# $S^D$ 上の量子力学

北門新作（名大理）

Theorema Egregium 以来、曲がった空間のことは曲がった空間内で論ぜよということになっているらしい。重力理論はその典型。確かに、我々が曲がった空間に住んでいる場合、その空間から一歩も外へ出ることができないから空間内の変数しか使ってはならない。もっともなことだ。少なくとも古典論の範囲では。量子論でもそうか。スピンやゲージ構造等量子論特有の概念はもっと広い空間で考えたほうが良いのかも知れない。

D一次元球面（$S^D$）上の量子力学を D＋１次元空間内に埋め込んで、その変数を使って考える。

$x_\alpha$ をD＋１次元空間の座標、$G_{\alpha\beta}$ をD＋１次元回転群の演算子とすると

$$[\hat{x}_\lambda , \hat{G}_{\alpha\beta}] = i\,( \hat{x}_\alpha\delta_{\lambda\beta} - \hat{x}_\beta\delta_{\lambda\alpha}) \ ,$$
$$[\hat{G}_{\alpha\beta} , \hat{G}_{\lambda\mu}] = i\,(\delta_{\alpha\lambda}\hat{G}_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\hat{G}_{\beta\lambda} + \delta_{\beta\mu}\hat{G}_{\alpha\lambda} - \delta_{\beta\lambda}\hat{G}_{\alpha\mu}) \ ,$$
$$[\hat{x}_\alpha , \hat{x}_\beta] = 0 \ ,$$

が成立する、但し

$$\sum_{\alpha=1}^{D+1} \hat{x}_\alpha^2 = r^2 \qquad ,$$

この代数はユークリッド群　$E(D+1)$　のそれと同形である。従ってその既約表現はウイグナー流[1]に求めることができる。

球面上の北極点$l=(0,0.....r)$を不変にする小群を$H(l)$（この場合は$SO(D)$）として、任意の点 x に対して　$x=\alpha_x l$　となる変換 $\alpha_x$ を用いると、任意の$R\in SO(D+1)$　にたいして$\alpha_x^{-1}R\alpha_{R^{-1}x}$　は$H(l)$ の元である。そこで前者を後者の既約表現で表わせば

$$\varphi'_\xi = \sum_{\xi'} \hat{Q}(R,x)_{\xi\xi'}\varphi_{\xi'}(R^{-1}x) \ ,$$

と求めることができる、ここで

$$\hat{Q}(R,x) = \begin{cases} 1 + i\,\omega_{ij}S_{ij} & \text{for case (1)} \ , \\ 1 - i\,\tau_j \displaystyle\sum_{k=1}^{D} \frac{1}{r+x_{D+1}} S_{jk}x_k & \text{for case (2)} \ . \end{cases}$$

ただし cases(1),(2) は

1) $R = 1 + i\,\omega_{ij}\,\sigma_{ij}/2$
( the rotation on the $i$-$j$ plane through the infinitesimal angle $\omega_{ij}$)

and

2) $R = 1 + i\,\tau_j\sigma_{j,D+1}/2$ with $\tau_j \equiv \omega_{j,D+1}$
( the rotation on the $j$ - $(D+1)$ plane through the infinitesimal angle $\omega_{j,D+1}$)

である。従って$SO(D+1)$ 回転を

$$\varphi'_\xi(x) = \sum_{\xi'} \left(1 + \frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{D+1} \omega_{\alpha\beta}\,\widehat{G}_{\alpha\beta}\right)_{\xi\xi'}\varphi_{\xi'}(x)$$

と表わすと

$$\widehat{G}_{ij} = \frac{1}{i}(x_i\partial_j - x_j\partial_i) + S_{ij},$$

$$\widehat{G}_{j,D+1} = \frac{1}{i}(x_j\,\partial_{D+1} - x_{D+1}\,\partial_j) - \frac{1}{r + x_{D+1}}\sum_k S_{jk}\,x_k,$$

と書くことが出来る。但し$S_{ij}$ は小群 $SO(D)$ の回転演算子。

例えば、$D=3$の場合を考えれば $S_{ij}$ は普通のスピンと見ることができる。即ち我が3次元空間を$S^3$を contract したなれの果てと思えばスピンが自然に出てくると言うことになる。

次にこの系のゲージ構造について考える。上の式をまとめて

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{i}\left(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha\right) + f_{\alpha\beta}$$

と書き、x-dependent なユニタリー変換

$$G_{\alpha\beta} \to G'_{\alpha\beta} = U^\dagger(x)G_{\alpha\beta}U(x)$$

を考えると f は

$$f_{\alpha\beta} \to f'_{\alpha\beta} = U^\dagger(x)f_{\alpha\beta}U(x) + \frac{1}{i}U^\dagger\left(x_\alpha\partial_\beta U(x) - x_\beta\partial_\alpha U(x)\right)$$

と変換する、そこで

$$A_\alpha(x) \equiv \frac{1}{r^2}\sum_\beta f_{\alpha\beta}(x)x_\beta \quad .$$

なる量を導入すれば、これは

$$A_\alpha(x) \to A'_\alpha(x) = \widehat{U}(x)A_\alpha(x)\,\widehat{U}^\dagger(x) + i\,\widehat{U}(x)\partial_\alpha\widehat{U}^\dagger(x),$$

なる変換を受け

$$\left\{\begin{array}{ll} A_j(x) = \dfrac{1}{r(r+x_{D+1})} \displaystyle\sum_{k=1}^{D} S_{jk} x_k & (j = 1, 2, \cdots, D), \\ A_{D+1}(x) = 0 \ , & \text{for } D \geq 2 \ . \end{array}\right\}$$

と書き表わすことができる。これは$(D+1)$次元空間の原点に置かれたモノポールのポテンシャルにほかならない。

$D = 1$ の場合は特別で

$$A_1(x) = \frac{x_2}{r^2}\alpha ,$$
$$A_2(x) = -\frac{x_1}{r^2}\alpha ,$$

となり２次元平面の原点をとおる磁束を表わす。

また $D = 2$の場合は

$$A_1 = \frac{x_2}{r(r+x_3)} S \ ,$$
$$A_2 = -\frac{x_1}{r(r+x_3)} S,$$
$$A_3 = 0 \ ,$$

となり３次元空間のモノポールであることは言うまでもない。一般の$D$ にたいするゲージ構造については次のおはなしを御参照。（　尚、この種のお話は２、３、４にあり）。

このように曲がった空間での量子論は奥が深い、flat では考えられないことがおきている。この様子は場の量子論でも期待できる、ゲージ場などは曲がりに曲がった空間である、その中でのゲージ構造も研究されていて面白そうな結果がでている[5]。

References

1. E.P. Wigner, Ann. Math. **40,** 149 (1939); Y. Ohnuki, *Unitary Representations of the Poincaré Group and Relativistic Wave Equations,* (World Scientific, Singapore, 1988 )

2.Y. Ohnuki and S. Kitakado, Mod. Phys. Lett. A7 (1992) 2477 and J. Math. Phys. 34 (1993) 2827

3 N.P.Landsman and N.Linden, Nucl. Phys. B365 (1991) 121; Peter Levay, J. Phys. A: Math. Gen. 27 (1994) 2857.

4 D.McMullan and I.Tsutsui, Phys. Lett. B320 (1994) 287 and Ann. Phys. to be published.

5 D.McMullan and I.Tsutsui, to be published.