

Viscous fingering における分岐現象

愛媛大理 松岡千博

放射状 Hele-Shaw cell において、グリセリンや高分子溶液などの高粘性流体を空気で置換すると境界の分岐現象がおこる (Fig.1)。境界は Darcy 則によって与えられる速度に従って動く [1]。この速度は多孔質体を通過する浸透流の速度であり、Saffman-Taylor finger のように形を変えずに動く finger の場合には一定の値をとる [2]。

分岐が生じるような系では、空気のわき出し流量を一定に保っても finger が細くなるに従ってその速度が大きくなることが報告されている [3]。従って系は非定常であり、非平衡の状態にある。単位時間あたりのわき出し流量は一定であるから、この非定常非平衡性は source の性質によるものではなく、境界の不安定性のみに関係しているとみなすことができる。本研究では、境界における系のエネルギー変分を考察することによって、境界条件そのものの不安定性とそれによって生じる finger の分岐のメカニズムを明らかにする。

今、境界面がある無限小変位を行ったものとする。この変位に要する仕事 δR は系の歪エネルギーの変化 δW と表面積の変化 δA とを用いて

$$\delta R = \delta W + \alpha \delta A \quad (1)$$

と書ける。ここで α は表面張力係数である。 δW は空気 (流体 1) と粘性流体 (流体 2) のそれぞれの歪エネルギー δW_1 、 δW_2 の和

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 \quad (2)$$

で与えられる。系の無限小変位 δu_i に対して δW_k ($k = 1, 2$) は

$$\delta W_k = \int \int_A \pi_k^{ij} n_j \delta u_i dA \quad (3)$$

である。ベクトル n_j は面 dA の法線方向を向き、 $1 \rightarrow 2$ の方向を正にとると $2 \rightarrow 1$ では $-n_j$ となる。また応力テンソル π^{ij} は

$$\pi_k^{ij} = -p_k \gamma^{ij}(t) - \eta_k \frac{d\gamma^{ij}}{dt} \quad (4)$$

と書くことができる [4]。ここで p_k 、 η_k はそれぞれの流体が境界面に及ぼす圧力、粘性係数である。また $\gamma^{ij} = \gamma^{ij}(t)$ は物体計量テンソルである。

今、境界面 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi^i)$ が微小変位を行って

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi^i) + \epsilon w(\xi^i) \mathbf{e}_n(\xi^i) \quad (5)$$

なる曲面になったとする。ここで $\epsilon > 0$ は十分小さい定数であり、 e_n は境界の法線方向の単位ベクトルである (Fig.2)。変形前の境界面の面積を A 、変形後の面積を A' とすれば

$$A = \iint \sqrt{\gamma} d\xi^1 d\xi^2, \quad A' = \iint \sqrt{\gamma'} d\xi^1 d\xi^2, \quad (6)$$

で与えられるから

$$\begin{aligned} \delta A &= A' - A \\ &= \iint \sqrt{\gamma} \left[-2\epsilon w H + \epsilon^2 (w^2 K + \frac{1}{2} \gamma^{ij} w_{,i} w_{,j}) + \dots \right] d\xi^1 d\xi^2 \\ &= \delta^{(1)} A + \delta^{(2)} A + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式において $O(\epsilon)$ の項が第一変分 $\delta^{(1)} A$ 、 $O(\epsilon^2)$ の項が第二変分 $\delta^{(2)} A$ に相当する。ただし $w_{,i} = \frac{\partial w}{\partial \xi^i}$ とする。 H, K はそれぞれ曲面の平均曲率、ガウス曲率である。 ξ^2 方向 (平板に垂直方向) の厚さ b が非常に小さいという Hele-Shaw cell の性質を用いると $K = 0$ となる。また、 w は ξ^2 方向に平均をとった \bar{w}

$$\bar{w} = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} w(\xi^1, \xi^2) d\xi^2$$

を再び w とおいたものであることを注意しておく。ここで ξ^1 を境界の周長を parametrize する s という変数に書き換え、 $2H = \kappa$ とおくと (7) より

$$\delta^{(1)} A = -b \int \kappa ds \quad (8)$$

$$\delta^{(2)} A = \frac{b}{2} \int w_{,s}^2 ds \quad (9)$$

が得られる。変分は e_n 方向にとっているので、(3) における $\delta u_i = \epsilon w e_n$ である。空気 ($k=1$) は理想流体とみなせるので、(4) 式の第二項は 0 とおいてよい。歪エネルギーの変分は

$$\begin{aligned} \delta W &= \iint \pi^{ij} e'_j dA'_i \cdot \epsilon w e_n \\ &= \iint \pi^{ij} e'_j \sqrt{\frac{\gamma'}{\gamma}} \epsilon w e_n dA \\ &= \delta^{(1)} W + \delta^{(2)} W + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

となる。ここでプライムがついているものは、はすべて変形後の物理量を表す。(4)、(8)、(9)、(10) より、仮想仕事 δR の第一変分 $\delta^{(1)} R = 0$ とおくことによって境界の平衡条件

$$p'_1 = \alpha \kappa + \eta_2 \dot{\gamma}^{33} \quad (11)$$

が得られる。ただし 2 から見た境界が凹であることから、 κ の符号を逆転させてある。Viscous fingering において境界が分岐するときには、その点において境界の曲率 $\kappa = 0$ となる。このとき、境界の様子は第一変分だけからは定まらない。分岐後の境界の様子を知るために、第二変分 $\delta^{(2)} R$ を極値化する。すなわち

$$\delta^{(1)}[\delta^{(2)}R] = 0$$

を考えると (9)、(10) より

$$w_{,ss} + \kappa^2 w = 0 \quad (12)$$

なる式が得られる。(12)式は $\kappa = 0$ に turning point を持つ。Fig.3 は (12) 式を解いて境界の変位の様子を描かせたものである。 $\kappa = 0$ の点近傍で変位 $w = 0$ はべき的減衰を示し、これらの turning point が生じる s の値の両側で w の位相は急激に変わる。

本研究では、境界の熱力学的安定性を調べることによって viscous finger の分岐現象を論じた。ここで解析のモデルとしたのは、グリセリンのようなニュートン流体である。非ニュートン流体では分岐の様子はさらに複雑であるが (Fig.4)、この場合でも同様の議論が展開できる。ただし、非ニュートン流体の場合は (4) で与えられるレオロジー状態方程式の表式がもう少し複雑になる。

謝辞

著者は、写真提供を快諾下さった三重大工学部の川口正美氏に感謝の意を表する。

参考文献

- [1] P. G. Saffman and G. I. Taylor, Proc. R. Soc. Lond. A **245**, 312 (1958).
- [2] P. G. Saffman, Q. J. Mech. Appl. Maths. **12**, 146 (1959).
- [3] K. Makino, M. Kawaguchi, K. Aoyama and T. Kato, Phys. Fluids **7**, 455 (1995).
- [4] A. S. Rodge, *Elastic Liquids* (Academic Press, New York, 1964).

図説明

- Fig.1 ニュートン流体における viscous fingering (写真提供 M. Kawaguchi)
- Fig.2 境界における座標系
- Fig.3 境界の変位 (ニュートン流体)
- Fig.4 非ニュートン流体における viscous fingering (写真提供 M. Kawaguchi)

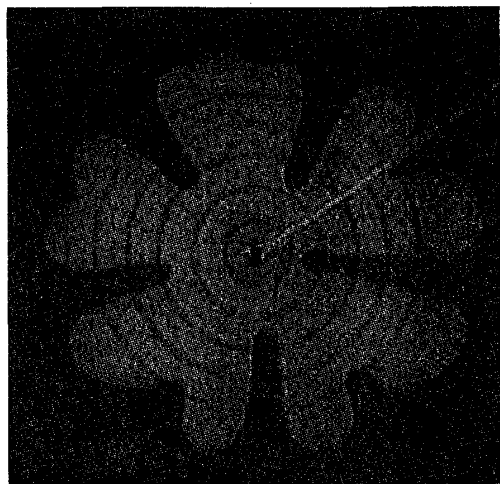


Fig.1

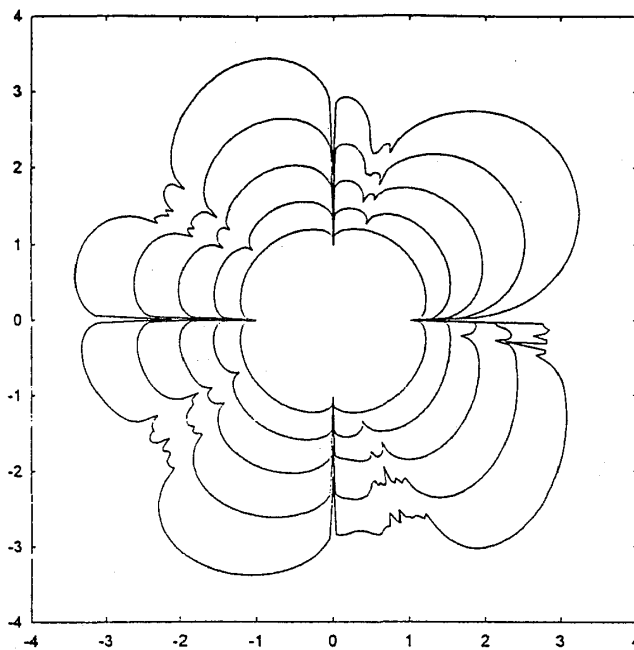


Fig.3

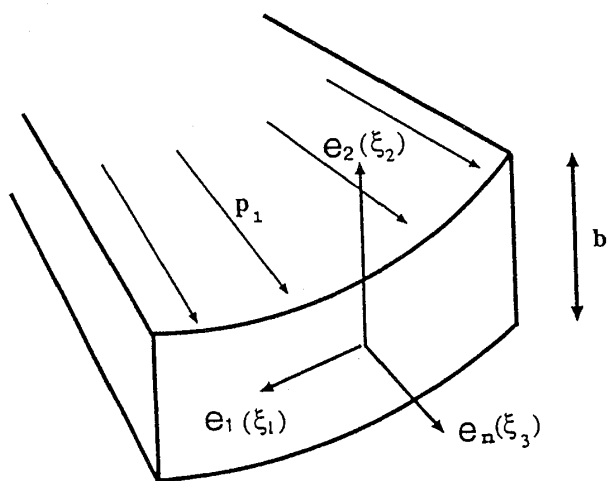


Fig.2

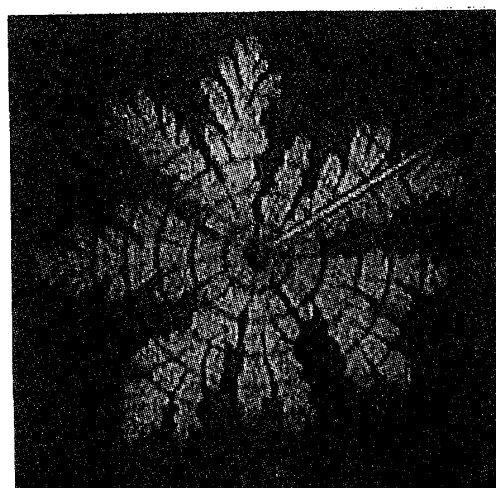


Fig.4