# Separatrix splitting の高次元効果

名古屋大学理学部　平田 吉博†、小西 哲郎

## • Introduction

ハミルトン系がカオスである時、そのポアンカレ写像においてセパラトリクスは分離し、安定・不安定多様体は有限角度で交わる。このセパラトリクスの分離現象は、ハミルトン系のカオス発生のプロセスの内で最も基本的である。よって、ポアンカレ写像のモデルとなるシンプレクティック写像の不安定多様体を考察する事は、カオス的なハミルトン系のダイナミクスを理解する上で重要である。近年、2次元シンプレクティック写像においてその不安定多様体を特異摂動により解析的・漸近的に構成する方法が様々な系において報告されている [1]。我々はこの解析を4次元シンプレクティック写像に拡張し、同様に不安定多様体が得られる事を示し、その高次元効果について議論した。

## • Asymptotic Expansions of Unstable Manifolds

我々は次の4次元シンプレクティック写像、

$$\begin{cases} p_1' &= p_1 - \epsilon\left(2q_1^3 - q_1\right) - \epsilon^3\kappa q_2^2 \\ q_1' &= q_1 + \epsilon p_1' \\ p_2' &= p_2 - \epsilon\left(2q_2^3 - q_2\right) - 2\epsilon^3\kappa q_1 q_2 \\ q_2' &= q_2 + \epsilon p_2' \end{cases} \tag{1}$$

の不安定多様体が解析的に得られる事を示した。また、このシンプレクティック写像 (1) の母関数は、

$$W = \sum_{j=1}^{2}\left(p_j' q_j + \epsilon\left(\frac{1}{2}p_j'^2 + \frac{1}{2}q_j^4 - \frac{1}{2}q_j^2\right)\right) + \epsilon^3\kappa\tilde{J} \tag{2}$$

$$\tilde{J} = q_1 q_2^2 \tag{3}$$

である。

図1に不安定多様体の解析解と、その上に初期値をとり (1) 式により時間発展させた数値解を $(q_1, p_1)$ 平面に射影して示す。この図より、解析解は数値解をよい精度で近似している事がわかる。

今回扱ったシンプレクティック写像 (1) の母関数 (2) はカップリング項 $\tilde{J} = q_1 q_2^2$ を含むが、ポテンシャルは double well 型であるため $\kappa = 0$ でもセパラトリクスが存在する。しかし我々の計算により、カップリングはホモクリニック構造に定量的にのみ寄与し、今回の近似の範囲では見えてこない事がわかった。またカップリング項がホモクリニック構造に寄与するためには、母関数 (2) において $\tilde{J} = q_1^\alpha q_2^\beta (\alpha + \beta > 6)$ のような高次のカップリングか、$\tilde{J} = p_1' q_2$ のような座標 - 運動量カップリングを与えればよい事もわかった [2]。

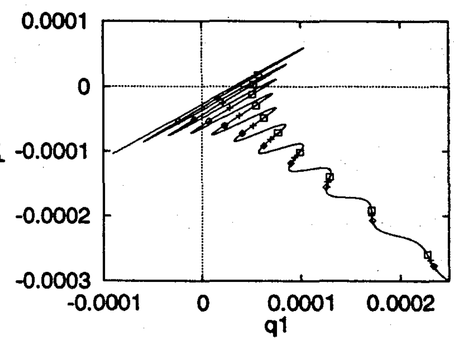


図 1: 不安定多様体の解析解と 3 つの数値解。パラメータは $\epsilon = 0.30, \kappa = 1.0$。

## • Discussions

本研究は、これまでに得られていた2次元シンプレクティック写像に対する手法の4次元への拡張である。一般に、$2N$ 次元シンプレクティック写像は $(N+1)$ 自由度ハミルトン系のポアンカレ写像のモデルという意味を持つため、この拡張により3自由度ハミルトン系の解析が可能になる事が期待される。今後は上に挙げたような、明らかな高次元効果の期待される系にこの手法を拡張する予定である。

[1] V. Hakim and K. Mallick, Nonlinearity, **6** (1993) 57–70 ; A. Tobvis, M. Tsuchiya and C. Jaffé, preprint (1996) ; K. Nakamura and M. Hamada, J. Phys., A **29** (1996) 7315–7327.

[2] 平田吉博, 修士論文 (1997)

†e-mail address : yhirata@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp