

「合成系上の同時固有状態」としてのコーシー・ウェーブレット： 連続ウェーブレット変換の”ナイマルク拡張”

坂口文則（福井大学工学部）

e-mail: saka@dignet.fuee.fukui-u.ac.jp

Abstract

線型作用素 $Q - ikP^{-1}$ の固有状態の波動関数系はコーシー・ウェーブレットからなる over-complete なウェーブレット関数系を成すことが知られているが、この関数系は、テンソル積によって合成系に議論を拡張したとき、運動量の逆数と位置の同時固有状態からなる直交完全系となるようにとることができる。本研究では、その具体的な拡張法を提案し、付加系上でどのようなベクトルと内積をとればもとのコーシー・ウェーブレット関数系が得られるかを示す。さらに、その応用として、互いに非可換な運動量の逆数と位置の同時量子測定 of ナイマルク拡張について述べる。また、これらの関係はコヒーレント状態の場合の合成系への拡張と深いアナロジーがあるが、両者の類似点と相違点を指摘する。

1 はじめに

非定常信号の分析など信号処理の分野で近年盛んに用いられているウェーブレットのうち、連続パラメータのウェーブレットは「アフィン群に関するコヒーレント状態」(GCS の一種) と数学的に等価であることが知られている。また、量子光学で用いられる「ワイル-ハイゼンベルク群に関するコヒーレント状態」はボゾン消滅作用素 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP)$ の固有関数系になっているが、これと同様に作用素 $A_k = Q - ikP^{-1}$ (k は自然数) はコーシー・ウェーブレット関数系を固有関数系としてもち、この対応関係に注目すると、量子力学とウェーブレットの間のさまざまな数学的アナロジーの存在を説明することができる。

それらの一つとして、本研究では、コーシー・ウェーブレットを、(もとの空間では) 非可換な物理量の対の (合成系上での) 同時固有状態に拡張する方法を提案し、それがコヒーレント状態を合成系上での位置と運動量の同時固有状態に拡張する方法とアナロジーをなすことを示す。また、付加系上でどのようなベクトルと内積をとればもとのコーシー・ウェーブレット関数系が得られるかを示す。さらに、それらの応用として、互いに非可換な運動量の逆数と位置の同時量子測定 of ナイマルク拡張について述べる。

2 ウェーブレットとコヒーレント状態

本節では、準備としてまずウェーブレットの基礎について紹介した後、量子光学との数学的アナロジーの鍵となる作用素 $A_k \equiv Q - ikP^{-1}$ について説明し、コヒーレント状態との対応について述べる。

2.1 ウェーブレットについて

ウェーブレットとは、ほぼ局在した波束にスケール変換と位置のシフトを施して作られる波束またはその関数系をいい、これを基底関数系として用いた基底変換をウェーブレット変換という。最近、その応用の可能性が信号処理を中心にさまざまな分野に広がっている。ここでは、これらの理論の数学的基礎について、後に必要となる最小限の範囲で簡単に紹介する。詳しくは例えば文献の [2-5] を参照されたい。

実数軸上で定義された 2 乗可積分な波束関数 $h(t)$ (基本ウェーブレット関数と呼ばれる) のフーリエ変換 $\hat{h}(\omega)$ が条件

$$C_h \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{h}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty \quad (1)$$

を満たすとき、この関数から、座標 t に関して a 倍のスケール変換と b だけのシフトを施して得られる波束であるウェーブレット

$$h^{(a,b)}(t) \equiv |a|^{-\frac{1}{2}} h\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2)$$

を定義する。このとき、ウェーブレット関数系 $\{h^{(a,b)}(t) \mid a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}\}$ は $L^2(\mathbf{R})$ において過剰完全系 (over-complete system) をなし、しかも任意の関数 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ について

$$\frac{1}{C_h} \int \int_{\mathbf{R}^2} \frac{da db}{a^2} \langle h^{(a,b)}, f \rangle h^{(a,b)}(t) = f(t) \quad \left(\langle p, q \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} p(t)^* q(t) dt \right) \quad (3)$$

なる関係が成立する。これは、任意の 2 乗可積分関数がウェーブレットという波束の重ね合わせに「展開」できることを示している。この場合、ウェーブレット関数系は「極度に」線型従属であり、またウェーブレット同士は互いに直交しないが、展開係数が基底関数との内積だけで決まるという、直交基底を用いた展開の場合と類似の性質をもつ。しかし、その過剰完全性から、ウェーブレットによる関数の展開のしかたは一意ではなく、上式以外の形の展開も一般に可能である点に注意を要する。一般に、このタイプのウェーブレット関数系を基底 (正確には「基底」とは呼べないから、ここでは「擬似基底」と呼ぶことにする。なお、タイト・フレーム (tight frame) と呼ばれることも多い) として用いた (擬似) 基底変換は、連続ウェーブレット変換 [2-5] と呼ばれる。

これに対し、特殊なケースであるが、基本ウェーブレット関数 $h(t)$ として、ある種の条件 (文献 [2,4-6] 参照) を満たすように関数形をうまく選び、次式のパラメータ a_0, b_0 をうまくとると、離散パラメータのウェーブレットの関数系 $\{h_{m,n}(t) \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}\}$ が $L^2(\mathbf{R})$ で正規直交完全系をなすようにすることができる場合がある。ただし、ここで $h_{m,n}(t)$ は

$$h_{m,n}(t) \equiv h^{(a_0^m, n b_0 a_0^m)}(t) \quad (4)$$

で定義される。この関数系は直交ウェーブレット (基底) と呼ばれ、信号処理における多重解像度解析と密接な関係がある [2,4-6]。

2.2 ウェーブレットとコヒーレント状態とのアナロジー

ウェーブレットは、物理との関連から見れば、数学的にはアフィン群 [9,10] に関する GCS (generalized coherent states) [11] と等価であることが知られている [2,8,14]。これはちょうど、量子光学で用いる (普通の) コヒーレント状態が、Weyl-Heisenberg 群に関する GCS の一つであることと非常によく似た関係にある。ウェーブレットと量子力学の関連については、例えば文献 [12,13] に解説がある。

なお、以下では、この両者の間の数学的アナロジーを見るために、信号処理において時刻を表す変数 t を、あたかも物理系における位置座標のようにみなして対応づけ、変数 t をあたかも位置座標作用素の固有値を表すものとして用いることにする。なお、この対応は、数学的アナロジーを調べるための便宜的なもので、特に物理的な意味を有するものではない。

さて、信号処理の分野で窓かけフーリエ変換あるいはガボール変換で用いられる擬似基底であり、しばしばこの分野で「(広義の) コヒーレント状態」と呼ばれる関数系があり、ウェーブレット関数系と非常によく似た性質をもっている (両者の類似については、例えば文献 [2] 参照)。この関数系は、Weyl-Heisenberg 群に関する GCS の一般の場合に相当し、以下のように定義される。実数軸上で定義された 2 乗可積分な任意の波束関数 $g(t)$ があり、

$$C'_g \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty \quad (5)$$

とする。この関数から、周波数 p の AM 変調 (周波数シフト) と q だけの座標シフトを施して得られる波束である「(信号処理でいう) コヒーレント状態」

$$g^{(q,p)}(t) \equiv e^{ip(t-q)} g(t-q) \quad (6)$$

を定義すれば、関数系 $\{g^{(q,p)}(t) \mid q \in \mathbf{R}, p \in \mathbf{R}\}$ は $L^2(\mathbf{R})$ で過剰完全系をなし、しかも、任意の関数 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ について

$$\frac{1}{2\pi C_g'} \int \int_{\mathbf{R}^2} dq dp \langle g^{(q,p)}, f \rangle g^{(q,p)}(t) = f(t) \quad (7)$$

なる関係が成立する。これらはウェーブレットの場合の (1) - (3) 式と極めてよく似た関係である。さて、これと量子力学との対応としては、特に $g(t)$ として

$$g_0(t) \equiv \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (8)$$

を選んだ場合には、コヒーレント状態

$$g_0^{(q,p)}(t) \equiv e^{ip(t-q)} g_0(t-q)$$

は、量子光学で用いられる (普通の) コヒーレント状態の波動関数に一致する。実際、 Q と P をそれぞれ (無次元化された) 位置座標作用素と運動量作用素とし (これらは正準共役関係 $[Q, P] = iI$ を満たす)、これらからボゾンの消滅作用素

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP) \quad (9)$$

を定義するとき、上述のコヒーレント状態は、この消滅作用素の固有状態の (位置座標空間での) 波動関数となっている。すなわち、

$$g_0^{(q,p)}(t) = Q(t|\alpha)_a \quad \text{ただし} \quad \alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip) \quad (10)$$

$$a|\alpha)_a = \alpha|\alpha)_a \quad (11)$$

となる。さて、よく知られているように、量子力学におけるコヒーレント状態は

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{C}} d^2\alpha |\alpha)_a a|\alpha) = I \quad (12)$$

なる関係を満たすが (ここで I は恒等作用素)、この関係は数学的には (7) 式で示された関係で g が g_0 のときの特例な場合と数学的に等価である。また、(複素) 固有値 α のシフトは、ユニタリ変換

$$e^{\gamma a^\dagger - \gamma^* a} |\alpha)_a = e^{-iq'P + ip'Q} |\alpha)_a = e^{i\text{Im}(\gamma\alpha^*)} |\alpha + \gamma)_a \quad (\text{ただし} \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q' + ip')) \quad (13)$$

によって行える。一方、この関係に対応するものがウェーブレットの場合にも存在する。ウェーブレットの場合は、基本ウェーブレット関数および (2) 式において定義されるウェーブレットに関して、変換 $f(t) \rightarrow f(e^{-s}, e^{-s}q)(t)$ は、量子力学におけるユニタリ変換

$$|\cdot\rangle \rightarrow e^{-iqP} e^{isB} |\cdot\rangle \quad (\text{ただし} \quad B \equiv \frac{1}{2}\{Q, P\})$$

と数学的には等価であることが知られている [10]。この関係より、上記の固有値シフトの「ウェーブレット版の対応物」を以下のようにして見つけることができる [16] (なお、ここで紹介するウェーブレット型固有関数系は、後に対応関係の一部を紹介するように、すでに幾人かの研究者によって独自に提案されているものと数学的に等価であり、特に目新しいものではない。)。もし、適当な実数値関数 $\theta(\alpha; s, q)$ と適当な複素数値関数 $\lambda(\alpha; s, q)$ を用いて

$$e^{-iqP} e^{isB} |\alpha\rangle_A = e^{i\theta(\alpha; s, q)} |\lambda(\alpha; s, q)\rangle_A \quad (14)$$

なる「固有値シフト」関係を満たすような作用素 A が存在すれば、この作用素は

$$e^{-isB} e^{iqP} A e^{-iqP} e^{isB} = \lambda(A; s, q) \quad (15)$$

なる関係を満たさねばならない。ただし、ここで $\lambda(A; s, q)$ は関数 $\lambda(\alpha; s, q)$ において変数 α の代わりに作用素 A を代入して得られる作用素である。作用素代数でよく知られた公式

$$e^{uX} Y e^{-uX} = Y + u[X, Y] + \frac{u^2}{2!} [X, [X, Y]] + \frac{u^3}{3!} [X, [X, [X, Y]]] + \dots$$

を考慮すれば、関係 (15) は、交換子積 $[B, A]$ と $[P, A]$ の両方が作用素 A のみの関数となっている場合に満たされる。 $[B, Q] = -iQ$, $[B, P] = iP$ となる [10] ことに注意すれば、そのような作用素 A の候補の中には I や Q や P^n など「自明」なものもあるが、自明でないもので簡単な作用素として

$$A_k \equiv Q - ikP^{-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (16)$$

がある。 $A = A_k$ のとき、固有値のシフトは $\lambda(\alpha; s, q) = e^{-s}(\alpha + q)$ なる関係で行われる。(注意：運動量作用素の逆作用素 P^{-1} は、位置座標空間の波動関数に関しては積分演算の i 倍に対応するが、この作用素の定義域に関しては若干の注意が必要である。なお、運動量空間の波動関数に関しては、単にスカラー $\frac{1}{P}$ 倍を意味する。) この作用素 A_k の固有状態の系は、基本ウェーブレット関数

$$h_k(t) \equiv \frac{G_k}{(t-i)^{k+1}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots; G_k \text{ は } k \text{ によって決まる定数}) \quad (17)$$

(しばしばコーシー (Cauchy)・ウェーブレットと呼ばれる) から作られるウェーブレット関数系 $\{h_k^{(a,b)}(t) | a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ にちょうど対応している。すなわち、

$$h_k^{(a,b)}(t) = Q|t|\alpha\rangle_{A_k} \quad \text{ただし } \alpha = b + ai \quad (18)$$

$$A_k|\alpha\rangle_{A_k} = \alpha|\alpha\rangle_{A_k} \quad (19)$$

となる。 $t-i$ が複素数であることに注意すると、この波動関数 (5.17) は、単峰型の非有界関数ではなく、波束状の 2 乗可積分関数である。その一例を図 1 に示す。ここで太線は波動関数の実数部を、細線は虚数部を表す。(この波動関数の形はある種のスクイズド状態の波動関数に外形が酷似しているが、その数学的根拠については文献 [16] にある。) さらに、ウェーブレットの「過剰完全性関係」(3) において h として h_k を選んだ場合の関係式を、パラメータ間の対応 $a = e^{-s}$, $b = e^{-s}q$ のもとに「量子力学語」に翻訳すれば、量子力学におけるコヒーレント状態の「過剰完全性関係」(5.12) の「ウェーブレット版の対応物」

$$\frac{1}{C_k} \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2\alpha}{(\text{Im } \alpha)^2} |\alpha\rangle_{A_k} \langle \alpha|_{A_k} = I \quad (20)$$

が得られる。作用素 A_k は交換関係

$$[A_k, A_k^\dagger] = 2kP^{-2} = -\frac{1}{2k}(A_k - A_k^\dagger)^2 \quad (21)$$

を満たすが、これはボゾンの生成消滅の場合の $[a, a^\dagger] = I$ よりもやや複雑である。なお、ボゾン消滅作用素 a と生成作用素 a^\dagger の間には ordering の問題があるが、これと類似の A_k と A_k^\dagger の間の ordering 問題は、この交換関係の相違を反映してやや異なったものとなる。 A_k と A_k^\dagger に関する「反正規順序」から「正規順序」への explicit な変換公式は文献 [17, 20] においてすでに示した。

ところで、上述の固有関数のフーリエ変換は、T.Paul や I.Daubechies によって既に提案されているアフィン・コヒーレント状態 [7, 12, 13] の特殊な場合に一致している。特に、上述の議論は、アフィン・コヒー

レント状態の理論において、波動関数を作用素 $-i\frac{d}{dq} - \frac{i\hbar}{q}$ ($l=1,2,\dots$) の固有関数にとった場合の議論と数学的に等価である。(ただし、位置座標作用素と運動量作用素が入れ替わった対応になる。) また、類似の議論は文献 [14] にもある。

さて、上述の種々の対応関係において、コヒーレント状態とウェーブレットの相違点の一つは、パラメータまたは複素固有値に関する積分において、重み関数 $\frac{1}{a^2}$ あるいは $\frac{1}{(\text{Im } \alpha)^2}$ の有無にあるが、これは、それぞれ対応する連続群の不変測度の相違を反映している [4]。なお、ここでは触れないが、よく知られているように、ワイルハイゼンベルク群やアフィン群以外の連続群についても、それぞれ対応する GCS が存在する。それらの中にはこれら2つとよく似た「座標シフト不変性」をもつ、信号処理に適した固有関数系のクラスの存在が示唆され [18]、それぞれ対応する連続群の違いに応じて、異なる重み関数が出てくる。

2.3 最小不確定状態としてのコーシー・ウェーブレット

よく知られているように、交換可能でない二つのオブザーバブル F と G があるとき、不確定関係

$$\langle \Delta F \rangle^2 \langle \Delta G \rangle^2 \geq \frac{1}{4} \langle i[F, G] \rangle^2 \quad (22)$$

が成立し、しかも、等号が成立するのは、作用素 $(F + icG)$ (c は実定数) の固有ベクトルの純粋状態になっている場合に限られる。特に、位置座標と運動量の間では、 $[Q, P] = iI$ より

$$\langle \Delta Q \rangle^2 \langle \Delta P \rangle^2 \geq \frac{1}{4} \quad (23)$$

となり、等号成立は、作用素 $(Q + icP)$ (c は実定数) の固有ベクトルの純粋状態になっている場合、すなわち、スクイジング・パラメータが実数のスクイズド状態(すなわち、ガウス状態)になっている場合に限られる。特に $c=1$ の場合、これはコヒーレント状態となる。

これと類似の議論がウェーブレットの場合にも存在する。ここで紹介する結果は T.Paul [13] によってすでに示されているものと数学的には等価である(ただし前節に合わせて Q と iP を入れ替えてある)。今、位置座標と「運動量の逆数」との同時測定問題を考える。これら2つは互いに交換可能でないオブザーバブルであり、交換関係

$$[Q, P^{-1}] = -iP^{-2} \quad (24)$$

が成立する。したがって、これらの間の不確定関係は

$$\langle \Delta Q \rangle^2 \langle \Delta P^{-1} \rangle^2 \geq \frac{1}{4} \langle P^{-2} \rangle^2 \quad (25)$$

となり、しかも、等号成立は、作用素 $(Q + icP^{-1})$ (c は実定数) の固有ベクトルの純粋状態になっている場合に限られる。前節で紹介した作用素 A_k の固有状態は、この特殊な場合になっている。したがって、(17) 式に示した基本ウェーブレット関数から作られるウェーブレットを波動関数としてもつ純粋状態は、すべて位置座標と「運動量の逆数」の同時測定に関する「最小不確定状態のようなもの」になっている。ただし、互いに正準共役になっている二つのオブザーバブルの場合とは異なり、不確定関係の右辺は状態に依存して変化するため、

$$\langle \Delta Q \rangle^2 \left(\frac{\langle \Delta P^{-1} \rangle}{\langle P^{-2} \rangle} \right)^2 \geq \frac{1}{4} \quad (26)$$

の形にした方が意味がわかりやすいかも知れない。古典的なイメージとしては、近似的に

$$\Delta \frac{1}{P} \simeq \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{P} \right) \cdot \Delta p = -\frac{\Delta p}{P^2} \quad (27)$$

が成立することを考えれば、 $\frac{\langle \Delta P^{-1} \rangle}{\langle P^{-2} \rangle}$ の大きさは近似的に (Δp) の大きさに近いと考えられる。このことから、(26) の状況は上述の「位置座標と運動量の同時測定に関する最小不確定状態」の場合と極めてよく似た状況を表していることになるが、この類似は、文献 [16] にある「コーシー・ウェーブレットとスクイズド状態の波動関数との類似」にも符合している。

3 コーシー・ウェーブレットと合成系上の同時固有状態

3.1 「位置」と「運動量の逆数」の対の拡張法

位置座標作用素と運動量作用素は互いに可換ではないが、よく知られているように、空間 \mathcal{H} をテンソル積により $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ に拡張し、その上で

$$\tilde{Q} \equiv Q \otimes I_0 - I \otimes Q_0, \quad \tilde{P} \equiv P \otimes I_0 + I \otimes P_0 \quad (28)$$

と定義すれば、両者は交換可能となり、同時固有ベクトル $|\tilde{q}, \tilde{p}\rangle$ が存在する。さらに、この拡張した空間における \tilde{Q} と \tilde{P} の同時固有ベクトルを空間 \mathcal{H}_0 内のみで真空状態への射影をとることによって空間 $\mathcal{H} \otimes |0\rangle_{n_0}$ へ射影したものが、空間 \mathcal{H} におけるコヒーレント状態と等価となることが知られている。拡張した空間で同時固有状態は直交完全系をなすが、この性質は射影によってコヒーレント状態の過剰完全性に反映される。

これと類似の議論がウェーブレットの場合にも存在することが、以下のようにして示せる。空間 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ 上で

$$\tilde{Z} \equiv Q \otimes I_0 - P^{-1} \otimes (Q_0 - B_0), \quad \tilde{W} \equiv P^{-1} \otimes I_0 - P^{-1} \otimes P_0 \quad (29)$$

と定義すれば、これらは互いに交換可能なオブザーバブルとなり、同時固有ベクトル $|\tilde{z}, \tilde{w}\rangle$ が存在する。ここで、

$$\tilde{A}_k \equiv \tilde{Z} - ik\tilde{W} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (30)$$

を定義すると、前節で紹介した作用素 A_k および $F_{0k} \equiv Q_0 - B_0 + ikP_0$ との間に

$$\tilde{A}_k = A_k \otimes I_0 - P^{-1} \otimes F_{0k}^\dagger \quad (31)$$

なる関係が成立する。 \tilde{Z} と \tilde{W} の同時固有ベクトル $|\tilde{z}, \tilde{w}\rangle$ は作用素 \tilde{A}_k の固有値 $\tilde{z} - ik\tilde{w}$ に属する固有ベクトルにもなっている。

さて、作用素 F_{0k} の固有値 λ に属する固有ベクトルを $|\lambda\rangle_{F_{0k}}$ で表すと

$$F_{0k} |0\rangle_{F_{0k}}^\dagger = 0 \quad (32)$$

となることに注意すれば

$$\begin{aligned} (A_k \otimes I_0)(I \otimes |0\rangle_{F_{0k}} \langle 0|) |\tilde{z}, \tilde{w}\rangle &= (I \otimes |0\rangle_{F_{0k}} \langle 0|) \tilde{A}_k |\tilde{z}, \tilde{w}\rangle \\ &= (\tilde{z} - ik\tilde{w})(I \otimes |0\rangle_{F_{0k}} \langle 0|) |\tilde{z}, \tilde{w}\rangle \end{aligned} \quad (33)$$

となり、これは

$$(I \otimes |0\rangle_{F_{0k}} \langle 0|) |\tilde{z}, \tilde{w}\rangle = (\text{const.}) \cdot |\tilde{z} - ik\tilde{w}\rangle_{A_k} \otimes |0\rangle_{F_{0k}} \quad (34)$$

を意味する。すなわち、ある種のウェーブレットと数学的に等価な、空間 \mathcal{H} における A_k の固有ベクトルは、拡張した空間における \tilde{Z} と \tilde{W} の同時固有ベクトルを空間 \mathcal{H}_0 内のみでベクトル $|0\rangle_{F_{0k}}$ の純粋状態への射影をとることによって空間 $\mathcal{H} \otimes |0\rangle_{F_{0k}}$ へ射影したものと等価であると見なすことができる。拡張した固有空間で同時固有状態は直交完全系をなすが、この性質は射影によってウェーブレット関数系の過剰完全性に反映される。

3.2 合成系上の同時固有状態の波動関数

(27) 式で示した拡張による位置と運動量の同時固有状態の位置表示・運動量表示での波動関数は、それぞれ

$$(\langle Q|t\rangle \otimes \langle Q_0|t_0\rangle | \tilde{q}, \tilde{p}\rangle) = c e^{i\tilde{p}t} \delta(t - t_0 - \tilde{q}) \quad (35)$$

$$(\langle P|f\rangle \otimes \langle P_0|f_0\rangle | \tilde{q}, \tilde{p}\rangle) = C e^{-i\tilde{q}f} \delta(f + f_0 - \tilde{p}) \quad (36)$$

となり、これらのサポートは、それぞれ傾き 1, -1 の直線になり、その上で正弦波をなす。これは、「位置の差」と「運動量の和」が同時確定している様子を表している。

ここでは、これに対応する、ウェーブレットの場合の位置と「運動量の逆数」の同時固有状態の波動関数を求める。(29) で定義した作用素 \tilde{Z}, \tilde{W} の固有値 \tilde{z}, \tilde{w} に属する固有ベクトル $|\tilde{z}, \tilde{w}\rangle$ の同時固有状態の波動関数を

$$\psi_{\tilde{z}, \tilde{w}}(t, t_0) \equiv (\langle Q|t\rangle \otimes \langle Q_0|t_0\rangle | \tilde{z}, \tilde{w}\rangle) \quad (37)$$

$$\Psi_{\tilde{z}, \tilde{w}}(f, f_0) \equiv (\langle P|f\rangle \otimes \langle P_0|f_0\rangle | \tilde{z}, \tilde{w}\rangle) \quad (38)$$

とする。運動量同士の同時固有状態 $|f\rangle_P \otimes |f_0\rangle_{P_0}$ が作用素 \tilde{W} の固有値 $\frac{1-f}{\tilde{w}}$ に属する固有ベクトルになっていることと、運動量同士の同時固有状態の系が完全系をなすことに注意すれば、ある関数 $S_{\tilde{z}, \tilde{w}}(f_0)$ を用いて

$$\Psi_{\tilde{z}, \tilde{w}}(f, f_0) = S_{\tilde{z}, \tilde{w}}(f_0) \delta\left(\frac{1-f_0}{\tilde{w}} - f\right) \quad (39)$$

と書ける。この関係を作用素 \tilde{Z} の固有方程式に代入すると、関数 $S_{\tilde{z}, \tilde{w}}(f_0)$ に関する微分方程式

$$\left(\frac{d}{df_0} - \frac{1}{2\tilde{w}} + i\tilde{z}\right) S_{\tilde{z}, \tilde{w}}(f_0) = 0 \quad (40)$$

が得られる。この一般解

$$S_{\tilde{z}, \tilde{w}}(f_0) = K e^{(-\frac{1}{2\tilde{w}} + i\tilde{z})f_0} \quad (41)$$

を(39)に代入することにより、運動量表示の波動関数

$$\Psi_{\tilde{z}, \tilde{w}}(f, f_0) = K e^{(\frac{1}{2\tilde{w}} - i\tilde{z})f_0} \delta\left(\frac{1-f_0}{\tilde{w}} - f\right) \quad (42)$$

を得、これをフーリエ逆変換すれば、位置表示の波動関数

$$\psi_{\tilde{z}, \tilde{w}}(t, t_0) = K e^{\frac{1}{2\tilde{w}} + i\tilde{z}} \delta\left(-\tilde{z} + \frac{t}{\tilde{w}} + t_0\right) \quad (43)$$

を得る。これらはサポートはいずれも直線であり、それらの上で正弦波振動をする点は上述の「位置と運動量の同時測定」の場合と似ているが、サポート直線の傾きが自由である点や、運動量表示におけるサポート直線が必ず一つの点を通る点などは、上述の場合と異なる。

3.3 付加系上の「真空の対応物」

上述のように、もとの空間のコーシー・ウェーブレット関数系は、この同時固有状態に付加系上のみでベクトル $|0\rangle_{F_{0k}}$ へ射影したものと等価であるが、コヒーレント状態の場合とのアナロジーから見れば、このベクトル $|0\rangle_{F_{0k}}$ は付加系上の真空ベクトルに対応する。ここでは、このベクトルの波動関数

$$\chi_{0k}(t_0) \equiv \langle Q_0|t_0|0\rangle_{F_{0k}} \quad (44)$$

について調べる。作用素 F_{0k} の定義より、波動関数の固有方程式は

$$\left((it_0 + k) \frac{d}{dt_0} + (t_0 + \frac{i}{2}) \right) \chi_{0k}(t_0) = 0 \quad (45)$$

となり、この一般解は

$$\chi_{0k}(t_0) = (\text{const.}) \cdot (t_0 - ik)^{-(k+\frac{1}{2})} e^{it_0} \quad (46)$$

となる。定数の位相因子を $e^{-i(\frac{k}{2}+\frac{1}{4})\pi}$ にとれば、この波動関数は真空状態の波動関数によく似た関数となる。その例を図 2 (a)-(c) に示す。ここで太線は実部、細線は虚部を表す。特に k が大きくなるにつれ、波動関数はガウス曲線に近づいていくことが示され、 k に合わせてスケールを変換すると真空状態へ収束していくことがわかる。このことは、文献 [16] において示されている、 A_k の固有状態が適当なスケール変換のもとで k が大きくなるにつれてコヒーレント状態に収束していくことと、符合する。つまり、コヒーレント状態と「位置と運動量の同時測定」の関係は、コーシー・ウェーブレットと「位置と「運動量の逆数」の同時測定」の関係の $k \rightarrow \infty$ の極限と見なすこともできることが判明した。

3.4 一般の連続ウェーブレット変換との関係

コーシー・ウェーブレット以外の一般のウェーブレットを用いた連続ウェーブレット変換の場合も、上述の同時固有状態と関係づけることができる。実際、付加系上においてベクトル $|0\rangle_{F_{0k}}$ に限らず一般の任意のベクトルと内積をとれば、対応するもとの空間上の関数系はウェーブレット関数系をなすことが容易に確かめられる。ウェーブレット関数の形は、付加系上でどんなベクトルと内積をとったかによって決まる。ここでは、これについて簡単に説明する。

今、3.1 節の議論において、付加系上でベクトル $|0\rangle_{F_0}$ の代わりに任意の (ノルム有限の) ベクトル $|\phi\rangle_0$ を用いて内積をとった場合の (\mathcal{H} 上の) ベクトル

$$|h_{(\tilde{z}, \tilde{w})}^{(\phi)}\rangle \equiv (I \otimes \langle \phi |) |\tilde{z}, \tilde{w}\rangle \quad (47)$$

を考える。この波動関数を

$$h_{\phi}^{(a,b)} \equiv Q \langle t | h_{(b,a)}^{\phi} \rangle \quad (48)$$

で表すと、前節で求めた合成系上の波動関数より、これは関係

$$h_{\phi}^{(a,b)} = |a|^{-1/2} h_{\phi}^{(1,0)} \left(\frac{t-b}{a} \right) \quad (49)$$

を満たし、すなわちこの波動関数系がウェーブレット関数系を満たすことがわかる。

逆に、基本ウェーブレット関数 $h(t)$ が、スケール変換されたコーシー・ウェーブレットを用いて

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma_k}{(t+ik)^{k+1}} \quad (50)$$

の形に展開できれば、(34) で示されたことと関係

$$h_k^{(-kw, z)}(t) = k^{-1/2} h_k^{(w, z)} \left(-\frac{t}{k} \right) \quad (51)$$

に注意すれば、基本ウェーブレット $h(t)$ から作られるウェーブレット $h^{(a,b)}(t)$ は上記の同時固有状態 $|b, a\rangle_0$ を付加系上で

$$|\phi_h\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \Xi_k \Gamma_k |0\rangle_{F_{0k}} \quad (52)$$

の形に展開できるベクトルと内積をとったものと等価であることがわかる (Ξ_k は内積の規格化と k により決まる定数)。

4 「位置」と「運動量の逆数」の同時測定のナイマルク拡張

上述の結果を用いると、 Q と P^{-1} の組の同時測定のナイマルク拡張の方法が提案できる。同時測定において位置を表すパラメータを q 、「運動量の逆数」を表すパラメータを u とし、 (q, u) -平面上の可測集合 Δ に対応する同時測定の作用素測度 [19] を $M(\Delta)$ で表す。これら2つの物理量は非可換のため、もとの系では同時測定の作用素測度 $M(\Delta)$ が射影子にはなり得ず、いわゆる一般化測定 [19] となる。しかしながら、上述のように合成系に拡張し、その上での \tilde{z} と \tilde{w} の同時測定の作用素測度 $\tilde{M}(\tilde{\Delta})$ (ただし $\tilde{\Delta}$ は (\tilde{z}, \tilde{w}) -平面上の可測集合) は射影子となり、いわゆる単純測定となるようにすることができる。両者は

$$M(\Delta) = \text{tr}_{\circlearrowleft}(I \otimes |0\rangle_{F_{\circlearrowleft k}} \langle 0|) \tilde{M}(\tilde{f}(\Delta)) (I \otimes |0\rangle_{F_{\circlearrowleft k}} \langle 0|) \quad (53)$$

(但し、 \tilde{f} は (q, u) -平面から (\tilde{z}, \tilde{w}) -平面への $\tilde{f}((q, u)) = (q, u)$ なる写像) なる関係で結ばれ、もとの系と合成系における密度作用素をそれぞれ ρ , $\tilde{\rho}$ とおくと、 Δ 上に測定される確率は

$$\text{tr}(\rho M(\Delta)) = \tilde{\text{tr}}[\tilde{\rho} \tilde{M}(\tilde{f}(\Delta))] \quad (54)$$

(但しここで $\text{tr}_{\circlearrowleft}$ は空間 $\mathcal{H}_{\circlearrowleft}$ のみに関する部分トレース) で表される。このことは、もとの系における「位置」と「運動量の逆数」の対の(不確定な)同時測定は、合成系上での両者の同時単純測定の(付加系の状態に関する情報のみが完全に欠如している状況での)一種の限定と解釈できることを表す。

さて、上記の作用素測度 $M(\Delta)$ は信号処理の表現では

$$\iint_{D(\Delta)} \frac{da db}{a^2} h_k^{(a,b)}(s) h_k^{*(a,b)}(t) \quad (55)$$

(但しここで D は (q, u) -平面から (a, b) -平面への $D((q, u)) = (-ku, q)$ なる写像であり、位置と「運動量の逆数」を、対応するパラメータ空間上の点に対応させる写像) に対応するが、1. 3節で触れた最小不確定性に関するを用いれば、コーシー・ウェーブレットを用いたこの種の測定が「位置」と「運動量の逆数」の測定精度の不確定積を最小にする測定の一つとなっていることが示せる。これは、位置と運動量の同時測定において、ガウス状態を用いた測定が最良であること [19] とアナロジーをなす。

5 おわりに

線型作用素 $Q - ikP^{-1}$ の固有状態の波動関数系であるコーシー・ウェーブレット関数系を、テンソル積によって合成系に議論を拡張したとき、運動量の逆数と位置の同時固有状態からなる直交完全系となるように拡張する方法を具体的に示した。また、付加系上でどのようなベクトルと内積をとればもとのコーシー・ウェーブレット関数系が得られるかを示した。さらに、その応用として、互いに非可換な運動量の逆数と位置の同時量子測定のナイマルク拡張についても調べた。いずれも、コヒーレント状態の場合とアナロジーが成立するが、交換関係の相違を反映していくつかの相違点があることが示せた。

文献

- [1] Morlet J., Arenas G., Fourgeau and Giard D.(1982): "Wave Propagation and Sampling Theory" *Geophysics* 47, pp.203-236 .
- [2] Daubechies,I.(1990): "The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis" *IEEE Trans. Information Theory* 36, pp.961-1005 .
- [3] Grossman A., Kronland-Martinet A. and Morlet J.(1989): "Reading and Understanding Continuous Wavelet Transform" in *Wavelets* (Combes J.M. et al. eds.), Springer-Verlag, pp.2-20 .

- [4] Daubechies, I. (1992): *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM .
- [5] Meyer, Y. (1993): *Wavelets: Algorithms and Applications* (Ryan, R.D. tr.), SIAM .
- [6] Mallat S. (1989): "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation" *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence* PAMI-11, 7, pp.674-693 .
- [7] Paul, T. (1989): "Wavelets and Path Integrals" in *Wavelets* (Combes, J.M. et al. eds.), Springer-Verlag, pp.204-208 .
- [8] Torrésani, B. (1991): "Wavelets Associated with Representations of the Affine Weyl-Heisenberg Group" *J. Math. Phys.* 32, pp.1273-1279 .
- [9] Gel'fand, I.M. and Neumark, M.A. (1947): "Unitary Representation of the Group of Linear Transformation of the Straight Line" *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS* 55, pp.567-570
- [10] Aslaksen, E.W. and Klauder, J.R. (1968, 1969): "Unitary Representation of the Affine Group" *J. Math. Phys.* 9, pp.206-211; "Continuous Representation Theory Using the Affine Group", *J. Math. Phys.* 10, pp.2267-2275 .
- [11] Perelomov A.M. (1977): "Generalized Coherent States and Some of Their Applications" *Soviet Physics Uspekhi* 20, 9, pp.703-720 .
- [12] Daubechies I. and Paul T. (1986): "Wavelets and Applications", *Proc. 8th Int. Congr. Math. Phys., Marseilles* pp.675-685
- [13] Paul, T. and K.Seip (1992): "Wavelets and Quantum mechanics" in *Wavelets and Their Applications* (Ruskai eds.), Jones and Bartlett Publishers, pp.303-321 .
- [14] Falomir, H. et al. (1994): "A Calculation with a Biorthogonal Wavelet Transform" *J. Math. Phys.* 35, pp.1939-1950 .
- [15] Meyer, Y. and Coifman, R.R. (1990, 1991): *Ondelette et opérateurs I, II, III*, Herman, éditeurs des sciences et des arts .
- [16] 坂口 (1994): "Wavelet Transform Associated to the Eigenvectors of the Operator $A - ikP^{-1}$ " 京都大学数理解析研究所講究録 885 「量子情報理論とその応用, 1992」, pp.8-21; Sakaguchi, F. (1992): "On a Wavlat System Associated to the Eigenvectors of $Q - ikP^{-1}$ " *Proc. Int. Conf. Circuit and Systems/Int. Symp. Inform. Theory and Its Applications '92, Singapore*, pp.107-111 .
- [17] Sakaguchi, F. (1994), "An Application of Operator Algebra to the Pseudo-diagonalization Problem of the Auto-correlation Function of Random Signals by an Over-complete Wavelet System" *Proc. International Symposium on Information Theory and Its Applications '94, Sydney, Australia* 1, pp.309-314; 坂口 (1994): "非直交ウェーブレット関数系による確率過程の自己相関の擬似対角化問題について" 電子情報通信学会論文誌 A, J77-A, pp.1065-1074 .
- [18] Sakaguchi, F. (1994), "A Larger Class of Time-shift Invariant Localized Over-complete Eigenfunction System Which Contains Wavelets and Coherent States" *Proc. International Symposium on Information Theory and Its Applications '94, Sydney, Australia* 1, pp.303-308 .
- [19] Holevo, A.S. (1982), *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, North-Holland Publ.
- [20] 坂口 (1994): 物性研究 62, pp.200-214
- [21] 坂口 (1996): "量子力学から見たウェーブレット", '量子情報と進化の力学' (大矢雅則・小島泉編) 第II部応用編第5章 (pp.177-196), 牧野書店,

$$k=7$$

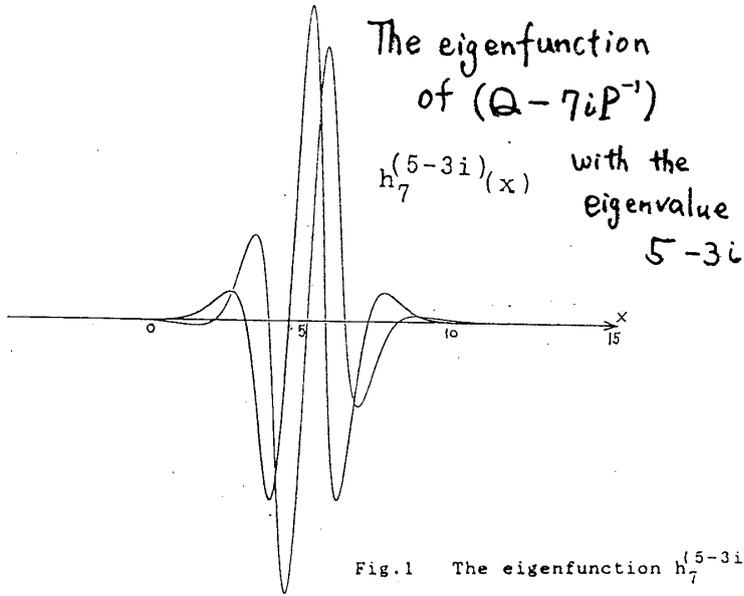
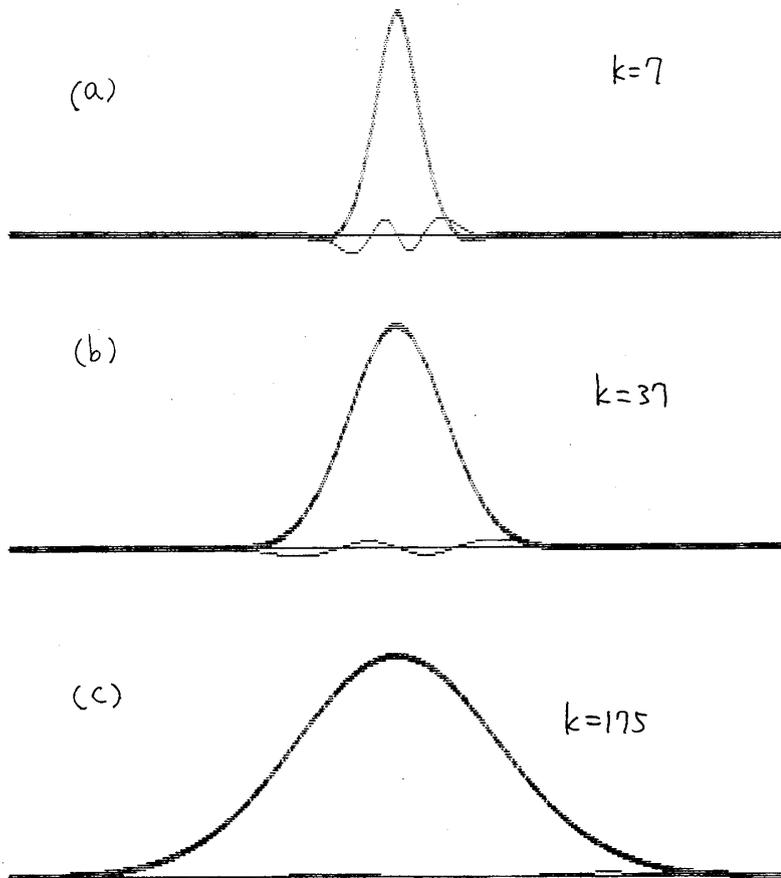


Fig.1 The eigenfunction $h_7^{(5-3i)}(x)$. The bold line is the real part, and the thin line is the imaginary part. In this figure, as well as in the following figures, the wavefunction is not normalized but the maximum value is normalized.

☒ 1



☒ 2: $|0\rangle_{F_{k_0}}$ の波動関数