

# 株価モデルとその理論的解析

東北大学大学院情報科学研究科  
ソニーコンピュータサイエンス研究所

佐藤 彰洋<sup>1</sup>  
高安 秀樹<sup>2</sup>

## 1 はじめに

近年、平均株価の価格変化にみられる価格変化の分布は Lévy 安定分布によってよく近似されること [2] が Stanley らによって明らかにされた。その研究によると  $\Delta t$  間の市場価格  $P(t)$  の差  $Z(t) = P(t) - P(t - \Delta t)$  の分布は、べき分布に指数的なカットオフが加わった分布に従うことが明らかにされている。価格変動が、べき分布に従う原因をモデルによって説明し、価格予想への応用を目指すことが本研究の目的である。

## 2 モデル化について

市場を単純化した決定論的モデルと、その決定論的モデルを更に単純化した確率過程を並行して考えていくことで、株の売買をモデル化をする。株式市場のモデルはいくつか提案されているが、Hirabayashi らによって提唱された閾値モデル [1] に基づきモデルの構成を考える。Hirabayashi らのモデルでは、ディーラーの動的な挙動が考慮されており、外部からのゆらぎを考えない決定論的モデルになっている。

決定論的モデルは、ディーラーの振舞いを自由に規定することが可能な反面、自由度が高すぎるため解析的手法を用いることが難しい。一方、確率モデルは、ある程度解析的に扱っていくことが可能だが、現実との関連が薄れる傾向にある。

### 2.1 閾値モデル

#### 2.1.1 定式化

閾値モデルは様々な分野のモデルにおいて提唱されている。ここでは、この閾値モデルによって、株式の売買のモデル化をする。ディーラー間の売値と買値の価格差に着目し、価格差がある閾値を越えた場合に株式の売買が発生するようなモデルを考える。

実際の株の取引には多数のディーラーが介在し、複数の銘柄の株が同時に売買されているが、ここでは単純化して、一銘柄の株を固定人数のディーラーが売買することを考える。各ディーラーは  $S_i$  (希望売値)  $>$   $B_i$  (希望買値) を一定幅  $\Lambda$  で持っている。すなわち、

$$S_i - B_i = \Lambda \quad (1)$$

である。 $i$  番目のディーラーが、他の  $j$  番目のディーラーから株を購入するのは、 $B_i \geq S_j$  の条件が必要である。市場全体では、最高の買値と最低の売値を提示したディーラーについて売買が成立すると考えるのが自然である。よって、株式の売買が起こるためには、 $\max\{B\} \geq \min\{S\}$  となるべきである。市場内で取引が成立する条件は次の不等式であらわされる。

$$\max\{B_i\} - \min\{B_i\} \geq \Lambda \quad (2)$$

ここで、 $\max\{\dots\}$ 、 $\min\{\dots\}$  はそれぞれ、希望買値  $\{B_i\}$  の最大値、最小値を意味する。

各ディーラーは単位時間中に、売値の希望価格を定値  $a_i$  だけ変化させ、取引の可能性を探ると仮定する。すなわち、 $a_i > 0$  のとき、ディーラーは価格を上げながら、売値の可能性の探索を行なう。買い手は株をできるだけ安く購入するために、安い価格帯から希望価格を上げながら売値の可能性を探索すると仮定すると、買い手は希望価格を上げる傾向にあることになる。今、市場には少量の株式とお金しかない

<sup>1</sup>e-mail:aki@fractal.is.tohoku.ac.jp

<sup>2</sup>e-mail:takayasu@csl.sony.co.jp

仮定すると、ディーラーは株を買い続けたり、売り続けることができなくなる。よって、株を買ったディーラーは株を売るように、売ったディーラーは買うように立場を変えなければならない。その結果、各ディーラーのトレンド  $a_i$  は売買成立時のその符号を反転する。

$$a_i(t) = \begin{cases} -a_i(t-1), & (\text{取引に参加したディーラーについて}) \\ a_i(t-1), & (\text{その他}) \end{cases} \quad (3)$$

これとは別に、全てのディーラーは過去の取引によって生じた価格差に比例して次の希望価格を決めると仮定する。すなわち、過去の価格差に応じて、ディーラーの希望価格は一斉にシフトされる。よって、時刻  $t$  における、各ディーラーの希望価格  $B_i(t)$  は次の漸化式であらわされる。

$$B_i(t+1) = B_i(t) + a_i(t) + c\{P(t) - P(t_{prev})\}, \quad (4)$$

ここで、 $t_{prev}$  は2つ前の取引が発生した時間である。また、右辺第三項の  $P(t) - P(t_{prev})$  は最も最近に発生したときの、市場価格のとびをあらわす。

一般に、市場価格は株の売買が成立した場合にだけ変化し、それ以外は以前と同じである。いま、市場価格は売買成立の売値と買値の平均値で決ると仮定すると、時刻  $t$  における市場価格  $P(t)$  は次式で決定される。

$$P(t) = \begin{cases} (\max\{B_i\} + \min\{S_i\})/2 & ((2) \text{式を満足}) \\ P(t-1) & (\text{その他}) \end{cases} \quad (5)$$

$\{B_i\}$ 、 $\{a_i\}$  の初期値  $B_i(0)$ 、 $a_i(0)$  はそれぞれ  $[-\Lambda, \Lambda]$ 、 $[-\alpha, \alpha]$  の一様乱数で与える。ここで、 $\alpha$  は非負のパラメータである。上記で記述したことを、プログラムの形式でまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \text{if}(\max\{B_i(t)\} - \min\{B_i(t)\} \geq \Lambda) \{ \\ & \quad a_i(t) = -a_i(t) \quad (\text{取引に参加したディーラーについて}) \\ & \quad p(t+1) = (\max\{B_i(t)\} + \min\{S_i(t)\})/2 \\ & \quad t_{prev} = t \\ & \quad \} \\ & \text{else } P(t+1) = P(t) \\ & \quad B_i(t+1) = B_i(t) + a_i(t) + c\{P(t) - P(t_{prev})\} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、

- $t$  : 離散時間 ( $t = 0, 1, 2, \dots$ )
- $B_i(t)$  :  $i$  番目のディーラーの希望価格
- $a_i(t)$  :  $i$  番目のディーラーの価格変動
- $P(t)$  : 時刻  $t$  での市場価格
- $t_{prev}$  : 2つ前の取引が発生した時刻
- $c$  : 価格変動がディーラーに与える影響を表わすパラメータ

閾値モデルのパラメータは、ディーラーの総数  $N$ 、トレンドの広がり  $\alpha$ 、閾値  $\Lambda$ 、 $c$  の4つである。

Hirabayashi らのモデルでは、買い手と売り手の立場は固定されており、買い手にあたるディーラーは常に株を買い続けるものであった。これは、市場に多量のお金と株があるという仮定に基づくもので、我々のモデルの逆の極限と考えられる。

### 2.1.2 検討

4つのパラメータをそれぞれ、 $N = 100$ 、 $\alpha = 0.01$ 、 $\Lambda = 1.0$ 、 $c = 0.3$  として得られた  $P(t)$  の時系列データを図1に示す。時系列データは急激な変動をともなうものとなっている。

Stanley らの測定方法に従い、市場価格差  $Z(t) = P(t) - P(t - \Delta t)$  について、シミュレーションの結果を検討する。 $\Delta t = 1$  における  $Z(t)$  の累積分布  $F(\geq |Z|)$  を図2に示す。大きなスケールまで存在確率が残る、べき分布

$$F(\geq |Z|) \propto Z^{-\beta} \quad (7)$$

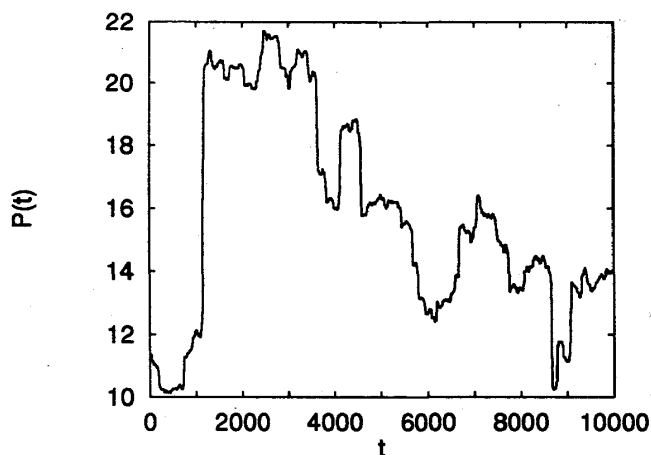


図 1: 閾値モデルの市場価格の時系列 ( $c = 0.3$ )

によって近似できる、分布になっている。

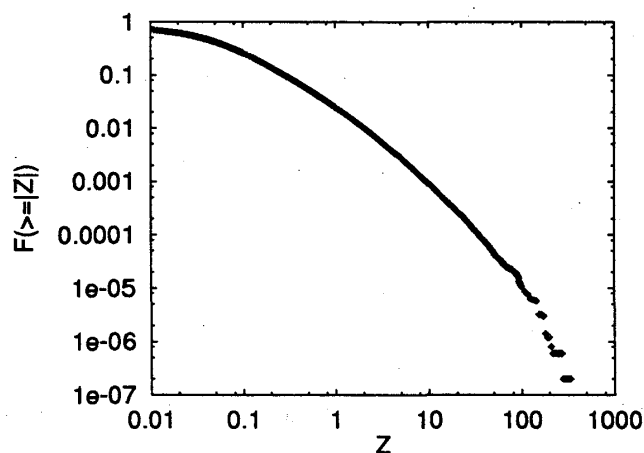


図 2: 閾値モデルの価格差の累積分布の log-log プロット ( $c = 0.3$ )

過去の価格変動がディーラーに与える影響  $c$  を変えると、連続的にべき分布の指数が変化していく (図 3)。また、パーコレーションとは異なり、シミュレーションを行なった範囲では、臨界指数は観測されなかった。

モデル化にともなう様々な仮定および単純化と、Stanley らの観測は平均価格に対して行なわれているという事実にもかかわらず、我々のモデルの価格変動の分布にでもべき分布が見いだされた。このことから、この閾値モデルにべき分布を発生させるメカニズムがあると考えられる。そのメカニズムを考えるため、この閾値モデルをより詳しく考察すると以下のことがわかる。

- 取引は常に起こっているのではなく時々発生しており、連続して取引が発生しない回数  $n$  は指数分布に従う。すなわち、取引の発生は Poisson 過程で発生している。(図 4)
- 全てのディーラーに一律に  $c\{P(t) - P(t_{prev})\}$  が加えられおり、取引が発生しない間、この値は一定である。
- ディーラーが過去の価格変動に影響を受けない場合 ( $c = 0$ ) に生じる自発的な価格変動は指数的なテールをもつ左右対称な分布になっている。(図 5)

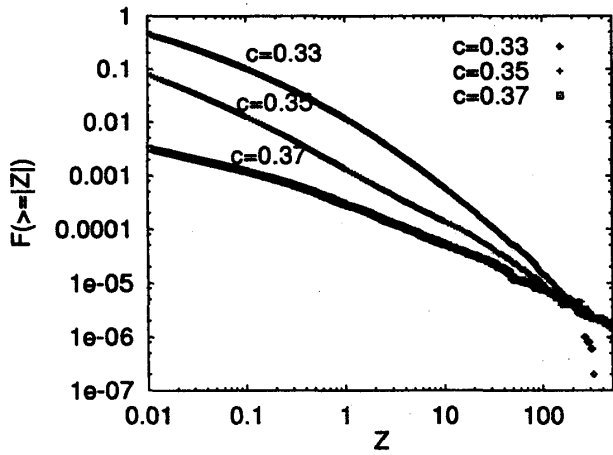


図3: 閾値モデルの価格変動の累積分布:  $c$ を変化させながら累積分布をlog-logプロットした。 $c = 0.33$ 、 $c = 0.35$ 、 $c = 0.37$ の場合である。 $c$ によって直線部分の傾きが変化していることが認められる。

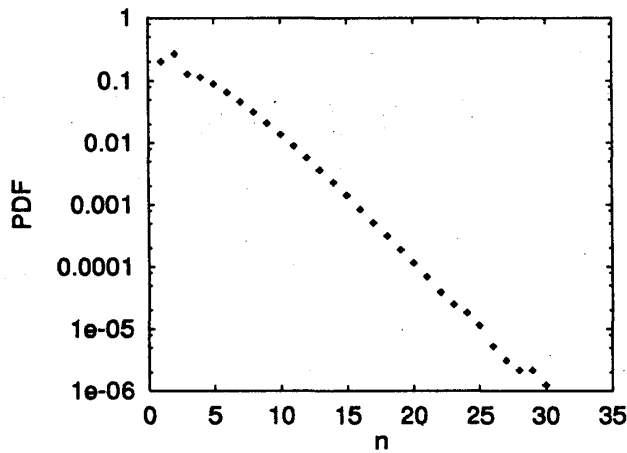


図4: 連続して取引が発生しない回数  $n$  の分布

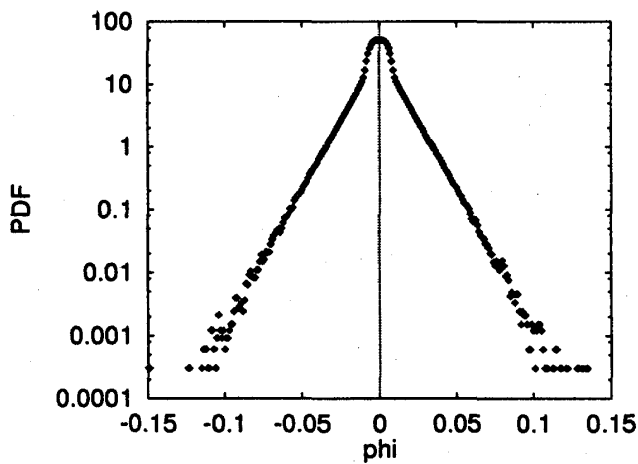


図5: 自発的価格変動  $\phi$  の分布

## 2.2 確率過程

上記の閾値モデルでの考察を、確率過程により考え直すことにする。計算機シミュレーションの結果から、べき分布の指数は  $c$  に依存していると予想される。

### 2.2.1 定式化

単位時間中に、全てのディーラーは過去の価格差に比例した量  $c\{P(t) - P(t_{prev})\}$  だけ移動する。取引が発生しない間、この値は一定である。いま、 $s$  回目の取引が  $t_{prev}$  で発生したとすると、 $s$  回目の取引による市場価格のとり  $\Delta p_s$  は次のようにあらわされる。

$$\Delta p_s = P(t) - P(t_{prev}) \quad (8)$$

$s$  回目の取引が発生したのち、 $n_s$  時間後に  $s+1$  回目の取引が発生したとすると、 $s+1$  回目の市場価格は、 $s$  回目の価格より  $cn_s\Delta p_s$  だけ変化する。また、 $c$  の値とは独立に取引発生にともなう自発的変動は生じるので、 $s+1$  回目の市場価格には自発的変化も加わっている。よって、取引ごとの価格の変化は次の漸化式で表わされる。

$$\Delta p_{s+1} = cn_s\Delta p_s + \phi_s \quad (9)$$

ここで、

- $s$  : 取引が発生した回数
- $n_s$  :  $s-1$  回目の取引が発生してから  $s$  回目の取引が発生するまでの時間
- $\Delta p_s$  :  $s$  回目の取引によって生じる価格変化
- $\phi_s$  :  $s+1$  回目の取引によって生じる自発的価格変化

(9) 式のような積と和の項にゆらぎをもつ式は様々な分野で研究されている。カオスの on-off intermittency [3] や random multiplicative process [4] の研究のなかで解析されおり、乱流中の高分子の動き [5] や色素レーザーに生じるノイズ [6] のモデルとして提唱されている。非線形要素の assembly [7] の問題でも同様の式が導出されている。

## 3 モデルの解析

$n_s$  と  $\phi_s$  の相関は無視できると仮定すると、閾値モデルは、 $n_s$ 、 $\phi_s$  を、それぞれの分布に従うノイズとした場合の (9) 式によってよく近似することが可能と考えられる。以下では (9) を解析的手法と計算機シミュレーションによって解析し、閾値モデルを理解する。

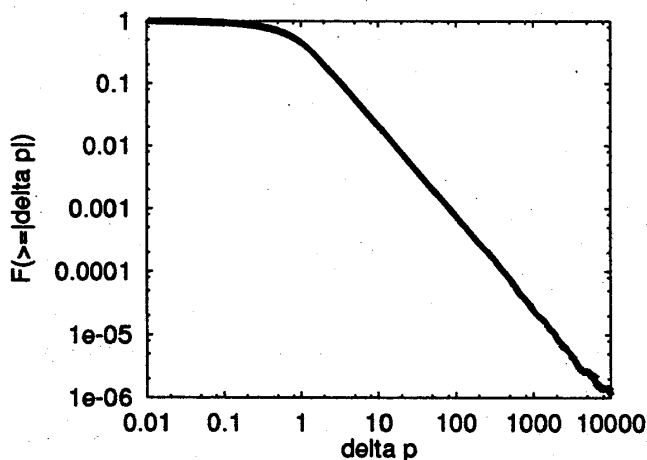


図 6: 確率過程 (9) による  $\Delta p$  の累積分布 ( $c=0.3$ )

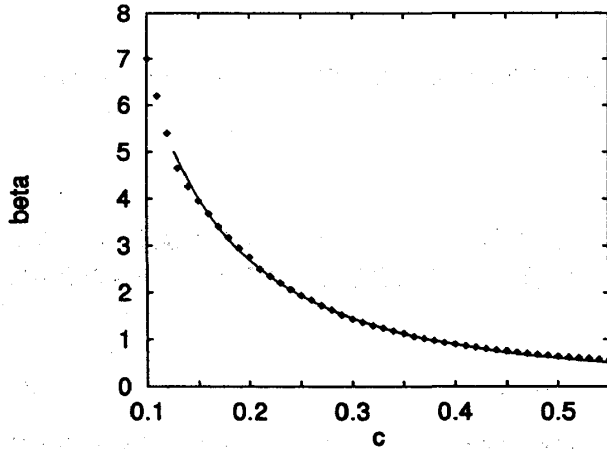


図 7:  $c$ - $\beta$  プロットと理論曲線

### 3.1 べき指数 $\beta$ の解析

(9) 式において、 $n_s$ 、 $\phi_s$  がそれぞれ指数分布、Laplace 分布と仮定してシミュレーションを行なう。図 4、5 から指数分布の平均  $\langle n \rangle = 3.1$ 、Laplace 分布の分散  $\langle \phi^2 \rangle = 1.3 \times 10^{-4}$  とする。 $c = 0.3$  の場合の  $\Delta p_s$  の累積分布が 6 である。分布はべき分布によってよく近似できる。また、閾値モデルと同様に  $c$  を変えるとべき分布の指数  $\beta$  が変化する現象が見られた。この結果を考慮して、解析的に (9) 式の解析を行なう。(詳しくは [8] 参照)

$\Delta p$  の分布が指数  $\beta$  のべき分布に従うと仮定すると、

$$c^\beta \langle n^\beta \rangle = 1 \tag{10}$$

の関係が得られる。ここで、 $\langle n^\beta \rangle$  は  $n$  の  $\beta$  乗平均である。

これは、 $c$  を変えるとべき分布の指数  $\beta$  が (10) 式を満たすように変化することを意味する。また、(10) 式から得られる理論曲線と計算機シミュレーションによる  $c$  と  $\beta$  はよい一致をみせる (図 7)。このことから、 $c$  によって異なる指数のべき分布が観察されることを説明できる。図 7 から、 $c = 0.306$  のとき、実際の株価変動から求められるべき指数  $\beta = 1.4$  が得られる。

株価変動に見られるべき分布は、過去の価格変化がランダムに増幅・減衰されることにより生じると理解でき、この増幅と減衰のトレードオフの程度がべき指数  $\beta$  となって現われていると結論できる。

### 3.2 カットオフ

実際に株価変動から得られたべき分布には両端に指数的なカットオフが存在する。しかし、式 (9) の確率過程では、どのスケールでもべき分布に従い、カットオフは見られない。ここでは、(9) 式を変更することにより、カットオフが得られないかについて考察する。

(9) 式が、大きなスケールでもべき分布に従う変動を作り出すということは、反対に大きなスケールでは (9) 式に従わないように、モデルを変更すれば、指数的なカットオフが得られると予想できる。大きなスケールで  $n_s$  に  $\Delta p$  依存性を持たせることでモデルの変更を行なう。具体的には、 $n_s$  が  $|\Delta p_s| > \Delta p_{th}$  の場合に上限を持つように変更する。図 8 に  $\Delta p_{th} = 50.0$ 、 $n_s$  の上限を 4 とした場合の  $\Delta p$  の分布を示す。 $\Delta p_{th}$  程度から指数的に確率が減衰する分布になっていることがわかる。あるスケールから指数的に減衰するという点で実際に観測されている分布と一致が認められる。

閾値モデルでは取引の発生間隔  $n$  に  $\Delta p$  依存性を持たせることはできない。しかし、価格変動  $P(t) - P(t_{prev})$  が  $\Delta p_{th}$  を越えた場合に  $c$  の値を小さくすると仮定することで、 $n$  に上限を持たせるのと同じ効果が期待できる。

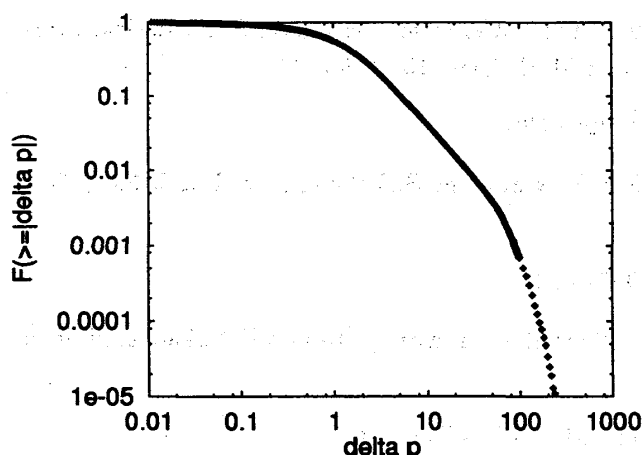


図 8: カットオフを考慮した確率過程の累積分布を log-log プロットした。指数的なカットオフをもつ分布になっている。

#### 4 まとめ

市場価格の変動に見られるべき分布は、取引にともなう自発的変動と、過去の価格変動をランダムに増幅・減衰してフィードバックする項を考えた、簡単な確率過程によってモデル化することが可能である。そして、べき分布の係数は増幅・減衰の程度、すなわち、ディーラーの心理的要因を表わしていると推測される。

また、実際の価格変動に見られるカットオフは、過去との相関を失なった結果であり、その原因は、ディーラーが過大な価格変動に対し、特異的に応答することに相当すると推測できる。

#### 5 課題と方針

本研究は仮定の上に成り立っているため、現実の証券市場での検証が必要である。検証項目としては以下の点が挙げられる。

- 取引の発生間隔は Poisson 仮定になっているのか
- 景気動向によってべき分布の係数  $\beta$  は変化するのか

また、モデルに対する課題として以下のことが考えられる。

- 現在の離散的モデルの連続化
- 複数銘柄間の相互作用の考慮
- 価格の短期予測問題への応用

また、(9) 式自身、興味深い式であり、物理的には粘性係数がゆらぐ Langevin 方程式、工学的には離散系システムの状態方程式と関連すると考えられる。経済活動のモデルにとどまらず、多方面への適応も期待できる。

#### 参考文献

- [1] T.Hirabayashi, H.Takayasu, H.Miura and K.Hamada, The Behavior of a threshold model of market price in stock exchange, *Fractals* 1, (1993) 29.
- [2] Rosario N. Mantegna & H. Eugene Stanley *Nature* 376, (1995) 46-49

- [3] S.C.Venkataramani *et. al.*, *Physica D* **96**, (1996) 66; A.Cênys and H.Lustfeld, Statistical properties of the noisy on-off intermittency, *J.Phys.A: Math Gen.* **29** (1996) 11
- [4] M.Lévy and S.Solomon, *Int.J.Mod.Phys.C* **7** (1996) 595
- [5] S.B.Pope, *Energy Combust.Sci.* **11**, (1985) 119; V.Eswaran and S.B.Pope, *Phys.Fluids* **31**, (1988) 506
- [6] S.Q.Zhu, *Phy.Rev.A* **41**, (1990) 1689 ; **45**, (1992) 8148
- [7] Y.Kuramoto and H.Nakao, *Phys.Rev.Lett* **76** (1996) 4352; Y.Kuramoto and H.Nakao, submitted to *Phys.Rev.Lett*
- [8] H.Takayasu, A-H.Sato and M.Takayasu, submitted to *Phys.Rev.Lett*
- [9] A-H.Sato and H.Takayasu, preparing