On Divergence of Decoherence Factor in Quantum Cosmology *

岡村　隆 †
東工大理 物理

平成8年 4月 30日

1 Introduction

量子論を普遍的な理論と考える立場では、古典論はある条件の下で、そこから導かれるべき近似理論である。さらにこの立場では、宇宙でさえも量子論に従うと考えられるが、実際に我々が観測する宇宙は非常に良い精度で古典論に従っている。

この "量子宇宙からの古典的宇宙の出現" など、古典化の問題を説明するためには、非ユニタリー発展が必要であるが、宇宙の場合、それは自然に導入される。なぜなら、我々の観測できる範囲は、全宇宙の一部であり、それ以外は環境（熱浴）として働くからである。（このことは、古典化の問題に限らず、実際に我々が観測する事象を記述するためにも、観測可能な宇宙を開いた系として記述し、その縮約された dynamics を理解することが重要であることを意味する。）

"Environment Induced Superselection Rules" [1] のパラダイムに従って、toy model を通して宇宙の古典化を議論する仕事が数々なされており、一応の成功が収められているが、いくつかの問題点が残されている。その一つに、perfect decoherence の問題がある。[2, 3, 4] これは、環境系が無限自由度であることから、density matrix の非対角項が完全に 0 となる結果（無限積の発散）を与えるもので、これにより、対応する Wigner 関数が peak を持てなくなり、古典化の条件の 1 つである、classical correlation が満たせなくなるという問題である。

通例は、適当に cutoff を導入してこの困難を避けるが、結果（宇宙が古典化されているか否か）が、この cutoff に強く依存してしまう。[2, 5, 6] またこの発散は通例の繰り込み処方では取り除けないことが知られている。[4]

perfect decoherence の問題以外に、環境変数の選択の自由度による reduced density matrix の任意性の問題がある。[7] 例えば、scalar field Φ による、scale factor a （宇宙の大きさを表す変数）の decoherence を議論する際、環境変数として Φ や $a\Phi$ など、様々なものを用いることができ、それに応じて a の reduced density matrix は異なるものとなるが、どの選択が自然なのだろうか？

* Prog.Theor.Phys. 95(1996),565
† E-mail:okamura@th.phys.titech.ac.jp

この任意性は、着目変数 a の共役運動量を変化させ、結局、全 Hilbert space 中に着目系の Hilbert space が占める部分を変化させる。これから分かるように、環境変数の選択の任意性は、system/environment の分離の任意性に因るものである。通常の観測問題においては、何を観測して、何を観測しないかは、その問題設定によって既に決まっているのかも知れないが、宇宙論的状況においては、何を観測する、しないかは、あらかじめ与えられていない。

本稿では、perfect decoherence を引き起こす発散が環境変数の選択に依存し、適当な選び方によってはこの発散が取り除けることを示す。

2 Classicality Conditions in Quantum Cosmology

量子宇宙は Wheeler-DeWitt equation によって記述される。

$$\hat{H}\Psi(a,\phi)=0$$

一方、古典宇宙は semiclassical Einstein equation に従う。

$$G_{\mu\nu}=\langle T_{\mu\nu}\rangle$$

semiclassical Einstein equation を Wheeler-DeWitt equation から導くために必要な条件は何か、またどのようにして導くか、が量子宇宙における古典化の問題の一つである。

そもそも "古典的" の定義が問題であるが、現在のところ、古典化には次の二つの条件が必要であると考えられている。

1. Quantum Decoherence (QD) （量子干渉性の消失）
2. Classical Correlation (CC) （位置変数と運動量に相関ができる → 古典運動方程式に従う）

また、この二つの条件が満たされているか否かを判定するための道具として、以下のものがそれぞれ用いられる。

1. QD $\longrightarrow$ density matrix の非対角項の消失
2. CC $\longrightarrow$ Wigner function が sharp な peak を持つ

QD と CC を総合的にかつ定量的に扱いたいのだが、まだこれといった measure がないのが現状である。

3 Classicalization in Quantum Cosmology

ここでは、量子宇宙論における古典化の問題を、通常どのように扱うかを概観する。toy model として、一様等方宇宙（その自由度は scale factor a で表される）の古典化を議論する。非ユニタリー発展させるために、一様等方宇宙を scalar 場（外界）に結合させ、その縮約された dynamics を議論する。

この toy model の全系の Hamiltonian は、概略として、次のようになる。

$$H = -\frac{P_a^2}{2M^2} + M^2V(a) + h(\phi, \pi; a) \tag{1}$$

ここで、$h(\phi, \pi; a)$ が scalar 場のハミルトニアンである。宇宙を扱っている特徴として、その mass scale M (Planck scale) が scalar 場のそれより非常に大きいという点がある。

この Hamiltonian を量子化すると、Wheeler-DeWitt equation が得られる。

$$\left[\frac{1}{2M^2}\frac{\partial^2}{\partial a^2} + M^2V(a) + h(\phi, -i\frac{\partial}{\partial\phi}; a)\right]\Psi(a, \phi) = 0 \tag{2}$$

(この式は、相対論が一般座標変換に対して共変な gauge 理論であることから、その物理的状態は、陽に時間変数に依存してはいけない、という事実から導かれる $\rightarrow \partial\Psi/\partial t = 0$)

波動関数 Ψ から、全系の密度行列と scale factor の reduced density matrix 、Wigner 関数は次のように与えられる。

$$\rho(a, \phi; a', \phi') = \Psi(a, \phi)\Psi^*(a', \phi') \tag{3}$$

$$\rho_{red}(a, a') = \int d\phi \rho(a, \phi; a', \phi) \tag{4}$$

$$W(a, P_a) = \int d\Delta \exp(-iP_a\Delta)\rho_{red}(a + \frac{\Delta}{2}, a - \frac{\Delta}{2}) \tag{5}$$

Wheeler-DeWitt equation を解いて、reduced decsity matrix と Wigner function を評価し、二つの古典化条件が満たされているかを議論するのだが、Wheeler-DeWitt equation を解く際に、宇宙の mass scale が大きい ($M \gg m_{scalar} = 1$) ことにより、Born-Oppenheimer 近似を用いて、波動関数に次の仮定を置く。

$$\Psi(a, \phi) = C(a)e^{iS(a)}\chi(\phi; a) \tag{6}$$

$$S(a) = O(M^2) \tag{7}$$

Wheeler-DeWitt equation を M^{-1} で展開して、最低次で scale factor に対する Hamilton-Jacobi equation を得る。

$$-\frac{1}{2M^2}\left(\frac{dS(a)}{da}\right)^2 + M^2V(a) = 0 \tag{8}$$

次のオーダーで scalar 場に対する Schrödinger equation を得る。

$$i\frac{\partial\chi}{\partial t} = h\chi \tag{9}$$

$$h = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{2}\Omega^2(a)\phi^2 \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{dS}{da}\frac{d}{da} \tag{11}$$

また、先の波動関数の仮定の下で、reduced density matrix を書くと、次のようになる。

$$\rho_{red}(a, a') = \rho^{(0)}(a, a')I(a, a') \tag{12}$$

$$\rho^{(0)}(a, a') = e^{i[S(a) - S(a')]}C(a)C^*(a') \tag{13}$$

$$I(a, a') = \int d\phi \chi(\phi; a)\chi^*(\phi; a') \tag{14}$$

ここで、decoherence factor $I(a,a')$ を導入した。scalar 場の波動関数の規格化から、

$$I(a,a) = \int d\phi |\chi(\phi;a)|^2 = 1 \tag{15}$$

$$|I(a,a')|^2 \leq \int d\phi |\chi(\phi;a)|^2 \times \int d\phi |\chi^*(\phi;a')|^2 = 1 \tag{16}$$

が従い、reduced density matrix の decoherence を表している。

以上から分かるように、量子宇宙の古典化の問題では、まず Hamilton-Jacobi equation の解を求め、次にその解を background 宇宙として、その上で進化する scalar 場を解いて、最後に decoherence factor を計算し、その振る舞いを議論する。

実際には、Schrödinger equation を解かなくても、見通しを得ることができる。scalar 場は、初期に、ある真空状態にあったとして、その波動関数は Gaussian state だと仮定する。

$$\chi = \left(\frac{B_R(t)}{\pi}\right)^{1/4} \exp[iA(t) - \frac{1}{2}B(t)\phi^2] \tag{17}$$

分散 $B(t)$ は、Klein-Gordon equation の mode 関数と次のように結び付けられる。

$$B(t) = -i\frac{\dot{u}^*(t)}{u^*(t)} \tag{18}$$

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \Omega^2(t)u(t) = 0 \tag{19}$$

Gaussian ansatz の下では、decoherence factor は

$$I(a,a') = \exp[i(A(a) - A(a'))]\Big[\frac{4B_R(a)B_R(a')}{(B(a)+B(a'))^2}\Big]^{1/4} \tag{20}$$

と書かれ、その振る舞いは、典型的に

$$I(a+\frac{\Delta}{2}, a-\frac{\Delta}{2}) \sim \exp\Big[i\Delta(A'(a) - \frac{B_I'(a)}{4B_R(a)})\Big] \tag{21}$$

$$\times \exp[-\sigma^2\Delta^2] \tag{22}$$

$$\sigma^2 = \frac{|B'(a)|^2}{16B_R^2(a)} \tag{23}$$

となる。また、その Wigner 関数は

$$W(a,P_a) \sim C^2(a)\int d\Delta \exp\Big[-i\Delta(P_a - S' - A'(a) + \frac{B_I'(a)}{4B_R(a)})\Big] \tag{24}$$

$$\times \exp[-\sigma^2\Delta^2] \tag{25}$$

$$\sim C^2(a)\sqrt{\frac{\pi}{\sigma^2}}\exp\Big[-\frac{(P_a - S' - A'(a) + \frac{B_I'(a)}{4B_R(a)})^2}{\sigma^2}\Big] \tag{26}$$

となる。これから、強い decoherence ($\sigma^2\Delta_{typical}^2 \gg 1$) と強い classical correlation ($\sigma^2 \ll < P_a >^2$) は排他的な関係にあると分かる。これは、不確定性原理から、宇宙の大きさ a が確定する ($\sigma^2 = \infty$) とその共役運動量は完全に不確定となるので、当然予想されることである。

さて、Wigner 関数が peak を持てば、それは宇宙の大きさ a とその共役運動量との相関が

$$P_a = S'(a) + A'(a) - \frac{B_I'(a)}{4B_R(a)} \tag{27}$$

であると予言する。scalar 場と結合していない時に古典論で予想される相関は $P_a = S'(a)$ であることから、上式の右辺第2、3項目が scalar 場からの back reaction を表していることがわかる。そしてこれが、semiclassical Einstein equation に導く。

$$-\frac{P_a^2}{2M^2} + M^2 V(a) = -\left(\dot{A} - \frac{\dot{B}_I(a)}{4B_R(a)}\right) \tag{28}$$

$$= \langle h \rangle \tag{29}$$

4 Estimation of D.F. in simple example

前節で、2つの古典化条件 decoherence と classical correlation が満足されていれば、semiclassical Einstein equation が導かれることを見た。そこで実際に、2つの条件が満たされているかを調べる。

ここでは一例として、massless scalar 場が deSitter 宇宙と結合しているモデルを考える。このモデルで評価される decoherence factor は 0 となる。(perfect decoherence)

$$B(a) = (k^2-1)a^2 \frac{k + i\ (H^2a^2-1)^{1/2}}{k^2 + H^2a^2 - 1} \tag{30}$$

$$|I(a,a')| = \prod_{k=2}^{\infty}\left[1 + \frac{(a^2-a'^2)^2}{4a^2a'^2}\right. \tag{31}$$

$$\left. + \frac{(a'^2\sqrt{H^2a^2-1} - a^2\sqrt{H^2a'^2-1}\ )^2}{4k^2a^2a'^2}\right]^{-k^2/4} \tag{32}$$

$$< \prod_{k=2}^{\infty}\left[1 + \frac{(a^2-a'^2)^2}{4a^2a'^2}\right]^{-k^2/4} = 0\,, \qquad \text{for} \qquad a \neq a'\,. \tag{33}$$

scalar 場は無限自由度であることを反映して、decoherence factor は各 mode からの寄与の積(無限積)で与えられ、紫外発散している。

このモデルに限らず、多くの例で perfect decoherence が起こることが知られている。これから、古典化条件の一つである、classical correlation が満足されず、前節の議論が成立しないことがわかる。Introduction で述べたように、この困難は通例、適当に cutoff を導入して避けられるが、二つの古典化条件が満たされているかどうかはこの cutoff に強く依存する。またこの発散は通例の繰り込み処方では取り除けないことが知られている。

5 System/Environment splitting の任意性

前節で、decoherence factor が(無限積の意味で)発散することをみた。しかしこの発散は、不変的なものでなく、環境変数の選択に依存する。これは、reduced density matrix が環境変数の選択に依存することから生じる。

環境変数を ϕ とする立場では、reduced density matrix はつぎのように定義される。

$$\rho_{red}(a, a') = \int d\phi \; \rho(a, \phi; a', \phi) \tag{34}$$

一方、$f = ag(a)\phi$ ($g(a)$ は任意関数; $ag(a)$ としたのは単なる便宜上）を環境変数に選ぶと、reduced density matrix は

$$\bar{\rho}_{red}(a, a') = \int df[(ag(a))(a'g(a'))]^{-1/2} \; \rho\Big(a, \frac{f}{ag(a)}; a', \frac{f}{a'g(a')}\Big) \tag{35}$$

と定義される。対角成分 $a = a'$ については、両者は一致するが、非対角成分は一般に一致しない。

変数 (a, ϕ) の共役運動量をそれぞれ (P_a, P_ϕ) とすると、変数 (a, f) の共役運動量 (Π_a, Π_f) は

$$\Pi_a = P_a - \Big(\frac{d}{da}\ln ag(a)\Big)\phi P_\phi \tag{36}$$

$$\Pi_f = \frac{P_\phi}{ag(a)} \tag{37}$$

で与えられる。つまり、環境変数の選択の任意性は、着目系を (a, P_a) で記述するか、(a, Π_a) で記述するかの任意性からもたらされると考えることが出来る。

6 System/Environment splitting と D.F. の発散

前節で見た reduced density matrix の定義の任意性を利用して、decoherence factor が発散しないためには、環境変数をどのように選択すべきかを考える。

時空の計量と scalar 曲率をそれぞれ $g_{\mu\nu}$ 、R として、scalar 場と相互作用している作用関数は、

$$\mathcal{L} = \frac{M^2}{12}\sqrt{-g}\;R - \frac{\sqrt{-g}}{2}[(\nabla\Phi)^2 + m^2\Phi^2 + \xi R\Phi^2] \tag{38}$$

と与えられる。ここで、ξ は scalar 場の曲率結合定数で、無次元量である。ここでも、一様等方宇宙の古典化を議論する。

環境変数の選択の自由度を、任意関数 $g(a)$ を用いて、次のように導入し、f_k を環境変数とする。

$$\Phi(t, \vec{x}) = \sum_n \frac{f_k(t)}{ag(a)} Y_k(\vec{x}) \tag{39}$$

ここで、$Y_k(\vec{x})$ は空間変数についての mode 関数である。a と f_k を用いて、Hamiltonian は次のようになる。

$$H = \frac{1}{2}G^{\mu\nu}P_\mu P_\nu + U\,, \quad X^\mu = (a, \{f_k\}) \tag{40}$$

$$U = M^2V(a) + \sum_k \frac{\tilde{\omega}_k^2}{2g^2} f_k^2 \tag{41}$$

$$\tilde{\omega}_k^2 = k^2 + m^2a^2 + (6\xi - 1)K \tag{42}$$

$$G^{\mu\nu} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{aa} & \lambda_k \\ \lambda_{\bar{k}} & \frac{g^2}{a}\delta_{\bar{k}k} \end{bmatrix} \tag{43}$$

$$\mathbf{G}_{aa} = -M^2 , \qquad \mathbf{G}^{aa} = -\frac{1}{M^2} \tag{44}$$

$$\lambda_k = \mathbf{G}^{aa}\frac{d}{da}\Big(\ln\frac{g}{a^{6\xi-1}}\Big)f_k \tag{45}$$

前にも見たように、decoherence factor は各 mode からの寄与の無限積で与えられるが、decoherence factor が発散しない、

$$I(a,a') = \prod_k I^{(k)}(a,a') \neq 0 \tag{46}$$

ためには、high-k limit で $I^{(k)}(a,a') = 1$ でなくてはならない。つまり、high-k limit で f_k は a と相互作用しなくなる必要がある。相互作用項は、Eq.(41) の振動数項と、Eq.(43) の momentum 結合である。まず、振動数項から、許される環境変数は、

$$\frac{\tilde{\omega}_k^2}{2g^2}f_k^2 \sim 0 \longrightarrow g(a) = \text{constant} \tag{47}$$

と分かる。また、momentum 結合から、曲率結合定数として許されるのは、

$$\lambda_k = \mathbf{G}^{aa}\Big(\ln\frac{g}{a^{6\xi-1}}\Big)' f_k = 0 \longrightarrow \xi = \frac{1}{6} \tag{48}$$

のみとなる。

7 Summary

量子宇宙の古典化では、古典化の条件として、quantum decoherence (QD) と classical correlation (CC) の両者を要請する。そして、この2つの条件は、不確定性原理から分かるように排他的な関係にある。これにより、観測問題などで期待される、完全な QD (perfect decoherence) は、CC の条件を満たせない。

さて、量子宇宙では、環境系は当然、無限自由度系となるが、一般に無限自由度系では perfect decoherence が起きると期待され、[8] 実際、多くのモデル計算で確かめられているが、これでは前述したように CC 条件を破ってしまう。

また、宇宙論的状況では、環境系を内的に用意しなければならず、常に着目系と環境系の境界には任意性がつきまとう。

本稿で見てきたことは、この後者の任意性を利用することで、perfect decoherence の問題を回避でき、また逆に、うまく着目系と環境系の境界を選ばないと、着目系は古典的にならず、古典的にしようとするなら、境界の任意性は大幅に制限される、ということであった。そして、上手な境界の選び方は、雑な言い方をすると、”着目系が実質的には環境系の有限自由度としか結合しないようにする”、と特徴付けられる。

参考文献

[1] W.H.Zurek, Phys.Rev.**D24**(1981),1516;**26**(1982),1862.

[2] C.Kiefer, Class.Quantum.Grav.**4**(1987),1369.

[3] J.P.Paz and S.Sinha, Phys.Rev.**D44**(1991),1038.

[4] J.P.Paz and S.Sinha, Phys.Rev.**D45**(1992),2823.

[5] J.J.Halliwell, Phys.Rev.**D39**(1989),2912.

[6] S.Habib and R.Laflamme, Phy.Rev.**D42**(1990),4056.

[7] R.Laflamme and J.Louko, Phys.Rev.**D43**(1991),3317.

[8] この辺りのことについては、清水 明氏の解説がある。数理科学 1993 年 11 月号