。また $D=4$ はこれが BPST のインスタントン解であることが、McMullan と Tsutsui [1] によって指摘されている。代数の表現論の結果のなかに、このようなトポロジカルに必ずしも自明でないゲージ構造が現れてくることの深い意味については今のところ自分にはよく分かっていない。ここでは今後の議論の材料として、高次元のD においてはこれがどうなっているのか、ごく最近分かったことを述べておこう [2]。

i) $D=2n$ $(n=2,3,\cdots)$の場合；

簡単のために S^D の半径 r を1とし、S_{jk} にたいしてはスピノル表示を用いることにしよう。よく知られているように既約な S_{jk} をつくるためには、次式をみたすクリフォード環の既約表現を用いればよい。

$$\{e_a, e_b\}=2\delta_{ab} \qquad (a,b=1,2,\cdots,2n-1) \tag{1}$$

ここで e_a は $(2^{n-1}\times 2^{n-1})$ のエルミート行列である。ただし (1) には非同値な 2種の既約表現があるので便宜上その一方を用いることにし

$$i^{n+1}e_1e_2\cdots e_{2n-1}=1 \tag{2}$$

とする。もう一つの既約表現は (2) の右辺を -1 にした式を満たすが、そのどちらを採用するかは重要ではない。このとき既約な S_{jk} としては次の二つの場合が存在する。

$$\begin{array}{lll} \text{(A)} & S^A_{ab}=\frac{1}{2}\sigma_{ab}, & S^A_{a\,2n}=-\frac{1}{2}e_a \\ \text{(B)} & S^B_{ab}=\frac{1}{2}\sigma_{ab}, & S^B_{a\,2n}=\frac{1}{2}e_a \end{array} \tag{3}$$

$$(a,b=1,2,\cdots,2n-1)$$

---

* 以下 [I] として引用する。

ただし

$$\sigma_{ab} \equiv \frac{1}{2i}[e_a, e_b]$$

このとき、[1] によりゲージポテンシャル $A_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2, \cdots, 2n+1$) は次式で与えられる。

$$\begin{cases} A_j(x) = \dfrac{1}{1 + x_{2n+1}} \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} S_{jk} x_k \\ A_{2n+1}(x) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$(j = 1, 2, \cdots, 2n, \quad \sum_{\alpha=1}^{2n+1} x_\alpha^2 = 1)$$

他方、$2n$ ($n = 2, 3, \cdots$) 次元においては数学者のFujii [3] により、S^{2n} 上の Yang-Mills 方程式をみたし、しかもトポロジカルに非自明なゲージポテンシャル（ 彼はこれを generalized BPST con-figuration と名付けた）の存在することが指摘されている。それは次の形をとる。

$$A_j(\xi) = i \frac{\xi^2}{1 + \xi^2} U^{-1}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} U(\xi) \tag{5}$$

ただし

$$\xi^2 \equiv \sum_{j=1}^{2n} \xi_j^2, \qquad (-\infty < \xi_j < \infty)$$

かつ

$$U(\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{\xi^2}} (\xi_{2n} + i \sum_{a=1}^{2n-1} \xi_a e_a)$$

(4) と (5) の二つのゲージポテンシャルの関係をみるためにステレオグラフィック変換

$$x_j = \frac{2\xi_j}{1 + \xi^2}, \qquad x_{2n+1} = \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \tag{6}$$

$$(\sum_{\alpha=1}^{2n+1} x_\alpha^2 = 1)$$

を用いることにしよう。このとき若干の計算によって

$$\sum_{k=1}^{2n} A_k(\xi)\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \frac{1}{2(1+x_{2n+1})} \times \begin{cases} e_a x_{2n} + \sum_{b=1}^{2n-1} \sigma_{ab}\, x_b & \text{for } j = a < 2n \\ \sum_{b=1}^{2n-1} e_b\, x_b & \text{for } j = 2n \end{cases}$$

$$= \frac{1}{1+x_{2n+1}} S^A_{jk}\, x_k$$

が得られる。この右辺は (4) のS_{jk}に既約表現 (A) を用いたものに他ならない。((5) において、$U(\xi)$の代わりに$U^\dagger(\xi)$を用いると、これもトポロジカルに非自明な S^{2n} 上の Yang-Mills 方程式の解なり、このとき上と同様の計算を行なうと、今度は(4) のS_{jk}に既約表現 (B) を用いたものが導かれる。)

以上の結果として

$$\sum_{j=1}^{2n} A_j(x)\,dx_j = \sum_{j=1}^{2n} A_j(\xi)\,d\xi_j \tag{7}$$

すなわち、ゲージポテンシャル (4) は、$D=2n$ の場合、Fujii の見いだしたトポロジカルに非自明な generalized BPST configuration になっていることが分かる。

なお、ついでながら$D=4$ のときにみられたインスタントンの自己双対構造が、高次元ではどうなっているかについて触れておこう。(5) より$F_{jk}(\xi)$をつくると

$$F_{jk}(\xi) = \partial_j A_k(\xi) - \partial_j A_k(\xi) - i\,[A_j(\xi), A_j(\xi)]$$
$$= \frac{-4}{(1+\xi^2)^2} S^A_{jk} \tag{8}$$

を得る。そこで $p=$ 正整数 $<n$ として

$$F_{j_1 j_2 \cdots j_{2p}} = \frac{1}{(2p)!}\sum_{\tau = S_{2p}} \varepsilon(\tau) F_{j_{\tau 1} j_{\tau 2}} F_{j_{\tau 3} j_{\tau 4}} \cdots F_{j_{\tau(2p-1)} j_{\tau(2p)}} \tag{9}$$

を定義しよう。ここで S_{2p} は $2p$ 次の対称群、τ はその要素で $\tau 1, \tau 2, \cdots, \tau(2p)$ は $1, 2, \cdots, 2p$ の τ による置換、$\varepsilon(\tau)$ は置換 τ の偶奇に応じて、+ または − となる符号関数である。(8) の$S^A{}_{jk}$の具体的な形をここに用いて計算すると

$$F'_{j_1 j_2 \cdots j_{2p}} = -\frac{(1+\xi^2)^{4p}}{(1+\xi^2)^{2n}} F_{j_1 j_2 \cdots j_{2p}} \tag{10}$$

が導かれる。ただし

$$F'_{j_1 j_2 \cdots j_{2p}} = -\frac{1}{[2(n-p)]!} \sum_{j_{2p+1}, j_{2p+2}, \cdots, j_{2n}} \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_{2n}} F_{j_{2p+1} j_{2p+2} \cdots j_{2n}} \tag{11}$$

とくに $D=4p\,(=2n)$ の場合、(10) は

$$F'_{j_1 j_2 \cdots j_n} = -F_{j_1 j_2 \cdots j_n} \tag{12}$$

となる。これは一般化された自己双対性に他ならない。

ii) $D=2n-1$ ($n=2,3,\cdots$) の場合；

上の議論で、$x_{2n}=\xi_{2n}=0$, $x_{2n+1} \to x_{2n}$ とすると、(4) と(5) はそれぞれ

$$\begin{cases} A_a(x) = \dfrac{1}{1+x_{2n}} \displaystyle\sum_{b=1}^{2n-1} S_{ab} x_b \\ A_{2n}(x) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$(a = 1, 2, \cdots, 2n-1, \qquad \sum_{j=1}^{2n} x_j^2 = 1)$$

および

$$A_a(\xi) = i\,\frac{\xi^2}{1+\xi^2} U^{-1}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_a} U(\xi) \tag{14}$$

ただし

$$\xi^2 \equiv \sum_{a=1}^{2n-1} \xi_a^2, \qquad (-\infty < \xi_a < \infty)$$

かつ

$$U(\xi) \equiv \frac{i}{\sqrt{\xi^2}} \sum_{a=1}^{2n-1} \xi_a e_a$$

とかかれる。ここで、再びステレオグラフィック変換

$$x_a = \frac{2\xi_a}{1+\xi^2}, \qquad x_{2n} = \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}$$

を用いれば

$$\sum_{a=1}^{2n-1} A_a(x)\,dx_a = \sum_{a=1}^{2n-1} A_a(\xi)\,d\xi_a \tag{15}$$

が導かれ、結局このときも $A_a(x)$ と$A_a(\xi)$ は同一のゲージポテンシャルを表していることが分かる。

しかし後者に関する検討から、このゲージポテンシャルは、球面 S^{2n-1}上の Yang-Mills 方程式を満たしているものの、トポロジカルには自明であることが知られており、その意味ではこれ以上の知見はここからは得られそうもない。

最後に [I] で述べた S^D 上の量子論を、S^D と位相同型な歪んだ曲面上の量子論に拡張する可能性について簡単に触れておこう。

これについては、われわれのプレプリント[4]で既に議論をしたが、これは舌足らずで不完全であった。要は、S^D を平坦な R^{D+1} に埋め込んで議論したように、S^D とディフェオで結ばれる歪んだ D 次元曲面をR^{D+1} のなかに埋め込んで扱うことを考える。このときの曲面の歪みは R^{D+1} を基準にして定義される。このようにして、ディフェオを通しS^D上の理論を歪んだ曲面上の理論に書き換えることを試みるわけであるが、内積の書き換えに際しては、やや面倒な議論が必要のようである。実は S^D と曲面とを結ぶディフェオな写像は無限に可能であって、この中から適当なものを選んで用いないと両者の対応づけは甚だ複雑（あるいは不可能？）になる。ただ幸いなことに、ディフェオのなかに Area preserving ともいうべき写像（ ヤコビアンが曲面上で 1 なる）の存在することが証明でき、これがこの種の議論において重要な働きをするらしいことが分かってきた。これらについての詳しい内容はさらに議論を詰めた上で発表する予定である [5]。

References

[1] D.MacMullan and I.Tsutsui: Phys. Letters **B320** (1994) 287.

[2] K.Fujii, S.Kitakado and Y.Ohnuki: to be published.

[3] K. Fujii: Lett. in Math.Phys.**12** (1986) 363.

[4] Y.Ohnuki and S.Kitakado: Nagoya preprint, DPNU-93-44.

[5] Y.Ohnuki and S.Kitakado: to be published.