

# 結合写像系地震モデルのエネルギー構造

早稲田大学理工学研究科物理及応用物理学専攻相澤研究室  
内海太祐、相澤洋二

## 1 はじめに

地震には多くの経験則がある。そしてこれらの多くはベキ則を示す。エネルギーのベキ則である Gutenberg-Richter 則、余震の時間分布の巾則である大森公式、などがよく知られているが、他にも震源・震央の空間分布 [1] や断層の分布 [2] など驚く程様々な側面にベキ則が見られる。

地震が地殻の破壊であることは多くの人が異論の無いところであろう。すなわち、地震は大規模な岩石の破壊と考えてよいだろう。マンデルブロが岩石の破壊面から Fractal という言葉を作り出したことを引くまでもなく、地震に見られる様々なベキ則は Fractal の自然界における重要な例である。これらのベキ則が震源のメカニズムや地殻の性質とどのような関係にあるかを探ることは Fractal 科学に対して重要であるし、地震学へも寄与し得る。

従来、地震のフラクタル性に関する研究は自己組織化臨界状態 [3] としてとらえられている。モデルとしてはほとんどがスティック-スリップモデル [4] がよく使われる。バネでつながれたブロックの集まりが摩擦のある面上を滑るというこの系は自然に臨界状態に達する。これはエネルギーに対するベキ則を示す唯一のモデルであるとされる。粘弾性のバネを使うというモデル [5] によって、余震を起こすことも示されている。これらのモデルは Gutenberg-Richter 則の指数が多くの場合 1 に近いことを示すという意味で有効なモデルである。

しかし、指数は実際には地域や時期によって変動することがわかっている。また群発性の地震などでは 1 よりかなり大きくなる。今のところスティック-スリップモデルではこれらのことは説明できない。

本研究では破壊が起こる時点でその大きさがわかるという立場を取り、その大きさにしたがって破壊の広がり方も決まるというモデルを作る。地震後の強度の回復速度と強度をパラメータに取り、このパラメータに対して系はエネルギーのベキ則を見せるか、見せる時にはパラメータへの依存性はどのようになるかを見る。

## 2 MODEL

本研究での地震の場、発生、エネルギー、地殻の強度、破壊の伝搬について定義し、系の時間発展について説明する。

## 2.1 定義

$N \times N$ の2次元正方格子である。この格子の空間を $\Lambda_N$ とする。 $N$ は21とする。各格子点に次のような写像をのせる。

$$x_{i,j;t+1} = \begin{cases} x_{i,j;t} + 2b_{i,j;t}^{-1}(1 - 2\epsilon)x_{i,j;t}^{b_{i,j;t}} + \epsilon & 0 \leq x_{i,j;t} < \frac{1}{2} \\ a(x_{i,j;t} - \frac{1}{2}) + \epsilon & \frac{1}{2} \leq x_{i,j;t} \leq 1 \end{cases}$$

今、 $a$ は0.1、 $\epsilon$ は $10^{-13}$ とする。

いま、 $x_{i,j}$ を応力とみなす。ある格子点 $(i_{oc}, j_{oc})$ で、 $x_{i_{oc}, j_{oc}} > 1/2$ となったら、 $(i_{oc}, j_{oc})$ を震源とした地震が起こるとする。すなわち、 $1/2$ が応力の臨界値であるとする。

ある格子点 $(i, j)$ が破壊されてから次にその点を震源とする地震が起こるまでの時間が地震のエネルギーに比例するとし、この時間をエネルギー $E_{i,j}$ として定義する。ある時刻に起こった地震のエネルギーは系全体についてこれを加えたものとする。

$b_{i,j}$ をその格子点での地殻の強度と呼ぶ。 $b_{i,j}$ は他のサイトからの影響が無い時の地震の起こりやすさをコントロールするからである。 $b_{i,j}$ の上限値は一度も破壊の起こっていない格子点での $B_1$ 、下限値を破壊された直後の格子点での $B_0$ とする。 $B_1, B_0$ はすべての格子点について一定である。

ある格子点 $(i_{oc}, j_{oc})$ で地震が発生した時、 $(i_{oc}, j_{oc})$ に蓄えられていたエネルギーが解放され、そのエネルギーに応じて破壊が伝搬する。破壊の伝搬は $(i_{oc}, j_{oc})$ を中心としたDLAによって行う。このDLAは $(i_{oc}, j_{oc})$ から半径 $R$ に達すると止まる。この過程は通過する格子点の影響を受けない。但し $R$ は

$$R = \begin{cases} \alpha E_{i_{oc}, j_{oc}} & \text{if } \alpha E_{i_{oc}, j_{oc}} < \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil \\ \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil & \text{if } \alpha E_{i_{oc}, j_{oc}} \geq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil \end{cases}$$

ここで $\lceil \cdot \rceil$ はガウス記号で、 $\alpha = 0.004$ とする。

## 2.2 時間発展

初期条件は次のように設定する。

$$\forall i, j \in \Lambda_N, \begin{cases} x_{i,j}^0 \in [0, \frac{1}{2}] & \text{一様乱数} \\ b_{i,j}^0 = B_1 \\ E_{i,j}^0 = 0 \end{cases}$$

系は次のように時間発展させる。

同時的に $\Lambda_N$ の全ての格子上の写像を時間発展させる。ある格子点で地震が発生したら、定義にしたがって破壊を伝搬させる。破壊された格子 $(i, j; t)$ 上では $E_{i,j}^t = 0, b_{i,j}^t = B_0$

とする。すべての格子点にエネルギーを1加え ( $E_{i,j}^t + 1$ )、強度を

$$B_1 - b_{i,j}^{t+1} = (B_1 - b_{i,j}^t) \exp\left(-\frac{1}{\tau_1}\right)$$

に従って回復させる。これを1 time step として、この過程を繰り返す。

### 3 結果

#### 3.1 地殻強度の回復速度 $1/\tau_1$ とエネルギー分布のベキ指数との関係

強度 ( $b_{i,j}$ ) の上限、下限を  $B_1 = 3.0, B_0 = 1.5$  で固定し、回復速度を示す  $1/\tau_1$  を変化させる。この時、地震エネルギーの密度分布が石本飯田の式

$$P(E) \propto E^{-m} \quad (P(E) \text{ はエネルギー密度関数})$$

を再現するか調べる。(これはある仮定のもとで Gutenberg-Richter 則と同値であることが示されている。) また、再現される時に  $1/\tau_1$  とベキ指数  $m$  との関係を示す。

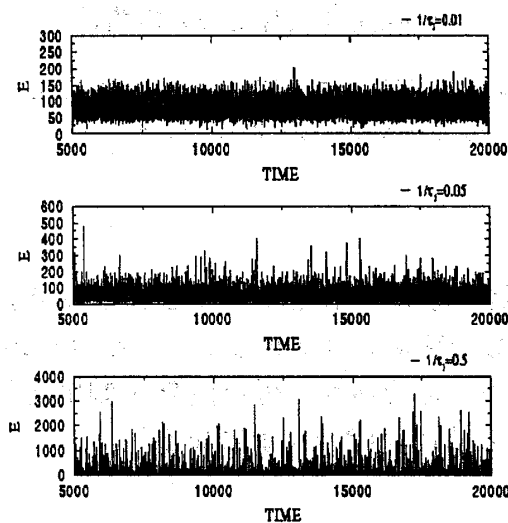


Figure 1: 地震エネルギーの時系列

地震の時系列である。上から順に  $1/\tau_1 = 0.01, 0.05, 0.1$  である。 $1/\tau_1$  が大きくなるにしたがって、大きな地震が起こるようになる。

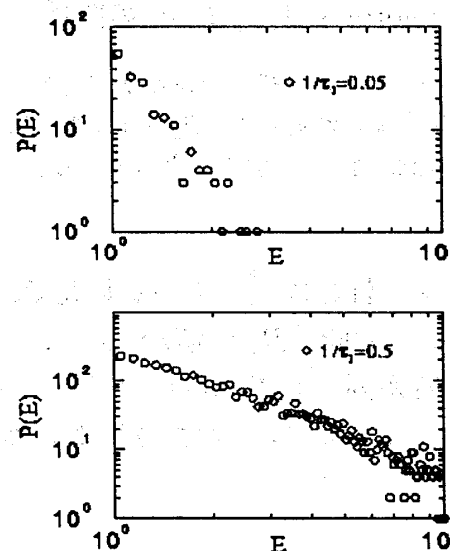


Figure 2: 地震のエネルギー分布

考慮するエネルギーは  $250 \leq E \leq 2500$  とする。 $\tau_1 = 0.01$  では考慮すべき大きさの地震が起こっていない。エネルギーは250を単位に取っている。

Figure 1は  $B_0, B_1$  をそれぞれ 1.5, 3.0 に固定したときの地震の時系列である。縦軸にはエネルギーを取っている。 $1/\tau_1$  が小さいうちは絶え間なく小さな地震が起こるが、 $1/\tau_1$  が大きくなるに従って、大きな地震が起こるようになる。これは強度の回復時間が長いと、強度が回復する前に次の地震を起こしてしまうが、短いと次の地震を起こすまでに十分なエネルギーを蓄えられるからである。

この地震系列のエネルギー密度関数を取ったのが Figure 2 である。ここで定義から、エネルギーが 250 以下では他の格子への影響を引き起こさないので考えない。エネルギーが 2750 以上では破壊の伝搬にカットオフがあるのでこの領域も外している。

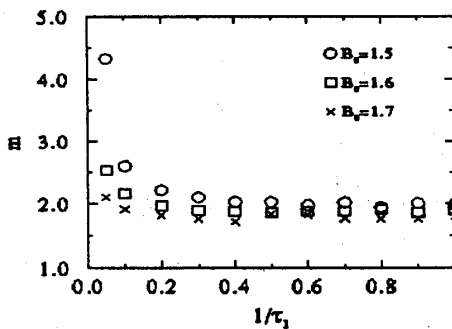


Figure 3:  $1/\tau_1$  と  $m$  の関係

$1/\tau_1$  と  $m$  との関係。回復速度が大きくなると一定値に漸近する。 $B_0 = 1.5$  の時には  $m = 1.99$  ( $1/\tau_1 > 0.4$ ) となっている。

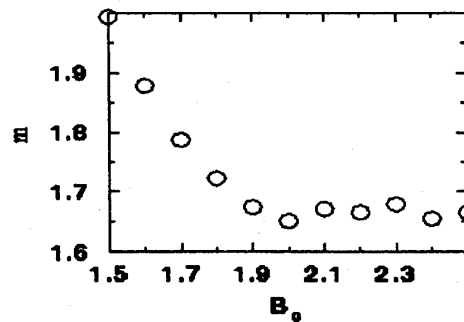


Figure 4:  $B_0$  と  $m$  の関係

強度の下限と指数の関係。 $B_0 > 2.0$  で  $m = 1.66$  となっている。但し、( $1/\tau_1 = 0.5$ )

フラクタル性の成立している範囲で、 $1/\tau_1$  に対する  $m$  の値をプロットしたのが Figure 3 である。この時、 $B_0$  の値が 1.6, 1.7 についても一緒にプロットした。ひとつの  $m$  を得るのに、時系列として 80000 ステップのエネルギーの分布から得た値を 5 個平均している。これによると  $1/\tau_1$  が大きいところでは  $m$  の値はほぼ一定値になる。

### 3.2 $B_0$ と $m$ の関係

回復の速さ  $1/\tau_1$  が十分に大きいと、 $1/\tau_1$  依存性は無くなる。そこで  $1/\tau_1$  を 0.5 に固定して、強度の下限値  $B_0$  と  $m$  との関係を調べたものが、Figure 4 である。 $B_0$  が 2.0 を越えると、 $m$  は一定値になる。今の場合  $m = 1.66$  である。これは偶然だが、実際の地震のエネルギー分布の指数と一致している。

## 4 議論と展望

地震が起こりはじめにその大きさを知っている場合にもエネルギーフラクタル分布を再現することが出来た。そのベキ指数は広く一定の部分を持つが、変化する部分も持つ。

ベキ指数が一定の領域は定量的には解析できていないが、定性的には回復の速さ  $1/\tau_1$  が大きく、地震による強度の低下  $B_1 - B_0$  が小さいところということが出来る。このことから一定のベキ指数は  $B_0 = B_1$  の時の解析で行うことが出来る可能性がある。

このモデルの結果から、一定のベキ指数を持つ領域の特徴として地震によってエネルギーが解放されても、極端な応力の低下は無く、強度の回復速度は十分速いということが示唆される。

このモデルに含まれる他のパラメータ (系の大きさ、広がる範囲を決めるパラメータ、写像のパラメータ) は指数に影響する。これは素過程や広がり方などをもともと定性的にしか与えていないことを考えるとやむを得ない。しかし、これらのパラメータに対しても上に述べた定性的な特徴が当てはまることは示唆される。

本研究の発展として2つのことが考えられる。一つは系に粘弾性的 (拡散的) な相互作用を導入して余震を起こし、広がり方や強度をパラメータとして余震に関する大森公式に対して本研究で得られたような広い範囲での一定のベキ指数と変化する指数部分を持つかを調べ、エネルギーの指数との比較を行うことである。

もう一つは本研究のモデルではあらかじめ設定されているエネルギーの広がり、強度の回復、断層の形成などをもっとミクロメカニズムから組み立てることである。すなわち岩石のような強い不均一性を持つ固体に対する破壊力学を作ることである。

これらはフラクタルとメカニズムとの関係を調べるうえで重要であるが、前者は後者の裏づけが無くては完全なものとはならない。今後はこの方面の研究も進める必要がある。

## References

- [1] Y.Y.Kagan and L.Knopoff,; Spatial distribution of earthquakes: the two-point correlation function, *Geophys.J.R.astr.Soc.*,**62**,303,(1980)
- [2] Okubo,P.G. and K.Aki: Fractal Geometry in the San Andreas Fault System, *J.Geophys.res.*,**92**,331,(1987)
- [3] P.bak,C.Tang and Kk.Wiesenfield, *Phys.Rev.Lett.*,**59**,381,(1987)
- [4] Carlson,J.M, J.S.Langer, Mechanical model of an earthquake fault, *Phys. Rev.A*, **40**,6470,(1989)
- [5] 中西秀, 地震と Self-Organized Criticality, 数理地震学, 斉藤正徳 編, 68, (1992)