

Gauss 状態のフラクタル次元

東京理科大学 理工学部 井上 啓

序論

Mandelbrot は, 1982 年, 著書 “The Fractal geometry of nature” の中で, フラクタル幾何学を提唱した [7]. 彼は, 自然の形や幾何模様は部分を拡大すると, 全体と同じような形をしているという自己相似性という性質を利用し, 自然現象などの複雑な事象を目に見える形として表現しようとした. すなわち, 彼は, 全体と部分は, 同じ複雑さをもっていると考えたのである. 幾何学図形のフラクタル次元は, このような自己相似な図形として表される自然の形の “複雑さ” を定量的に表す一つの指標であり, 非整数値を取ることから, ユークリッド次元では区別できない形の複雑さを評価することが出来る.

一方, 数理的に現象の複雑さを解析する研究では, 主に現象を古典系や量子系の状態として記述し, その系の複雑さを分析するといった方法が従来から用いられてきた. この系の複雑さを定量的に表す指標と考えられているのが, エントロピーである. 特に, Shannon エントロピーは, 完全事象系 (古典離散系) の複雑さを表す有用な指標として知られている. ところが, 状態が連続的な確率密度関数として表される古典連続系では, Shannon エントロピーの値が, 通常無限大になってしまうため, 系の複雑さを区別出来ない. また, Shannon エントロピーの形式的な拡張とも微分エントロピー (Boltzmann-Gibbs のエントロピー) も, 負の値も取ってしまうため, あまり具合がよくない. こうした状況の中で, Kolmogorov は, 確率変数の ε -エントロピーを導入した. この値は有限値を取るので, 古典連続系上の確率変数の持つ複雑さを解析するために, この ε -エントロピーを用いることが出来る [3].

状態のフラクタル次元とは, このような数理的研究に対しても, 幾何学図形のフラクタル次元を様々な現象の用いるために, Ohya が情報理論の観点から幾何学図形のフラクタル次元を捕らえ直し, 一般の状態に拡張したものである [10, 11, 12, 9]. この Ohya の状態のフラクタル次元は, 確率変数の ε -エントロピーを一般の状態に拡張することによって導入された.

本研究は, Ohya によって導入された状態のフラクタル次元を用いて, 現象のフラクタル的な側面を数理的に特徴付け, エントロピーでは区別出来ない古典連続系の複雑さを表現しようとするものである. ここでは, 実際に, 状態が Gauss 測度として

与えられる Gauss 確率空間で, Ohya の状態の ε -エントロピーとフラクタル次元を計算し, Ohya の状態の ε -エントロピーと Kolmogorov の確率変数の ε -エントロピーとの比較と状態のフラクタル次元を用いた Gauss 測度の特徴付けを行った. この結果から, まず, Ohya の状態の ε -エントロピーは, 特殊な場合として Kolmogorov の確率変数の ε -エントロピーを含むものであることを示した. また, 全変動ノルムを用いて距離を定めると Gauss 測度のフラクタル次元の値が $1/2$ となり, 状態のフラクタル次元が, Kolmogorov 流では捕らえられない Gauss 測度のフラクタル的な側面を捕らえることを示した.

1. Kolmogorov の確率変数の ε -エントロピー

$(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ を確率空間, $M(\Omega)$ を全ての確率変数の集合, f, g を Ω 上で定義され, X 上に値をとる確率変数とする. μ_f, μ_g を確率変数 f, g によって導かれた確率測度とし, $\mu_f \otimes \mu_g$ は, f と g の直積測度, μ_{fg} は, f と g の結合確率測度を表すものとする. このとき, 確率変数 f と g の相互エントロピー $I(f, g)$ は,

$$\begin{aligned} I(f, g) &= S(\mu_{fg} | \mu_f \otimes \mu_g) \\ &= \sup \left\{ \sum_{A \in \tilde{\mathcal{A}}} \mu_{fg}(A) \log \frac{\mu_{fg}(A)}{\mu_f \otimes \mu_g(A)} ; \tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{P}(\mathcal{G}) \right\} \end{aligned}$$

ただし, $\tilde{\mathcal{A}} = \{A_1, \dots, A_n\} \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ は, Ω の可測有限分割 (i.e. $A_k \in \mathcal{G}$ ($k = 1, \dots, n$), $A_i \cap A_k = \phi$ ($i \neq k$), $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$) であり, $S(\bullet | \bullet)$ は, 相対エントロピーと呼ばれている.

この相互エントロピーの定義は, 次のように書き換えることが出来る.

<定理 1.1> (Gelfand-Kolmogorov-Yaglom の定理)[6, 2, 4]

$$\begin{aligned} I(f, g) &= S(\mu_{fg} | \mu_f \otimes \mu_g) \\ &= \begin{cases} \int_{X \times X} \frac{d\mu_{fg}}{d\mu_f \otimes \mu_g} \log \frac{d\mu_{fg}}{d\mu_f \otimes \mu_g} d\mu_f \otimes \mu_g & (\mu_{fg} \ll \mu_f \otimes \mu_g) \\ \infty & (\mu_{fg} \not\ll \mu_f \otimes \mu_g) \end{cases}, \end{aligned}$$

ただし, $\frac{d\mu_{fg}}{d\mu_f \otimes \mu_g}$ は, $\mu_f \otimes \mu_g$ に対する μ_{fg} の Radon-Nikodym 微分である.

相互エントロピーを使うと, 確率変数 f のエントロピー $S(f)$ は,

$$S(f) = I(f, f)$$

と表せる. このように, 相互エントロピーは, 古典連続系のエントロピーと非常に密接な関係を持ち, 正值性も満足する. そこで, Kolmogorov は, この相互エントロピーを用い, 古典連続系に ε -エントロピーの概念を導入した.

[定義 1.2] (確率変数の ε -エントロピー $S_K(f, \varepsilon)$) [3]

$$S_K(f; \varepsilon) = \inf_g \left\{ I(f, g); g \in \sqrt{\int_{X \times X} d(f, g)^2 d\mu_{fg} \leq \varepsilon} \right\},$$

ただし, $d(f, g)$ は, f と g の距離であり, 任意の $f = (f_1, \dots, f_n)$ と $g = (g_1, \dots, g_n)$ に対し, f と g の距離は,

$$d(f, g) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f_i - g_i|^2}$$

で与えられる. この $S_K(f, \varepsilon)$ は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して有限値を取り,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_K(f; \varepsilon) = S(f)$$

の関係が成り立つので, 確率変数 f の複雑さを近似的に表すものと考えられる. また, f が n 次元確率変数のとき, $S_K(f; \varepsilon)$ は, 以下で表される.

2. 古典連続系における状態の ε -エントロピーとフラクタル次元

この節では, 古典的な測度論の枠内で, Ohya によって導入された状態の ε -エントロピーとフラクタル次元の定式化を振り返る. この定義は, 1 節で述べた確率変数の ε -エントロピーよりもより一般的な古典系での ε -エントロピー定式化である.

ここでは, チャンネルという状態変化を表す表現を用いた状態の ε -エントロピーを説明する. チャンネルとは, 入力系のある状態 (確率測度) を出力系に伝える通信過程に対応するものであり, 数学的には入力の状態空間から出力の状態空間への状態変化を表す写像で記述される. 古典連続系におけるチャンネルの数学的な記述は, 以下で与えられる.

[定義 2.1] (チャンネル Λ^*)

$(\Omega_1, \mathfrak{S}_1)$ を入力空間, $(\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$ を出力空間とし, $P(\Omega_k)$ を $(\Omega_k, \mathfrak{S}_k)$ ($k = 1, 2$) 上の全

ての確率測度とする。このとき、 $P(\Omega_1)$ から $P(\Omega_2)$ への写像 Λ^* をチャネル (Markov kernel) と呼ぶ：

$$\bar{\mu}(Q) = \Lambda^* \mu(Q) = \int_{\Omega_1} \lambda(\omega, Q) d\mu(\omega) \quad \mu \in P(\Omega_1),$$

ただし、 λ は、次のような条件を満たす $\Omega_1 \times \mathfrak{S}_2$ から $[0, 1]$ への写像である。

- (1) 任意の $Q \in \mathfrak{S}_2$ に対して、 $\lambda(\bullet, Q)$ は、 Ω_1 上の可測関数
- (2) 任意の $\omega \in \Omega_1$ に対して、 $\lambda(\omega, \bullet) \in P(\Omega_2)$

このとき、 μ と $\bar{\mu}$ の合成状態 Φ は、以下で与えられる。

$$\Phi(Q_1, Q_2) = \int_{\Omega_1} \lambda(\omega, Q_2) d\mu(\omega) \quad Q_1 \in \mathfrak{S}_1, Q_2 \in \mathfrak{S}_2.$$

相互エントロピーは、合成測度 Φ と直積測度 $\Phi_0 = \mu \otimes \Lambda^* \mu$ の相対エントロピー $S(\bullet|\bullet)$ を用いて

$$\begin{aligned} I(\mu; \Lambda^*) &= S(\Phi|\Phi_0) \\ &= \begin{cases} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \frac{d\Phi}{d\Phi_0} \log \frac{d\Phi}{d\Phi_0} d\Phi_0 & (\Phi \ll \Phi_0) \\ \infty & (\text{その他}) \end{cases}, \end{aligned}$$

で定義される。ただし、 $\frac{d\Phi}{d\Phi_0}$ は、 Φ_0 に関する Φ の Radon-Nikodym 微分である。

以下では、簡単のため、 $(\Omega_1, \mathfrak{S}_1) = (\Omega_2, \mathfrak{S}_2) \equiv (\Omega, \mathfrak{S})$ の場合を考える。このとき、状態 $\mu \in P(\Omega)$ の ε -エントロピーは、次のように定義される [2].

[定義 2.2] (状態 $\mu \in P(\Omega)$ の ε -エントロピー) (チャネル表現)

$$S_0(\mu; \varepsilon) = \inf_{\Lambda^*} \{J(\mu; \Lambda^*); \|\mu - \Lambda^* \mu\| \leq \varepsilon\},$$

ただし、 $\|\bullet\|$ は $P(\Omega)$ 上のあるノルムであり、

$$J(\mu; \Lambda^*) = \sup_{\Gamma^*} \{I(\mu; \Lambda^*); \Gamma^* \mu = \Lambda^* \mu\},$$

ここで、 $J(\mu; \Lambda^*)$ は、 μ と Λ^* に関する極大相互エントロピーと呼ばれるものである。

つまり、入力状態 μ から出力状態 $\bar{\mu} (\equiv \Lambda^* \mu)$ へと写すチャネルは、1つとは限らないので、入力の情報を最も効率よく伝えるチャネルに対する相互エントロピーを考えるのである。

入力状態 μ と出力状態 $\bar{\mu} (\equiv \Lambda^* \mu)$ の合成測度 Φ が、 $\mu \otimes \Lambda^* \mu$ に関して絶対連続であるとき、上記の ε -エントロピーを次のように書き直すことが出来る。;

[定義 2.3] (状態 $\mu \in P(\Omega)$ の ε -エントロピー)

$$S_0(\mu; \varepsilon) = \inf_{\bar{\mu}} \{J(\mu, \bar{\mu}); \|\mu - \bar{\mu}\| \leq \varepsilon\},$$

ただし,

$$J(\mu, \bar{\mu}) = \sup_{\Phi} \{I(\mu, \bar{\mu}; \Phi); \Phi \ll \Phi_0\}.$$

ここで、状態の ε -エントロピーを上記の様に書き換えることが出来るのは、 Φ が $\mu \otimes \Lambda^* \mu$ に関して絶対連続であるとき、チャネル Λ^* と合成測度 Φ は、1対1に対応することによる。

この節の最後に、Ohya の状態の ε -エントロピーは、その定式化において、Kolmogorov の確率変数の ε -エントロピーと以下の点で異なっていることを強調しておく。

- (1) 状態の ε -エントロピーは、距離を状態間の距離として取る。
- (2) 極大相互エントロピー $J(\mu, \bar{\mu})$ という概念が新たに加わっている。

次に、古典連続系における状態のフラクタル次元について説明する。そこで、まず、幾何学図形のフラクタル次元のうち、尺度次元、容量次元について説明し、状態のフラクタル次元の導入の過程について振り返る。

[定義 2.4] (尺度次元)[7]

ある図形より作られた対象 (複雑な図形) が非常に粗い尺度 (これを 1 とする) で見たときその基本図形の個数を $N(1)$ とし、尺度 r で見たときの基本図形の数を $N(r)$ とする。このとき、

$$d_s = \log \frac{N(r)}{N(1)} / \log \frac{1}{r}$$

を尺度次元という。多くの実験の結果

$$N(r) \doteq r^{-d} N(1)$$

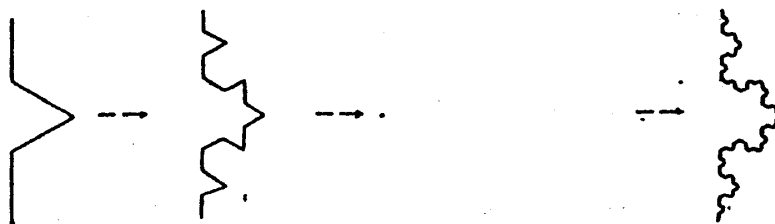
という関係が出てくる場合が経験的に多く、この量を定めたと考えられている。この基本法則が、自己相似性と呼ばれている。

[定義 2.5] (容量次元)[7]

ある集合 $X \subset (R^d)$ を直径が ϵ の凸集合 (立方体や球等) で被覆するのに必要なその凸体の最小個数を $N(\epsilon)$ とする。このとき、

$$d_C(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_X(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}},$$

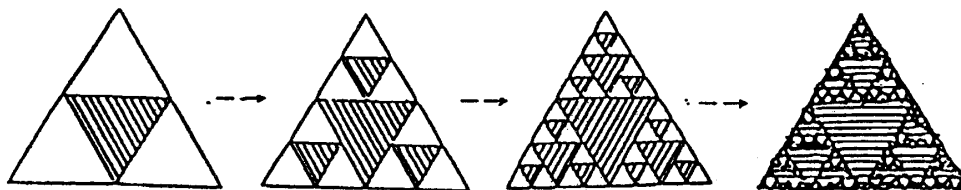
(例 2.6) コッホ曲線



コッホ曲線の尺度次元は、

$$\begin{aligned} d_s &= \frac{4}{1} / \log(1/\frac{1}{3}) \\ &= \frac{\log 4}{\log 3} \end{aligned}$$

(例 2.7) シルピンスキーのガスケット



直径 $\epsilon = (2\sqrt{3}/3) \cdot (1/2)^n$ の円で覆うときの円の個数は、 $N(\epsilon) = 3^n$ であるので、

$$d_C = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log 3^n / \log \left(\frac{1}{(2\sqrt{3}/3) \cdot (1/2)^n} \right) \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3^{n-1/2}}{\log 2^{n-1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1/2}{n-1} \right) \frac{\log 3}{\log 2} \\
&= \frac{\log 3}{\log 2}
\end{aligned}$$

ここで、容量次元の定義に注目してみると、分子にある $\log N_X(\varepsilon)$ は、距離空間の ε -エントロピーと呼ばれているものとなっている。この距離空間の ε -エントロピーは、第1節で説明した Kolmogorov の確率変数の ε -エントロピーとは異なるが、この ε -エントロピーも Kolmogorov が Tihomirov と共著の論文 [5] の中で導入した概念の1つである。

そこで、Ohya は、容量次元が ε -エントロピーにより定義されているという点に着目し、分子の $\log N_X(\varepsilon)$ の代わりに、状態の ε -エントロピーを用いれば、量子状態を含むような一般の状態に対してもフラクタル次元を定義することができると考え状態のフラクタル次元を定式化した [11, 12]。古典連続系では、次のように状態のフラクタル次元を与えることができる。

[定義 2.8] (状態 $\mu \in P(\Omega)$ の容量次元)

$$d_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S_0(\mu; \varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

3. Hilbert 空間上の Gauss 測度と Gaussian チャネル

この章では、Hilbert 空間上の Gauss 測度対し、Ohya の状態の ε -エントロピーとフラクタル次元を実際に計算し、Kolmogorov の確率変数の ε -エントロピーとの比較を議論するために、Baker によって扱われた Gaussian communication processes について振り返り [1, 14], Hilbert 空間上の Gauss 測度と Gaussian チャネルを説明する。

B を実可分な Hilbert 空間 \mathcal{H} 上のボレル σ -集合体、 μ を以下のような条件を満足する B 上のボレル確率測度とする。

$$\int_{\mathcal{H}} \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$$

さらに, $T(\mathcal{H})_+ (\equiv \{R \in \mathcal{B}(\mathcal{H}); R \geq 0, R = R^*, \text{Tr} R < \infty\})$ を \mathcal{H} 上の全ての有界で自己共役な正作用素の集合とする. そのとき, μ の平均ベクトル $m_\mu \in \mathcal{H}$ と共分散作用素 $R_\mu \in T(\mathcal{H})_+$ が存在して, 任意の $x_1, x_2, y \in \mathcal{H}$ に対して m_μ と R_μ が

$$\begin{aligned} \langle x_1, m_\mu \rangle &= \int_{\mathcal{H}} \langle x_1, y \rangle d\mu(y) \\ \langle x_1, R_\mu x_2 \rangle &= \int_{\mathcal{H}} \langle x_1, y - m_\mu \rangle \langle y - m_\mu, x_2 \rangle d\mu(y) \end{aligned}$$

で定義される. このとき, $\text{Tr}(R_\mu)$ は,

$$\text{Tr}(R_\mu) = \int_{\mathcal{H}} \|x\|^2 d\mu(x)$$

で表現される. \mathcal{H} 上のボレル測度 μ が, Gauss 測度であるとは, 次の条件を満たすことである.

[定義 3.1] (Gauss 測度 μ)

任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して, 実数値 m_x と $\sigma_x (> 0)$ が存在して

$$\mu\{y \in \mathcal{H}; \langle y, x \rangle \leq a\} = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \exp\left\{-\frac{(t - m_x)^2}{2\sigma_x}\right\} dt.$$

定義より, 汎関数 $f_x(y) \equiv \langle y, x \rangle$ を確率変数と見なせば, $\mu = \mu \cdot f_x$ となるので, このとき, μ が Gauss 測度であることと $f_x(y)$ が, Gauss 分布に従うことは, 同値である.

Gauss 測度 μ と (m_μ, R_μ) は, 1対1に対応することが知られており, 平均ベクトル m と共分散作用素 R をもった \mathcal{H} 上の Gauss 測度 μ は, $\mu = [m, R]$ と記述される.

次に, Gaussian チャネルについて説明する.

[定義 3.2] (Gaussian チャネル Λ^*)

$(\mathcal{H}_1, \mathcal{B}_1)$ を入力空間, $(\mathcal{H}_2, \mathcal{B}_2)$ を出力空間とし, $P_G^{(k)}$ を $(\mathcal{H}_k, \mathcal{B}_k)$ ($k = 1, 2$) 上の全ての Gauss 測度とする. 簡単のため, $(\mathcal{H}_1, \mathcal{B}_1) = (\mathcal{H}_2, \mathcal{B}_2) \equiv (\mathcal{H}, \mathcal{B})$ の場合を考え, $\mu \in P(\mathcal{H})$ を入力空間上の Gauss 測度, $\mu_0 \in P(\mathcal{H})$ をチャネルの雑音を示している

Gauss 測度とする。そのとき, $P(\mathcal{H})$ から $P(\mathcal{H})$ への Gauss チャネル Λ^* は, 次のような写像 $\lambda: \mathcal{H} \times \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ によって

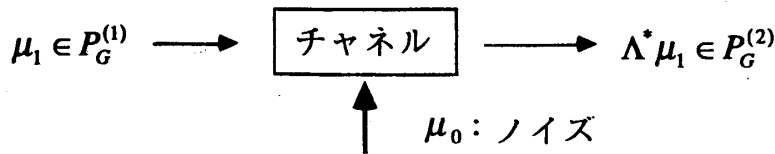
$$\begin{aligned}\bar{\mu}(Q) &= \Lambda^* \mu(Q) \equiv \int_{\mathcal{H}} \lambda(x, Q) d\mu(x) \\ \lambda(x, Q) &\equiv \mu_0(Q^x), \\ Q^x &\equiv \{y \in \mathcal{H}; Ax + y \in Q\}, x \in \mathcal{H}, Q \in \mathcal{B},\end{aligned}$$

で定義される。

ただし, A は \mathcal{H} から \mathcal{H} への線形変換であり λ は, 以下の条件を満足する。

- (1) 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して, $\lambda(x, \bullet) \in P(\mathcal{H})$.
- (2) 任意の $Q \in \mathcal{B}$ に対して, $\lambda(\bullet, Q)$ は, $(\mathcal{H}, \mathcal{B})$ 上の可測関数。

この Gaussian チャネルは, Gauss 測度として入力された状態に, Gauss 型の Noise が加わり, 出力されるような線形的な通信路である。



このとき, 入力測度 μ と出力測度 $\bar{\mu}$ の合成測度 μ は, 以下で与えられる。

$$\Phi(Q_1 \times Q_2) = \int_{Q_1} \lambda(x, Q_2) d\mu(x) \quad Q_1, Q_2 \in \mathcal{B}$$

特に, μ を $[0, R] \in P(\mathcal{H})$, μ_0 を $[0, R_0] \in P(\mathcal{H})$ とすれば, そのとき, 出力測度 $\Lambda^* \mu = \bar{\mu}$ は,

$$\Lambda^* \mu = [0, ARA^* + R_0]$$

と表すことが出来る。また, μ と Λ^* に関する相互エントロピー (情報量) は, 次のようになる [2].

$$I(\mu; \Lambda^*) = \frac{1}{2} \log \frac{|ARA^* + R_0|}{|R_0|}$$

ただし, $|ARA^* + R_0|, |R_0|$ は, $ARA^* + R_0, R_0$ の行列式である。

4. 確率変数ノルムにおける Gauss 測度の ε -エントロピーとフラクタル次元 [13]

この節では、状態間の距離を Kolmogorov 流に確率変数のノルムを用いて与えるとき、Ohya の状態の ε -エントロピーが Kolmogorov の確率変数の ε -エントロピーと一致する (i.e. $S_K = S_O$) ことを示す。確率変数ノルムとは、状態 μ_f のノルムが

$$\|\mu_f\| = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(|f_i|^2)}$$

で与えられるときのことであり、このとき、上記のノルムによって導かれた2つの状態 μ_f と μ_g の距離は、

$$\|\mu_f - \mu_g\| = \sqrt{E[d(f, g)^2]} = \sqrt{\int_{R^n \times R^n} d(f, g)^2 d\mu_{fg}}$$

である。以下では、 $\mathcal{H} = R^n$ で、Gauss 測度は平均0で、チャンネルは、Gaussian チャンネルのみを考える。ここでは、入力状態 $\mu_f = [0, R]$ は、 n -次元確率変数 $f = (f_1, \dots, f_n)$ から導かれた測度で、その出力状態 $\Lambda^* \mu_f$ を μ_g によって記述する。ただし、 g は、 Λ^* から導かれた確率変数 $g = (g_1, \dots, g_n)$ である。

<補題 4.1>

2つの状態 μ_f と μ_g の距離が上述した確率変数ノルムによって与えられれば、そのとき、

$$J(\mu_f : \Lambda^*) = I(\mu_f; \Lambda^*)$$

証明: ここでは、証明の概略を述べる (詳細は、文献 [13] に譲る.)。

仮定より、Gaussian チャンネル Λ^* は、 f に関する g の条件付確率密度関数によって、次のように表される。

$$p(y|x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|R_0|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y - Ax)^t R_0^{-1} (y - Ax) \right\} \quad x, y \in R^n,$$

ただし、 R_0 は、チャンネル Λ^* の雑音を示している測度の共分散行列である。このとき、

μ_f と $\Lambda^* \mu_f = \mu_g$ の合成測度 Φ は、次のような f と g の同時確率分布 $\mu_{fg} = [0, C]$ になる。

$$\mu_{fg}(Q_1 \times Q_2) = \int_{Q_1 \times Q_2} \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{|C|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} z^t C^{-1} z \right\} dz \quad Q_1, Q_2 \in \mathcal{B}(R^n),$$

ここで、 z は $2n$ -次元確率変数 $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ であり、 C は、以下のよ
うな μ_{fg} の共分散行列である。;

$$C = \begin{pmatrix} R & RA^t \\ AR & ARA^t + R_0 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

ただし、 $R, RA^t, AR, ARA^t + R_0$ は、 $n \times n$ 行列であり、任意の $(i, j) (i, j = 1, \dots, n)$ に対
して、 $(R)_{ij} = E(f_i f_j)$, $(RA^t)_{ij} = E(f_i g_j)$, $(AR)_{ij} = E(g_i f_j)$, $(ARA^t + R_0)_{ij} = E(g_i g_j)$
 $\Lambda^* \mu_f = \Gamma^* \mu_f$ を満足するチャンネル Λ^* に対して、 $\Lambda^* \mu_f$ は、 n -次元確率変数 $h = (h_1, \dots$
 $, h_n)$ から導かれた n -次元 Gaussian 測度 μ_h であるので、

$$\begin{aligned} J(\mu_f; \Lambda^*) &= \sup_{\Gamma^*} \{ I(\mu_f; \Gamma^*); \Lambda^* \mu_f = \Gamma^* \mu_f \} \\ &\dots\dots\dots \\ &= \sup_h \{ I(f, h); g_i = h_i \text{ a.e. } (i = 1, \dots, n) \} \end{aligned}$$

(4.1) 式から、合成測度 μ_{fh} は、Gauss 測度 $[\bar{0}, \bar{C}]$ になる。ただし、 \bar{C} は μ_{fh} の共分散行
列であり、

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} R & RB^t \\ BR & BRB^t + \bar{R}_0 \end{pmatrix},$$

と表される。ここで、 $R, RB^t, BR, BRB^t + \bar{R}_0$ は、 $B \neq A$ と $\bar{R}_0 = R_0$ を満足する
 $n \times n$ 行列であり、任意の $(i, j) (i, j = 1, \dots, n)$ に対して、 $(R)_{ij} = E(f_i f_j)$, $(RB^t)_{ij} =$
 $E(f_i h_j)$, $(BR)_{ij} = E(h_i f_j)$, $(BRB^t + \bar{R}_0)_{ij} = E(h_i h_j)$ である。

ここで、 $\mu_{fg} = \mu_{fh}$ を示せるので、補題 4.1 が成立する。 ■

上記の補題を使えば、次の定理が成立する。

<定理 4.2> 補題 4.1 と同じ仮定のもとで、以下が成立する。

(1) $S_0(\mu_f; \varepsilon) = S_K(f; \varepsilon)$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log \max \left(\frac{\lambda_i}{\theta^2}, 1 \right)$$

ただし, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は, R の固有値であり, θ^2 は, 方程式 $\sum_{i=1}^n \min(\lambda_i, \theta^2) = \varepsilon^2$ によって唯一に決められる定数である.

$$(2) d_C^O(\mu_f) = d_C^K(\mu_f) = n$$

証明: (1) \bar{C} を $B(R^n)$ から $B(R^n)$ への Gaussian チャネル全体の集合とし, $\bar{C}(\mu_f; \varepsilon)$ を $\|\mu_f - \Lambda^* \mu_f\| \leq \varepsilon$ を満足する $B(R^n)$ から $B(R^n)$ への Gaussian チャネル全体の集合とする. 補題 4.1 から,

$$\begin{aligned} S_O(\mu_f; \varepsilon) &= \inf \{ J(\mu_f; \Lambda^*); \Lambda^* \in \bar{C}(\mu_f; \varepsilon) \} \\ &= \inf \{ I(\mu_f; \Lambda^*); \Lambda^* \in \bar{C}(\mu_f; \varepsilon) \} \end{aligned}$$

を得る. また, (4.1) 式から

$$\begin{aligned} S_O(\mu_f; \varepsilon) &= \inf \{ I(\mu_f; \Lambda^*); \Lambda^* \in \bar{C}(\mu_f; \varepsilon) \} \\ &= \inf \{ I(f, g); \mu_{fg} \in \bar{S}(\mu_f; \varepsilon) \} \\ &= S_K(f; \varepsilon) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^n \log \left\{ \max \left(\frac{\lambda_i}{\theta^2}, 1 \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } \bar{S}(\mu_f; \varepsilon) = \left\{ \mu_{fg}; \sqrt{\int_{R^n \times R^n} d(f, g)^2 d\mu_{fg}} \leq \varepsilon \right\}.$$

最後の等式の ε -エントロピーの表現は, Pinsker [16] によって証明されている.

$$(2) S_O(\mu_f; \varepsilon) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^n \log \left\{ \max \left(\frac{\lambda_i}{\theta^2}, 1 \right) \right\}, \text{ なので,}$$

$$\begin{aligned} d_C^O(\mu_f) = d_C^K(\mu_f) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S_O(\mu_f; \varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log \left\{ \max \left(\frac{\lambda_i}{\theta^2}, 1 \right) \right\}}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \left(\text{i.e. } \sum_{i=1}^n \min(\lambda_i, \theta^2) = \varepsilon^2 \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log \frac{\lambda_i}{\theta^2}}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \left(\sum_{i=1}^n \theta^2 = \varepsilon^2 \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log \frac{\lambda_i}{\varepsilon^2}}{\log \frac{1}{\varepsilon}} = n \end{aligned}$$

この場合においては, Ohya の状態の ε -エントロピーは, Kolmogorov の ε -エントロピーと一致し, 状態の ε -エントロピーが特殊な場合として Kolmogorov の ε -エントロピーを含むものと考えられる. また, 状態 μ_f のフラクタル次元は, ヒルベルト空間の次元と一致するため, 次元としての意味合いを持つ.

5. 全変動ノルムにおける Gauss 測度の ε -エントロピーとフラクタル次元 [13]

この節では, 状態のノルムを全変動ノルムを用いて与えた場合, Ohya の状態の ε -エントロピーを用いて定義されるフラクタル次元が, 非整数値をとり, Kolmogorov 流では捕らえられない Gauss 測度の別な側面 (フラクタル的な側面) を表現できることを示す. 状態 μ の全変動ノルムとは,

$$\|\mu\| = |\mu|(\mathcal{H})$$

で定義されるものであり, このノルムから導かれた 2 つの状態 μ と $\Lambda^*\mu$ の距離は,

$$\|\mu - \Lambda^*\mu\| = |\mu - \Lambda^*\mu|(\mathcal{H})$$

である. ここでは, 実際に, $\mathcal{H} = R$ で, 入力 of Gauss 測度は, 1 次元 Gauss 測度 $\mu = [0, \sigma^2]$, Gaussian チャネルの線形作用素 A は, 実数値 β , ノイズを表している測度が, 1 次元 Gaussian 測度 $\mu_0 = [0, \sigma_0^2] \in P(\mathcal{H})$ によって表現される場合の状態の ε -エントロピーとフラクタル次元とを計算する.

この場合, , 出力状態 $\Lambda^*\mu$ は, $[0, \beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2]$ によって表され, 入力 of Gauss 測度から, 同じ距離だけ離れた出力 of Gauss 測度は, (1) $\beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2 \geq \sigma^2$ (2) $\beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2 < \sigma^2$ の場合に対し, それぞれ 1 つずつあるので, (1), (2) の 2 つ場合に分けて, 極大相互エントロピーを計算する. チャネル Λ^* は, β と σ_0^2 によって決まるので, 以下では, $\Lambda^* = \Lambda_{(\beta, \sigma_0^2)}^*$ と置く.

<補題 5.1> $\beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2 \geq \sigma^2$ かつ, $\|\mu - \Lambda_{(\beta, \sigma_0^2)}^*\mu\| = |\mu - \Lambda_{(\beta, \sigma_0^2)}^*\mu|(R) = \delta$, を満たすならば, そのとき

$$(1) \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2} - \sigma}{\sigma} = \delta + o(\delta)$$

$$(2) \{ \Lambda_{(\beta, \sigma_0^2)}^*; \|\mu - \Lambda_{(\beta, \sigma_0^2)}^*\mu\| \leq \varepsilon \}$$

$$= \left\{ \Lambda_{(\beta, \sigma_0^2)}^*; \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\beta^2 \sigma^2 + \sigma_0^2} - \sigma}{\sigma} = \delta + o(\delta) \quad \delta \in M(\varepsilon) \right\},$$

ただし, $o(\delta)$ は, δ のオーダー: $\lim_{\delta \rightarrow 0} o(\delta) = 0$ であり, $M(\delta) = \{\delta \in \mathbb{R}; 0 \leq \delta \leq \varepsilon\}$ である.

証明: (1) p_1, p_2 をそれぞれ, $\mu, \Lambda_{(\beta, \sigma_0^2)}^* \mu$ の密度関数とする. $\mu = [0, \sigma^2]$ で, チャネル $\Lambda_{(\beta, \sigma_0^2)}^*$ は, $\mathcal{B}(R)$ から $\mathcal{B}(R)$ への Gaussian チャネルなので,

$$\begin{aligned} \|\mu - \Lambda_{(\beta, \sigma_0^2)}^* \mu\| &= \int_{\mathbb{R}} |p_1(x) - p_2(x)| dx \\ &= 4 \int_0^a \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(\beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2)}\right\} \right| dx, \\ &\quad (5.1) \\ &\quad \left(a = \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2}\right)^{-1} \log \frac{\beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2}{\sigma^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 4 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2}} \right) \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2}\right)^{-1} \log \frac{\beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2}{\sigma^2}} \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2} - \sigma}{\sigma}, \end{aligned}$$

ただし, 最初の不等式は, 方程式は, 式 (5.1) の幾何学的な近似によって導き, 2 番目の不等式は, 任意の正数 x に対して成立する不等式 $\log x \leq x - 1$ を用いた.

いま, $\lim_{\|\mu - \Lambda^* \mu\| \rightarrow 0} \beta^2 \sigma^2 + \sigma_0^2$ が成り立つので,

$$\|\mu - \Lambda^* \mu_{(\beta, \sigma_0^2)}\| = \delta \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\beta^2 \sigma^2 + \sigma_0^2} - \sigma}{\sigma} = \delta + o(\delta)$$

(2) 任意の Gaussian チャネル $\Lambda_{(\beta, \sigma_0^2)}^*$ が, $\|\mu - \Lambda_{(\beta, \sigma_0^2)}^* \mu\| = \delta$ を満たせば, (1) より,

$$\Lambda_{(\beta, \sigma_0^2)}^* \in \left\{ \Lambda_{(\beta, \sigma_0^2)}^*; \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\beta^2 \sigma^2 + \sigma_0^2} - \sigma}{\sigma} = \delta + o(\delta) \right\}$$

が成立する. また, 逆に,

$$\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2} - \sigma}{\sigma} = \delta + o(\delta) \quad (5.2)$$

$\Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^*$ を満たす任意の Gaussian チャネルを取れば, そのとき $\Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^* \mu$ の分散は, 式 (5. 2) によって唯一与えられる. このとき, もし $\Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^*$ が, $\|\mu - \Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^* \mu\| \neq \delta$, を満たすとする, $\Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^* \mu$ の分散が式 (5. 2) を満たさなくなってしまう矛盾する. 従って,

$$\Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^* \in \left\{ \Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^*; \|\mu - \Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^* \mu\| = \delta \right\}$$

故に,

$$\left\{ \Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^*; \|\mu - \Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^* \mu\| = \delta \right\} = \left\{ \Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^*; \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2} - \sigma}{\sigma} = \delta + o(\delta) \right\} \quad (5.3)$$

今, $M(\varepsilon)$ を $0 \leq \delta \leq \varepsilon$ を満たす $\delta \in R$ の全ての集合とすれば, 式 (5. 3) から, 以下が成立する.

$$\begin{aligned} & \left\{ \Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^*; \|\mu - \Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^* \mu\| \leq \varepsilon \right\} \\ &= \left\{ \Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^*; \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2} - \sigma}{\sigma} = \delta + o(\delta) \quad \delta \in M(\varepsilon) \right\} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

<補題 5.2> $\beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2 \geq \sigma^2$ ((1) の場合) で, Gaussian チャネル $\Lambda_{(\beta, \sigma_0^2)}^*$ が $\beta^2 \leq \frac{C_\delta - \delta}{\sigma^2}$ という条件を満足するならば, そのとき,

$$J(\mu; \Lambda_{(\beta, \sigma_0^2)}^*) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \log \sigma^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (\delta + o(\delta)) \right),$$

ただし, $C_\delta = \beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2$.

証明: チャネル $\Lambda_{\delta(\beta, \sigma_0^2)}^*$ に関する μ の相互エントロピーは,

$$I(\mu; \Lambda^*) = \frac{1}{2} \log \frac{\beta^2\sigma^2 + \sigma_0^2}{\sigma_0^2}$$

で与えられるので, もし, $\|\mu - \Lambda_{\delta(\beta, \sigma_0^2)}^* \mu\| = \delta$, を満たす任意の Gaussian チャネルならば, そのとき, 補題 5. 1 から

$$I(\mu; \Lambda_{\delta(\beta, \sigma_0^2)}^*) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{C_\delta - \beta^2 \sigma^2} + \frac{1}{2} \log \sigma^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (\delta + o(\delta)) \right),$$

を得る。仮定より,

$$\begin{aligned} J(\mu; \Lambda^*) &= \sup_{\Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^*} \left\{ I(\mu; \Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^*); \Lambda_{\delta(\beta, \sigma_0^2)}^* \mu = \Lambda_{\delta(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^* \mu \right\} \\ &= \sup_{\Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^*} \left\{ I(\mu; \Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^*); \|\Lambda_{\delta(\beta, \sigma_0^2)}^* \mu - \Lambda_{\delta(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^* \mu\| = 0 \right\} \\ &= \sup_{\Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^*} \left\{ I(\mu; \Lambda_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)}^*); \beta^2 \sigma^2 + \sigma_0^2 = \bar{\beta}^2 \sigma^2 + \bar{\sigma}_0^2 \right\} \\ &= \sup_{\bar{\beta}} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{1}{C_\delta - \bar{\beta}^2 \sigma^2} + \frac{1}{2} \log \sigma^2 \cdot f(\delta) ; \bar{\beta}^2 \leq \frac{C_\delta - \delta}{\sigma^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \log \sigma^2 \cdot f(\delta) \end{aligned}$$

ただし, $\bar{\beta}^2 = \frac{C_\delta - \delta}{\sigma^2}$ であり, $f(\delta) = \left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (\delta + o(\delta)) \right)$ ■

<補題 5.3> $\beta^2 \sigma^2 + \sigma_0^2 < \sigma^2$ ((2) の場合) で, Gaussian チャネル $\Lambda_{(\beta, \sigma_0^2)}^*$ が $\beta^2 \leq \frac{\bar{C}_\delta - \delta}{\sigma^2}$ を満足するならば, そのとき,

$$J(\mu; \Lambda_{(\beta, \sigma_0^2)}^*) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (\delta + o(\delta)) \right)}$$

ただし, $\bar{C}_\delta = \beta^2 \sigma^2 + \sigma_0^2$.

証明: 補題 5.1 と補題 5.2 と同様に証明される。 ■

これらの2つの補題を用いると, つぎの定理を得る。

<定理 5.4>

$$(1) S_0(\mu; \varepsilon) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (\delta + o(\delta)) \right)} > S_k(\mu; \varepsilon) = 0$$

$$(2) d_C^0(\mu) = \frac{1}{2} > d_C^K(\mu) = 0$$

証明: (1) 補題 5. 2 と補題 5. 3 から,

$$\begin{aligned}
 S_0(\mu; \varepsilon) &= \inf_{\Lambda^*} \{J(\mu; \Lambda^*); \|\mu - \Lambda^* \mu\| \leq \varepsilon\} \\
 &= \inf_{\delta} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \log \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \log \sigma^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(\delta + o(\delta))\right) \\ \frac{1}{2} \log \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(\delta + o(\delta))\right)} \end{array} ; \delta \in M(\varepsilon) \right\} \\
 &= \inf_{\delta} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(\delta + o(\delta))\right)} ; \delta \in M(\varepsilon) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(\varepsilon + o(\varepsilon))\right)},
 \end{aligned}$$

なぜならば, $\frac{1}{2} \log \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(\delta + o(\delta))\right)}$ は, δ に関して, 単調減少であるからである.

(2) (1) より,

$$\begin{aligned}
 d_C^0(\mu) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S_0(\mu; \varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(\varepsilon + o(\varepsilon))\right)}}{\log \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

全変動ノルムを用いれば, Ohya の状態 μ のフラクタル次元は, このように非整数を取り, Gauss 測度のフラクタル的な側面を捕らえることができる. Mandelbrot は, 一連の研究の一つとして, Renge/Scaling 解析 [8, 15] によって価格データの時系列を解析し, Gauss 測度に従っている時系列のフラクタル次元は, 1/2 であることを示した. この結果は, 我々の Gaussian 測度のフラクタル次元と一致する.

[系 5. 5]: 雑音が完全に無視できるとすれば,

$$S_0(\mu; \varepsilon) = \infty$$

証明: 仮定より, $\|\mu - \Lambda^* \mu\| \leq \varepsilon$ を満足する任意の Gaussian チャネルに対して,

$$J(\mu; \Lambda^*) = \sup_{\sigma_0^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \log \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{2} \log \sigma^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(\delta + o(\delta))\right) \\ \frac{1}{2} \log \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(\delta + o(\delta))\right)} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\sigma_0^2 \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \log \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{2} \log \sigma^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (\delta + o(\delta)) \right) \\ \frac{1}{2} \log \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (\delta + o(\delta)) \right)} \end{array} \right\} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

ただし、 δ は、 $\|\mu - \Lambda^* \mu\| = \delta$ を満たす $\delta \in M(\varepsilon)$ である。

それ故に、

$$S_0(\mu; \varepsilon) = \infty \quad \blacksquare$$

古典連続系において、Shannon エントロピーは、無限大となり発散してしまうので、雑音が完全に無視されるとき、 $S(\mu; \varepsilon) = S(\mu) = \infty$ となることは、当然の結果と思われる。こうしたエントロピーが無限大になるという状況を打破しようとする試みも行われている [14]。

参考文献

- [1] C. R. Baker, "Capacity of the Gaussian Channel without feedback," *Inform. and Control*, vol37, pp. 70-89, 1978.
- [2] I. M. Gelfand and A. M. Yaglom, "Calculation of the amount of information about a random function contained in another such function," *Amer. Math. Soc. Transl.* **12**, pp. 199-246, 1959
- [3] A. N. Kolmogorov, "Theory of transmission of information," *Amer. Math. Soc. Translation*, Ser.2, **33**, pp291-321, 1963.
- [4] A. N. Kolmogorov, "On the shannon theory of information transmission in the case of continious signals," *IEEE. Trans. Inf. Theory*, Vol.2, pp.102-, 1956.
- [5] A. N. Kolmogorov and V. M. Tihomirov, " ε -entropy and ε -capacity of sets in function space," *Amer. Math. Soc. Transmission*, Ser. 2, **17**, pp.277-364, 1961
- [6] S. Kullback and R. A. Leibler, "On information and sufficiency," *Ann. Math. Statist.*, Vol.22, pp.79-86, 1951.
- [7] B. B. Mandelbrot, "The Fractal geometry of nature," W. H. Freeman and company, San Francisco, 1982.

- [8] B. B. Mandelbrot, "Statistical methodology for non-periodic cycles: From the covariance to R/S analysis," *Annals of Economic and Social Measurement*, **1**, pp, 1972
- [9] T. Matuoka and M. Ohya, "Fractal dimension of states and its application to Ising model," to appear in *Rep. Math. Phy.* **36**, pp.27- 41, 1995.
- [10] M. Ohya, "Some aspects of quantum information theory and their applications to irreversible processes," *Rep. Math. Phys.* **27**, pp.19-47, 1989.
- [11] M. Ohya, "Fractal dimensions of general quantum states," *Proc. Symp. Appl. Func. Anal.* **11**, pp45- 1989
- [12] M. Ohya, "Fractal dimension of states," in *Quantum probability and Related Topics VI* (World Scientific, singapore), pp. 359 - 369, 1991.
- [13] M. Ohya, T. Matsuoka and Kei. Inoue *New approach to ε -entropy and its comparison with Kolmogorov's ε -entropy*, 投稿中
- [14] M. Ohya and N. Watanabe, "A New treatment of Communication Processes with Gaussian Channels," *JapanJ, Appl. Math*, **3**, pp197-206, 1986
- [15] E. E. Peters, "Chaos and Order in The Capital Markets," *Springer-Verlag*, New York, 1988
- [16] M. S. Pinsker, "Gaussian sources," *Problrms of Information Transmission*, **14**, pp59-100,1963 (in Russian).