# 非平衡Thermo Field Dynamicsによる量子確率微分方程式の体系

斎藤 健 (Takeshi Saito)，有光 敏彦 (Toshihico Arimitsu)
Institute of Physics, University of Tsukuba
Ibaraki 305, Japan

## 1 序論

量子系に対するLangevin方程式の研究はSenitzky [1], Lax [2], Haken [3]に始まる。彼らは，量子力学的な減衰振動子に対するLangevin方程式を研究した。量子Langevin方程式では，注目する系の変数のみならず揺動力も演算子である。Senitzky等は，注目する系の正準変数に対して任意の時刻で同時刻正準交換関係が成り立つことを要請し，揺動力演算子の交換関係と相関を決めた。

Senitzky等の研究では，揺動力演算子の表現空間は構成されていなかった。量子論では，物理量の演算子はその表現空間が設定されなければ意味をもたない。また，Kuboの指摘 [4] にもあるように，量子Langevin方程式は，注目する系の表現空間と揺動力演算子の表現空間を合わせた全空間で定義される演算子の方程式である。しかし，その後も物理学者による研究では，揺動力演算子の表現空間は構成されなかった。

Hudson, Parthasarathy等数学者は揺動力演算子の表現空間を構成した [5]-[10]。その揺動力をもとに，波動関数に対する確率的なSchrödinger方程式が求められた。その際，通常の量子力学と同様に，時間発展がユニタリになるように構成された。時間発展のユニタリ性は正準演算子形式を構成するための必要条件の一つである。しかし，数学者の研究では，確率Liouville方程式には触れられておらず，研究の対象外にあったと思われる。

確率Liouville方程式は，古典確率過程の研究においてKuboにより最初に導入された [11, 12]。古典系の確率Liouville方程式は，位相空間の確率密度関数に対する運動方程式に，揺動力の影響を取り入れたものである。確率Liouville方程式を量子系に拡張する試みは少ない。Gardiner等 [13, 14] 及びDekker [15] は，トレース形式において，量子Langevin方程式を記述する時間発展演算子の共役演算子を求めることにより，量子確率Liouville方程式を得た。さらに，Gardiner等 [16] は，Hudson等が導入した確率Schrödinger方程式をもとに，密度演算子が波動関数の汎関数であることを用いて確率Lioville方程式を求

めている。しかし，密度演算子の形式では，確率Liouville方程式に現れる注目する系の演算子と密度演算子が，交換子と反交換子を通して複雑にからみあっているため，確率Liouville方程式の時間発展演算子を明確に取り出すことができない。したがって，確率Liouville方程式の時間発展をもとに，正準演算子形式を構成することは困難である。

一方，非平衡Thermo Field Dynamics (NETFD) [17]-[21] の枠組みにおいて，確率Liouville方程式をもとに，量子確率微分方程式の系統的な正準演算子形式の体系が構成された [22]-[32]。その体系では，量子確率微分方程式(量子Langevin方程式，量子確率Liouville方程式)が対応する量子マスター方程式と一貫した形で構成される。NETFDでは，ティルド付き演算子とティルド無し演算子の二種類の演算子を導入することにより，密度演算子形式の確率Liouville方程式に現れる注目する系の演算子と密度演算子の複雑なからみが解ける。したがって，確率Liouville方程式の時間発展演算子の明確な表式を得ることができ，それをもとに，正準演算子形式を構成することができる。

この論文では，数学者の手続きを拡張しNETFDの枠組に移植することにより，ボゾンの生成，消滅演算子を用いて量子Wiener過程を構成する (第2章)。そこでは，量子Wiener過程の熱の自由度は，NETFDの表現空間である熱空間におけるBogoliubov変換により導入される。その量子Wiener過程をもとにした量子確率解析を説明する (第3章)。時間発展のユニタリ性をもとに，確率Schrödinger方程式を構成する (第4章)。確率Schrödinger方程式をもとに，密度演算子が波動関数の汎関数であることとHilbert空間の量と熱空間の量の間の対応原理を用いて，確率Liouville方程式の時間発展演算子をいかに得ることができるかを示す (第5章)。その確率的時間発展を基礎として，量子確率微分方程式の系統的な正準演算子形式が構成できることを示す(第5章)。

# 2 量子Wiener過程

Hudson, Parthasarathy [5, 9, 10] に従って，絶対零度での量子Wiener過程を構成する。

## 2.1 Fock空間

カノニカル交換関係

$$[b(t),\ b^{\dagger}(s)] = \delta(t-s), \quad [b(t),\ b(s)] = 0, \tag{1}$$

を満たすボゾン演算子 $b(t)$, $b^{\dagger}(t)$ を導入し，真空 $|0\rangle\!\rangle$ 及び $\langle\!\langle 0|$ を

$$b(t)|0\rangle\!\rangle = 0, \quad \langle\!\langle 0|b^{\dagger}(t) = 0, \tag{2}$$

により定義する。

ケットベクトル$|t_1,\cdots,t_n\rangle\rangle$，ブラベクトル$\langle\langle t_1,\cdots,t_n|$を

$$|t_1,\cdots,t_n\rangle\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}b^\dagger(t_1)\cdots b^\dagger(t_n)|0\rangle\rangle, \tag{3}$$

$$\langle\langle t_1,\cdots,t_n|=\langle\langle 0|\frac{1}{\sqrt{n!}}b(t_1)\cdots b(t_n), \tag{4}$$

で定義する。これは，規格直交条件

$$\langle\langle t_1,\cdots,t_n|s_1,\cdots,s_m\rangle\rangle=\delta_{nm}\frac{1}{n!}\sum_P\delta(t_1-s_1)\cdots\delta(t_n-s_n), \tag{5}$$

及び，完全性

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\prod_l^n\int_0^\infty dt_l\right)|t_1,\cdots,t_n\rangle\rangle\langle\langle t_1,\cdots,t_n|=I, \tag{6}$$

を満たす。ただし，(5)式において，$\sum_P$は，与えられた$s_1,\cdots,s_n$に対する$t_1,\cdots,t_n$のすべての順列について和をとることを表す。ケットベクトルの集合$\{|t_1,\cdots,t_n\rangle\rangle\}$とブラベクトルの集合$\{\langle\langle t_1,\cdots,t_n|\}$は，規格直行完全系をなす。規格直行基底$|t_1,\cdots,t_n\rangle\rangle$及び$\langle\langle t_1,\cdots,t_n|$で張られるベクトル空間をFock空間と呼び，$\Gamma^0$と記すことにする。

## 2.2 量子Wiener過程

Fock空間$\Gamma^0$上の演算子$B_t$，$B_t^\dagger$を

$$B_t=\int_0^t ds\ b(s),\quad B_t^\dagger=\int_0^t ds\ b^\dagger(s), \tag{7}$$

により定義する。

$B_t$, $B_t^\dagger$と積$B_t^\dagger B_s$, $B_tB_s^\dagger$の真空$|0\rangle\rangle$及び$\langle\langle 0|$に関する平均は，

$$\langle\langle 0|B_t|0\rangle\rangle=\langle\langle 0|B_t^\dagger|0\rangle\rangle=0, \tag{8}$$

$$\langle\langle 0|B_t^\dagger B_s|0\rangle\rangle=0,\quad \langle\langle 0|B_tB_s^\dagger|0\rangle\rangle=\min(t,s), \tag{9}$$

となる。これは，Fock空間$\Gamma^0$上の演算子$B_t$, $B_t^\dagger$が量子系におけるWiener過程とみなせることを示している。今後，$B_t$及び$B_t^\dagger$を量子Wierner過程と呼ぶことにする*。

増分$dB_t=B_{t+dt}-B_t$, $dB_t^\dagger=B_{t+dt}^\dagger-B_t^\dagger$に対して，相関は

$$\langle\langle 0|dB_t|0\rangle\rangle=\langle\langle 0|dB_t^\dagger|0\rangle\rangle=0, \tag{10}$$

$$\langle\langle 0|dB_tdB_s|0\rangle\rangle=\langle\langle 0|dB_t^\dagger dB_s^\dagger|0\rangle\rangle=0, \tag{11}$$

*$B_t$及び$B_t^\dagger$は，それぞれ生成，消滅過程とも呼ばれる[9, 10]。

$$\langle\!\langle 0|dB_t^\dagger dB_s|0\rangle\!\rangle = 0, \tag{12}$$

$$\langle\!\langle 0|dB_t dB_s^\dagger|0\rangle\!\rangle = \delta(t-s)dtds, \tag{13}$$

となる。また，積の規則は，

$$\begin{array}{c|ccc} & dB_t & dB_t^\dagger & dt \\ \hline dB_t & 0 & dt & 0 \\ dB_t^\dagger & 0 & 0 & 0 \\ dt & 0 & 0 & 0 \end{array} \tag{14}$$

である。

## 2.3 有限温度の量子 Wiener 過程

Fock 空間$\tilde{\Gamma}^0$に作用する演算子$\left(\tilde{b}(t), \tilde{b}^\dagger(t)\right)$を導入する。$\tilde{\Gamma}^0$は$\Gamma^0$の**ティルド共役空間**である。**ティルド共役**〜は，次の規則により定義される：

1. $\Gamma^0$上の任意の演算子$A_1$, $A_2$, $A$, 及び任意のc-数$c_1$, $c_2$に対して，

$$(A_1A_2)^\sim = \tilde{A}_1\tilde{A}_2, \tag{15}$$

$$(c_1A_1 + c_2A_2)^\sim = c_1^*\tilde{A}_1 + c_2^*\tilde{A}_2, \tag{16}$$

$$(\tilde{A})^\sim = A, \tag{17}$$

$$(A^\dagger)^\sim = \tilde{A}^\dagger. \tag{18}$$

2. ティルド付き演算子はティルド無し演算子と可換である。すなわち，

$$[A,\ \tilde{B}] = 0. \tag{19}$$

真空$|\tilde{0}\rangle\!\rangle$及び$\langle\!\langle\tilde{0}|$を

$$\tilde{b}(t)|\tilde{0}\rangle\!\rangle = 0, \quad \langle\!\langle\tilde{0}|\tilde{b}^\dagger(t) = 0, \tag{20}$$

で定義する。$\tilde{\Gamma}^0$は真空$|\tilde{0}\rangle\!\rangle$に$\tilde{b}^\dagger(t)$を，真空$\langle\!\langle\tilde{0}|$に$\tilde{b}(t)$を何度も作用して得られる基底ベクトルで張られるFock空間である。

直積空間

$$\Gamma = \Gamma^0 \otimes \tilde{\Gamma}^0, \tag{21}$$

を考える。$\Gamma$の真空$|0)$及び$(0|$は，

$$b(t)|0) = \tilde{b}(t)|0) = 0, \quad (0|b^\dagger(t) = (0|\tilde{b}^\dagger(t) = 0, \tag{22}$$

により定義され,

$$|0) = |0\rangle\!\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle\!\rangle, \quad (0| = \langle\!\langle 0| \otimes \langle\!\langle \tilde{0}|, \tag{23}$$

と表せる。$\Gamma$は,真空$|0)$に$(b^\dagger(t), \tilde{b}^\dagger(t))$を,真空$(0|$に$(b(t), \tilde{b}(t))$を何度も作用して得られる基底ベクトルで張られるFock空間であり,$\Gamma^0$と同様に絶対零度の量子Wiener過程の表現空間である。

温度の自由度は,$\Gamma$に対するBogoliubov変換により導入される。まず,$b^\dagger(t)b(s)$の期待値に対して,

$$\langle b^\dagger(t)b(s)\rangle = \bar{n}\delta(t-s), \tag{24}$$

を要請する。ここで,$\bar{n}$は正の実数,$\langle\cdots\rangle$はある状態ベクトル$\langle|$, 及び$|\rangle$に関する期待値である。条件(24)を保証するには,状態$\langle|$, 及び$|\rangle$に対して**熱状態条件**

$$b(t)|\rangle = \frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}\tilde{b}^\dagger(t)|\rangle, \quad \langle|b^\dagger(t) = \langle|\tilde{b}(t), \tag{25}$$

を課せばよい。状態$|\rangle$を**熱ケット真空**,状態$\langle|$を**熱ブラ真空**と呼ぶ。

熱ケット真空$|\rangle$に対する消滅演算子$c(t)$, $\tilde{c}(t)$及び生成演算子$c^{\natural}(t)$, $\tilde{c}^{\natural}(t)$を

$$c(t)|\rangle = \tilde{c}(t)|\rangle = 0, \quad \langle|c^{\natural}(t) = \langle|\tilde{c}^{\natural}(t) = 0, \tag{26}$$

及び,カノニカル交換関係

$$[c(t),\ c^{\natural}(s)] = [\tilde{c}(t),\ \tilde{c}^{\natural}(s)] = \delta(t-s), \tag{27}$$

$$[c(t),\ c(s)] = [\tilde{c}(t),\ \tilde{c}(s)] = [c(t),\ \tilde{c}(s)] = [c(t),\ \tilde{c}^{\natural}(s)] = 0, \tag{28}$$

$$[c^{\natural}(t),\ c^{\natural}(s)] = [\tilde{c}^{\natural}(t),\ \tilde{c}^{\natural}(s)] = [c^{\natural}(t),\ \tilde{c}(s)] = [c^{\natural}(t),\ \tilde{c}^{\natural}(s)] = 0, \tag{29}$$

を満たすものとして導入する。熱状態条件(25)を思い出せば,$c(t)$, $c^{\natural}(t)$及びそのティルド共役と$b(t)$, $b^\dagger(t)$及びそのティルド共役は,*Bogoliubov*変換 [33]

$$\begin{pmatrix} c(t) \\ \tilde{c}^{\natural}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{n}+1 & -\bar{n} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(t) \\ \tilde{b}^\dagger(t) \end{pmatrix}, \tag{30}$$

により関係づけられることが分かる[†]。

熱ケット真空$|\rangle$に$(c^{\natural}(t), \tilde{c}^{\natural}(t))$を,熱ブラ真空$\langle|$に$(c(t), \tilde{c}(t))$を何度も作用して得られる基底ケットベクトル,基底ブラベクトルで張られるFock空間を$\Gamma^\beta$と記す。

演算子

$$U_B = \exp\left[-\bar{n}\int_0^\infty dt\ b^\dagger(t)\tilde{b}^\dagger(t)\right]\exp\left[\int_0^\infty dt\ b(t)\tilde{b}(t)\right], \tag{31}$$

[†]Bogoliubov変換の表式には,規格化定数の自由度がある。表式(30)は,$\bar{n}$について線形のものである。

$$U_B^{-1} = \exp\left[-\int_0^\infty dt\ b(t)\tilde{b}(t)\right]\exp\left[\bar{n}\int_0^\infty dt\ b^\dagger(t)\tilde{b}^\dagger(t)\right], \tag{32}$$

を導入するとBogoliubov変換(30)は,

$$c(t) = U_B^{-1}b(t)U_B, \quad \tilde{c}^{\ddagger}(t) = U_B^{-1}\tilde{b}^\dagger(t)U_B, \tag{33}$$

と表せる。(22)式, (26)式, 及び(33)式より, $\Gamma^\beta$の熱真空と$\Gamma$の真空を結ぶ関係式

$$|\rangle = U_B^{-1}|0), \quad \langle| = (0|U_B. \tag{34}$$

が分かる。

$U_B^{-1}$を$b(t)$, $b^\dagger(t)$の正規積に書き換えると,

$$\begin{aligned} U_B^{-1} = \exp&\left[\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\int_0^\infty dt\ b^\dagger(t)\tilde{b}^\dagger(t)\right] \\ &\times\exp\left[-\ln(1+\bar{n})\int_0^\infty dt\ \left\{b^\dagger(t)b(t)+\tilde{b}^\dagger(t)\tilde{b}(t)+\delta(0)\right\}\right] \\ &\times\exp\left[-\frac{1}{1+\bar{n}}\int_0^\infty dt\ b(t)\tilde{b}(t)\right], \end{aligned} \tag{35}$$

となる。ここで, $\delta(0)$は$t=0$でのデルタ関数$\delta(t)$である。(35)を(34)の第一式に代入すると,

$$|\rangle = \exp\left[-\delta(0)\ln(1+\bar{n})\int_0^\infty dt\right]\exp\left[\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\int_0^\infty dt\ b^\dagger(t)\tilde{b}^\dagger(t)\right]|0), \tag{36}$$

を得る。$\delta(0)=\infty$であるから, (36)より, 熱真空$|\rangle$を$\Gamma$のベクトルで展開するとその展開係数がすべてゼロであることが分かる。すなわち, 熱真空$|\rangle$には無限個のサーマル・ペア(演算子$b^\dagger(t)\tilde{b}^\dagger(t)$により生成されるエネルギーゼロの粒子ペア)が凝縮しており, $\Gamma$のベクトルのいかなる重ね合わせによっても熱真空$|\rangle$を表すことができない。すなわち, $\Gamma^\beta$と$\Gamma$は**非同値**である。

量子Wiener過程$B_t$, $B_t^\dagger$を$\Gamma^\beta$で表現すると,

$$B_t = \int_0^t ds\ [c(s)+\bar{n}\tilde{c}^{\ddagger}(s)] = C_t + \bar{n}\tilde{C}_t^{\ddagger}, \tag{37}$$

$$B_t^\dagger = \int_0^t ds\ [\tilde{c}(s)+(\bar{n}+1)c^{\ddagger}(s)] = \tilde{C}_t + (\bar{n}+1)C_t^{\ddagger}, \tag{38}$$

となる。ただし,

$$C_t = \int_0^t ds\ c(s), \quad C_t^{\ddagger} = \int_0^t ds\ c^{\ddagger}(s), \tag{39}$$

である。$dC_t$, $dC_t^{\ddagger}$, $d\tilde{C}_t$, $d\tilde{C}_t^{\ddagger}$, 及び$dt$の積の規則は(14)と同様に,

| | $dC_t$ | $dC_t^{\ddagger}$ | $d\tilde{C}_t$ | $d\tilde{C}_t^{\ddagger}$ | $dt$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $dC_t$ | 0 | $dt$ | 0 | 0 | 0 |
| $dC_t^{\ddagger}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $d\tilde{C}_t$ | 0 | 0 | 0 | $dt$ | 0 |
| $d\tilde{C}_t^{\ddagger}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $dt$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

(40)

となる。

$B_t$と$B_t^\dagger$の表式(37), (38), 及び積の規則(40)を用いて，

$$
\begin{aligned}
dB_t dB_t^\dagger &= \left[dC_t + \bar{n} d\tilde{C}_t^{\text{♀}}\right]\left[d\tilde{C}_t + (\bar{n}+1) dC_t^{\text{♀}}\right] \\
&= dC_t d\tilde{C}_t + (\bar{n}+1) dC_t dC_t^{\text{♀}} \\
&\quad + \bar{n} d\tilde{C}_t^{\text{♀}} d\tilde{C}_t + \bar{n}(\bar{n}+1) d\tilde{C}_t^{\text{♀}} dC_t^{\text{♀}} \\
&= (\bar{n}+1) dt,
\end{aligned}
\tag{41}
$$

を得る。同様にして，$dB_t$, $dB_t^\dagger$, $d\tilde{B}_t$, $d\tilde{B}_t^\dagger$及び$dt$の積の規則

| | $dB_t$ | $dB_t^\dagger$ | $d\tilde{B}_t$ | $d\tilde{B}_t^\dagger$ | $dt$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $dB_t$ | 0 | $(\bar{n}+1)dt$ | $\bar{n}dt$ | 0 | 0 |
| $dB_t^\dagger$ | $\bar{n}dt$ | 0 | 0 | $(\bar{n}+1)dt$ | 0 |
| $d\tilde{B}_t$ | $\bar{n}dt$ | 0 | 0 | $(\bar{n}+1)dt$ | 0 |
| $d\tilde{B}_t^\dagger$ | 0 | $(\bar{n}+1)dt$ | $\bar{n}dt$ | 0 | 0 |
| $dt$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

(42)

を得る。$dB_t$, $dB_t^\dagger$, $d\tilde{B}_t$, $d\tilde{B}_t^\dagger$ に対する相関は，

$$\langle dB_t \rangle = \langle dB_t^\dagger \rangle = 0, \tag{43}$$

$$\langle dB_t dB_s \rangle = \langle dB_t^\dagger dB_s^\dagger \rangle = 0, \tag{44}$$

$$\langle dB_t^\dagger dB_s \rangle = \bar{n}\delta(t-s) dt ds, \tag{45}$$

$$\langle dB_t dB_s^\dagger \rangle = (\bar{n}+1)\delta(t-s) dt ds, \tag{46}$$

となる。ただし，$\langle \cdots \rangle = \langle | \cdots | \rangle$ である。$\bar{n}$をPlanck分布

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad \beta = 1/T, \tag{47}$$

にとると，(43)-(46)より，量子Wiener過程$B_t$, $B_t^\dagger$は量子光学の問題に対して導入された有限温度の量子雑音と同等であることが分かる[3]。

# 3 量子確率解析

量子Wiener過程$B_t$, $B_t^\dagger$及びそのティルド共役を$\bar{B}_t^\#$と記し，$X_t$を**適合過程** (adapted process)，すなわち，$s \le t$の量子Wiener過程$\bar{B}_s^\#$にのみ依存する演算子$X_t = X[\bar{B}_s^\# : s \le t]$とする。

***Ito* 型の積**を

$$X_t d\bar{B}_t^{\#} \equiv X_t(\bar{B}_{t+dt}^{\#} - \bar{B}_t^{\#}), \tag{48}$$

$$d\bar{B}_t^{\#} X_t \equiv (\bar{B}_{t+dt}^{\#} - \bar{B}_t^{\#})X_t, \tag{49}$$

と定義する。適合過程の定義より，Ito型の積では，

$$[X_t,\ d\bar{B}_t^{\#}] = 0, \tag{50}$$

が成り立つ。また，

$$\langle| d\bar{B}_t^{\#} X_t |\rangle = \langle| X_t d\bar{B}_t^{\#} |\rangle = 0, \tag{51}$$

すなわち，$X_t$ と $d\bar{B}_t^{\#}$ の間には，相関がない。

一方，***Stratonovich* 型の積**は

$$X_t \circ d\bar{B}_t^{\#} = \frac{X_{t+dt} + X_t}{2}(\bar{B}_{t+dt}^{\#} - \bar{B}_t^{\#}), \tag{52}$$

$$d\bar{B}_t^{\#} \circ X_t = (\bar{B}_{t+dt}^{\#} - \bar{B}_t^{\#})\frac{X_{t+dt} + X_t}{2}, \tag{53}$$

と定義される。Stratonovich型の積では，

$$[X_t \mathbin{\mathring{;}}\ d\bar{B}_t^{\#}] \equiv X_t \circ d\bar{B}_t^{\#} - d\bar{B}_t^{\#} \circ X_t \neq 0, \tag{54}$$

である。また，Ito型の積の場合と異なり，

$$\langle| X_t \circ d\bar{B}_t^{\#} |\rangle \neq 0, \quad \langle| d\bar{B}_t^{\#} \circ X_t |\rangle \neq 0, \tag{55}$$

である。

$X_{t+dt} = X_t + dX_t$ を (52) 及び (53) に代入すると，Ito型とStratonovich型の積の関係式

$$X_t \circ d\bar{B}_t^{\#} = X_t d\bar{B}_t^{\#} + \frac{1}{2} dX_t d\bar{B}_t^{\#}, \tag{56}$$

$$d\bar{B}_t^{\#} \circ X_t = d\bar{B}_t^{\#} X_t + \frac{1}{2} d\bar{B}_t^{\#} dX_t, \tag{57}$$

を得る。

$F_t,\ G_t,\ H_t,\ J_t,\ K_t,\ F'_t,\ G'_t,\ H'_t,\ J'_t,\ K'_t$ を適合過程として，**量子確率積分**

$$N_T = \int_0^T \left( F_t dB_t + G_t dB_t^{\dagger} + J_t d\tilde{B}_t + K_t d\tilde{B}_t^{\dagger} + H_t dt \right), \tag{58}$$

$$N'_T = \int_0^T \left( F'_t dB_t + G'_t dB_t^{\dagger} + J'_t d\tilde{B}_t + K'_t d\tilde{B}_t^{\dagger} + H'_t dt \right), \tag{59}$$

を定義する。$N_t$, $N_t'$もまた適合過程である。適合過程$N_t$, $N_t'$に対して，量子Ito公式 [5, 9, 10]

$$d(N_t N_t') = dN_t \cdot N_t' + N_t \cdot dN_t' + dN_t dN_t', \tag{60}$$

が成り立つ。Ito型の積とStratonovich型の積の関係式(56)，(57)を用いると，

$$N_t \circ dN_t' = N_t dN_t' + \frac{1}{2} dN_t dN_t', \tag{61}$$

$$dN_t \circ N_t' = dN_t N_t' + \frac{1}{2} dN_t dN_t', \tag{62}$$

を得る。したがって，量子Ito公式(60)は，Stratonovich型の積を用いて，

$$d(N_t N_t') = dN_t \circ N_t' + N_t \circ dN_t', \tag{63}$$

と表せることが分かる。この表式は，通常の積の微分の公式と一致している。

# 4　確率Schrödinger方程式

量子Wiener過程と相互作用する系を考え，その表現空間を$\mathcal{H}_S^0$とする。全系の表現空間は$\mathcal{H}_S^0 \otimes \Gamma^\beta$である。

系の状態は$\mathcal{H}_S^0 \otimes \Gamma^\beta$で定義される波動関数$|\psi_f(t)\rangle\!\rangle$で記述されるとする。波動関数$|\psi_f(t)\rangle\!\rangle$は，Schrödinger方程式

$$d|\psi_f(t)\rangle\!\rangle = -i\mathcal{H}_{f,t} dt |\psi_f(t)\rangle\!\rangle, \tag{64}$$

に従うとする。無限小時間発展演算子$\mathcal{H}_{f,t}$は量子Wiener過程を含んでおり，(64)は$|\psi_f(t)\rangle\!\rangle$の確率的時間発展を記述する。方程式(64)を**確率*Schrödinger*方程式**と呼ぶことにする。

方程式(64)の形式解は，

$$|\psi_f(t)\rangle\!\rangle = V_f(t) |\psi_f(0)\rangle\!\rangle, \tag{65}$$

と書かれる。ただし，$V_f(t)$は方程式

$$dV_f(t) = -i\mathcal{H}_{f,t} dt V_f(t), \quad V_f(0) = 1, \tag{66}$$

を満たす確率的時間発展演算子である。

時間発展演算子$V_f(t)$に対して，ユニタリ性の条件を課す。すなわち，

$$V_f^\dagger(t) V_f(t) = V_f(t) V_f^\dagger(t) = 1. \tag{67}$$

これより，Ito型の計算規則を用いて，

$$d[V_f^\dagger(t)V_f(t)] = dV_f^\dagger(t)\cdot V_f(t) + V_f^\dagger(t)\cdot dV_f(t) + dV_f^\dagger(t)dV_f(t) = 0, \tag{68}$$

及び，

$$d[V_f(t)V_f^\dagger(t)] = dV_f(t)\cdot V_f^\dagger(t) + V_f(t)\cdot dV_f^\dagger(t) + dV_f(t)dV_f^\dagger(t) = 0, \tag{69}$$

を得る。方程式(66)とそのエルミート共役を，条件(68), (69)に用いることにより，無限小時間発展演算子$\mathcal{H}_{f,t}dt$が求まり，Ito型確率Schrödinger方程式(64)が得られる。

Ito型とStratonovich型の積の関係式(57)を用いると，次のように，Ito型の確率微分方程式(66)をStratonovich型の確率微分方程式に書き換えられる：

$$\begin{aligned} dV_f(t) &= -i\mathcal{H}_{f,t}dtV_f(t) \\ &= -i\left\{\mathcal{H}_{f,t}dt \circ V_f(t) - \frac{1}{2}\mathcal{H}_{f,t}dt\ dV_f(t)\right\} \\ &\equiv -iH_{f,t}dt \circ V_f(t), \end{aligned} \tag{70}$$

$$H_{f,t}dt \equiv \mathcal{H}_{f,t}dt + i\frac{1}{2}\mathcal{H}_{f,t}dt\mathcal{H}_{f,t}dt. \tag{71}$$

ここで，(70)式右辺第二式の$dV_f(t)$に(66)を代入した。方程式(70)は，Stratonovich型の計算規則を用いたユニタリ性の条件，

$$d\left[V_f^\dagger(t)V_f(t)\right] = dV_f^\dagger(t)\circ V_f(t) + V_f^\dagger(t)\circ dV_f(t) = 0, \tag{72}$$

$$d\left[V_f(t)V_f^\dagger(t)\right] = dV_f(t)\circ V_f^\dagger(t) + V_f(t)\circ dV_f^\dagger(t) = 0, \tag{73}$$

を満足する。

方程式(70)をケットベクトル$|\psi_f(0)\rangle\!\rangle$に作用させることにより，Stratonovich型確率Schrödinger方程式

$$d|\psi_f(t)\rangle\!\rangle = -iH_{f,t}dt \circ |\psi_f(t)\rangle\!\rangle, \tag{74}$$

を得る。

例として，量子Wiener過程との相互作用が

$$i\sqrt{2\kappa}\left(a^\dagger dB_t - a\ dB_t^\dagger\right),$$

で与えられるボゾン系を考える。$a$, $a^\dagger$は交換関係

$$[a,\ a^\dagger] = 1, \quad [a,\ a] = 0, \tag{75}$$

を満たす演算子である。この系に対するIto型の無限小時間発展演算子$\mathcal{H}_{f,t}dt$は,

$$\mathcal{H}_{f,t}dt = H_S dt - i\kappa[(\bar{n}+1)a^\dagger a + \bar{n}aa^\dagger]dt + i\sqrt{2\kappa}\left(a^\dagger dB_t - adB_t^\dagger\right), \tag{76}$$

となり，また，Stratonovich型の無限小時間発展演算子$H_{f,t}dt$は,

$$H_{f,t}dt = H_S dt + i\sqrt{2\kappa}\left(a^\dagger dB_t - adB_t^\dagger\right), \tag{77}$$

となる。ただし，$H_S$はエルミート演算子である。

# 5 熱空間における確率的時間発展

ここでは，前章で求めた確率Schrödinger方程式をもとに，NETFDの枠組における量子確率微分方程式(確率Liouville方程式，Langevin方程式)を導出する。

## 5.1 熱真空

まず，波動関数$|\psi_f(t)\rangle\!\rangle$に対応する密度演算子$\rho_f(t)$を,

$$\rho_f(t) \equiv |\psi_f(t)\rangle\!\rangle\langle\!\langle\psi_f(t)|, \tag{78}$$

と定義する。(65)式とそのエルミート共役を用いると，(78)は,

$$\rho_f(t) = V_f(t)|\psi_f(0)\rangle\!\rangle\langle\!\langle\psi_f(0)|V_f^\dagger(t) = V_f(t)\rho_f(0)V_f^\dagger(t), \tag{79}$$

となる。Hilbert空間の量とNETFDの表現空間である**熱空間**の量の間の**対応原理**(付録A参照)を用いると，密度演算子$\rho_f(t)$は熱空間の熱ケット真空として表現される：

$$|0_f(t)\rangle \equiv |\rho_f(t)\rangle = \hat{V}_f(t)|0_f(0)\rangle. \tag{80}$$

ただし，**確率的時間発展演算子**$\hat{V}_f(t)$は,

$$\hat{V}_f(t) = V_f(t)\tilde{V}_f(t), \tag{81}$$

と定義される。$V_f(0)=1$より，$\hat{V}_f(0)=1$である。**熱真空**$|0_f(t)\rangle$が属するベクトル空間は$\mathcal{H}_S\otimes\Gamma^\beta$である。ただし，$\mathcal{H}_S$は，注目する系の表現空間$\mathcal{H}_S^0$とそのティルド共役空間$\tilde{\mathcal{H}}_S^0$との直積空間$\mathcal{H}_S=\mathcal{H}_S^0\otimes\tilde{\mathcal{H}}_S^0$である。また，$\Gamma^\beta$は，2.3節で構成された量子Wiener過程の表現空間である。(81)式で定義された時間発展演算子$\hat{V}_f(t)$は$\mathcal{H}_S\otimes\Gamma^\beta$上の演算子である。$V_f(t)$のユニタリ性より，$\hat{V}_f(t)$はユニタリであることが分かる：

$$\hat{V}_f^\dagger(t) = V_f^\dagger(t)\tilde{V}_f^\dagger(t) = V_f^{-1}(t)\tilde{V}_f^{-1}(t) = \hat{V}_f^{-1}(t). \tag{82}$$

## 5.2 確率 Liouville 方程式

Ito 型の計算規則を用いて，(81) の微分を計算すると，

$$d\hat{V}_f(t) = dV_f(t)\cdot\tilde{V}_f(t) + V_f(t)\cdot d\tilde{V}_f(t) + dV_f(t)d\tilde{V}_f(t), \tag{83}$$

を得る。(66) 式とそのティルド共役

$$d\tilde{V}_f(t) = i\tilde{\mathcal{H}}_{f,t}dt\tilde{V}_f(t), \tag{84}$$

を (83) 式に代入すると，Ito 型の時間発展方程式

$$d\hat{V}_f(t) = -i\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt\hat{V}_f(t), \tag{85}$$

を得る。ただし，

$$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt \equiv \mathcal{H}_{f,t}dt - \tilde{\mathcal{H}}_{f,t}dt + i\mathcal{H}_{f,t}dt\tilde{\mathcal{H}}_{f,t}dt, \tag{86}$$

である。

一方，Stratonovich 型の計算規則を用いて，(81) の微分を計算すると，

$$d\hat{V}_f(t) = dV_f(t)\circ\tilde{V}_f(t) + V_f(t)\circ d\tilde{V}_f(t), \tag{87}$$

を得る。(70) 式とそのティルド共役

$$d\tilde{V}_f(t) = i\tilde{H}_{f,t}dt\circ\tilde{V}_f(t), \tag{88}$$

を (87) に代入すると，Stratonovich 型の時間発展方程式

$$d\hat{V}_f(t) = -i\hat{H}_{f,t}dt\circ\hat{V}_f(t), \tag{89}$$

を得る。ただし，

$$\hat{H}_{f,t}dt \equiv H_{f,t}dt - \tilde{H}_{f,t}dt, \tag{90}$$

である。

方程式 (85) と (89) を熱ケット真空 $|0_f(0)\rangle$ に作用することにより，Ito 型の確率 Liouville 方程式

$$d|0_f(t)\rangle = -i\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt|0_f(t)\rangle, \tag{91}$$

及び，Stratonovich 型の確率 Liouville 方程式

$$d|0_f(t)\rangle = -i\hat{H}_{f,t}dt\circ|0_f(t)\rangle, \tag{92}$$

を得る。

(86)に(76)を代入し，積の規則(42)を用いると，Ito型の無限小時間発展演算子のボゾン系に対する表式

$$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt = \hat{H}_S dt + i\left(\hat{\Pi}_R + \hat{\Pi}_D\right)dt + d\hat{M}_t, \tag{93}$$

を得る。ただし，

$$\hat{H}_S = H_S - \tilde{H}_S, \tag{94}$$

$$\hat{\Pi}_R = -\kappa\left[(a^\dagger - \tilde{a})(\mu a + \nu\tilde{a}^\dagger) + \text{t.c.}\right], \tag{95}$$

$$\hat{\Pi}_D = 2\kappa(\bar{n} + \nu)(a^\dagger - \tilde{a})(\tilde{a}^\dagger - a), \tag{96}$$

である。また，$d\hat{M}_t$は，$\mu + \nu = 1$を満たす実数$\mu, \nu$を用いて，

$$d\hat{M}_t = i\left\{\left[(a^\dagger - \tilde{a})dW_t + \text{t.c.}\right] - \left[(\mu a + \nu\tilde{a}^\dagger)dW_t^{\natural} + \text{t.c.}\right]\right\}, \tag{97}$$

と与えられる。演算子$dW_t$及び$dW_t^{\natural}$は，

$$dW_t \equiv \sqrt{2\kappa}\left(\mu dB_t + \nu d\tilde{B}_t^\dagger\right), \quad dW_t^{\natural} \equiv \sqrt{2\kappa}\left(dB_t^\dagger - d\tilde{B}_t\right), \tag{98}$$

と定義される。一方，(77)を(90)に代入すると，Stratonovich型の無限小時間発展演算子の表式

$$\hat{H}_{f,t}dt = \hat{H}_S dt + d\hat{M}_t, \tag{99}$$

を得る。

## 5.3 量子マスター方程式

Ito型の確率Liouville方程式(91)をブラ真空$\langle|$に作用すると，$|0(t)\rangle = \langle|0_f(t)\rangle$に対する方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle = -i\hat{H}|0(t)\rangle, \tag{100}$$

を得る。(100)式は，確率Liouville方程式を量子Wiener過程に関する平均をとった量子マスター方程式である。

ボゾン系に対する無限小時間発展演算子$\hat{H}$は，(93)を用いると，

$$\hat{H} = \hat{H}_S + i\hat{\Pi}, \tag{101}$$

となることが分かる。ただし，

$$\begin{aligned}\hat{\Pi} &= \hat{\Pi}_R + \hat{\Pi}_D \\ &= -\kappa\left[(1+2\bar{n})\left(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}\right) - 2(1+\bar{n})a\tilde{a} - 2\bar{n}a^\dagger\tilde{a}^\dagger\right] - 2\kappa\bar{n},\end{aligned} \tag{102}$$

である。この表式を得る際，Ito型の積の性質(51)を用いて，

$$\langle|d\hat{M}_t|0_f(t)\rangle = \langle|d\hat{M}_t\hat{V}_f(t)|0_f(0)\rangle = 0, \tag{103}$$

となることを用いた。ただし，注目するボゾン系の熱真空を $|0_S\rangle$ として，

$$|0_f(0)\rangle = |0_S\rangle|\rangle, \tag{104}$$

と仮定した[‡]。

## 5.4 量子 Langevin 方程式

時間発展演算子 $\hat{V}_f(t)$ を用いて，注目する系の任意の演算子 $A$ に対して，Heisenberg 表示の演算子 $A(t)$ を，

$$A(t) = \hat{V}_f^\dagger(t)A\hat{V}_f(t), \tag{105}$$

と定義する。

Ito型の計算規則を用いると，(105) より

$$dA(t) = d\hat{V}_f^\dagger(t)A\hat{V}_f(t) + \hat{V}_f^\dagger(t)Ad\hat{V}_f(t) + d\hat{V}_f^\dagger(t)Ad\hat{V}_f(t), \tag{106}$$

を得る。$\hat{V}_f(t)$ の時間発展方程式 (85) 及び $\hat{V}_f^\dagger(t)$ の時間発展方程式

$$d\hat{V}_f^\dagger(t) = i\hat{V}_f^\dagger(t)\hat{\mathcal{H}}_{f,t}^- dt, \tag{107}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}^- dt \equiv \mathcal{H}_{f,t}^\dagger dt - \tilde{\mathcal{H}}_{f,t}^\dagger dt - i\mathcal{H}_{f,t}^\dagger dt\tilde{\mathcal{H}}_{f,t}^\dagger dt, \tag{108}$$

を (106) に用いると，Ito型の量子 Langevin 方程式を得る。ボゾン系に対しては，無限小時間発展演算子 $\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt$ は (93) で与えられ，また，$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}^- dt$ は

$$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}^- dt = \hat{H}_S dt - i\left(\hat{\Pi}_R + \hat{\Pi}_D\right)dt + d\hat{M}_t, \tag{109}$$

と与えられることに注意すると，Ito型量子 Langevin 方程式は

$$\begin{aligned} dA(t) = {} & i[\hat{H}_S(t),\ A(t)]dt \\ & +\kappa\left\{\left[a^\dagger(t) - \tilde{a}(t),\ A(t)\right]\left(\mu a(t) + \nu\tilde{a}^\dagger(t)\right)\right. \\ & -\left(a^\dagger(t) - \tilde{a}(t)\right)\left[\mu a(t) + \nu\tilde{a}^\dagger(t),\ A(t)\right] \end{aligned}$$

[‡] (104) は，$|0_f(0)\rangle$ が $|0_S\rangle$ と $|\rangle$ の直積であること，すなわち $|0_f(0)\rangle = |0_S\rangle \otimes |\rangle$ を表す。以下，直積の記号⊗を省略する。

$$
\begin{aligned}
&+\left[\tilde{a}^{\dagger}(t)-a(t),\ A(t)\right]\left(\mu\tilde{a}(t)+\nu a^{\dagger}(t)\right)\\
&-\left(\tilde{a}^{\dagger}(t)-a(t)\right)\left[\mu\tilde{a}(t)+\nu a^{\dagger}(t),\ A(t)\right]\Big\}\,dt\\
&+2\kappa(\bar{n}+\nu)\left[\tilde{a}^{\dagger}(t)-a(t),\ \left[a^{\dagger}(t)-\tilde{a}(t),\ A(t)\right]\right]dt\\
&-\left\{\left[a^{\dagger}(t)-\tilde{a}(t),\ A(t)\right]dW_t+\left[\tilde{a}^{\dagger}(t)-a(t),\ A(t)\right]d\tilde{W}_t\right\}\\
&+\left\{\left[\mu a(t)+\nu\tilde{a}^{\dagger}(t),\ A(t)\right]dW_t^{\mathring{\dagger}}+\left[\mu\tilde{a}(t)+\nu a^{\dagger}(t),\ A(t)\right]d\tilde{W}_t^{\mathring{\dagger}}\right\},
\end{aligned}
\tag{110}
$$

となる。

一方，Stratonovich 型の計算規則を用いると，(105) より

$$
dA(t)=d\hat{V}_f^{\dagger}(t)\circ A\hat{V}_f(t)+\hat{V}_f^{\dagger}(t)A\circ d\hat{V}_f(t),
\tag{111}
$$

を得る。$\hat{V}_f(t)$ の時間発展方程式 (89) とそのエルミート共役を上式に代入すると，Stratonovich 型量子 Langevin 方程式を得る。$\hat{H}_{f,t}dt$ のエルミート性に注意すると，Stratonovich 型量子 Langevin 方程式は

$$
dA(t)=i\left[\hat{H}_f(t)dt\ \overset{\circ}{,}\ A(t)\right],
\tag{112}
$$

のように Heisenberg 方程式の形に書かれることが分かる。ただし，

$$
\hat{H}_f(t)dt=\hat{V}_f^{\dagger}(t)\circ\hat{H}_{f,t}dt\circ\hat{V}_f(t),
\tag{113}
$$

である。ボゾン系に対する無限小時間発展演算子 $\hat{H}_{f,t}dt$ の表式 (99) を用いると，

$$
\begin{aligned}
dA(t)=\;&i\left[\hat{H}_S(t),\ A(t)\right]dt\\
&-\left\{\left[a^{\dagger}(t)-\tilde{a}(t),\ A(t)\right]\circ dW(t)+\left[\tilde{a}^{\dagger}(t)-a(t),\ A(t)\right]\circ d\tilde{W}(t)\right\}\\
&+\Big\{\left[\mu a(t)+\nu\tilde{a}^{\dagger}(t),\ A(t)\right]\circ dW^{\mathring{\dagger}}(t)\\
&+\left[\mu\tilde{a}(t)+\nu a^{\dagger}(t),\ A(t)\right]\circ d\tilde{W}^{\mathring{\dagger}}(t)\Big\},
\end{aligned}
\tag{114}
$$

を得る。ただし，$dW(t)$, $dW^{\mathring{\dagger}}(t)$, $d\tilde{W}(t)$, $d\tilde{W}^{\mathring{\dagger}}(t)$ は

$$
dW(t)\equiv\hat{V}_f^{\dagger}(t)\circ dW_t\circ\hat{V}_f(t),
\tag{115}
$$

$$
dW^{\mathring{\dagger}}(t)\equiv\hat{V}_f^{\dagger}(t)\circ dW_t^{\mathring{\dagger}}\circ\hat{V}_f(t),
\tag{116}
$$

$$
d\tilde{W}(t)\equiv\hat{V}_f^{\dagger}(t)\circ d\tilde{W}_t\circ\hat{V}_f(t),
\tag{117}
$$

$$
d\tilde{W}^{\mathring{\dagger}}(t)\equiv\hat{V}_f^{\dagger}(t)\circ d\tilde{W}_t^{\mathring{\dagger}}\circ\hat{V}_f(t),
\tag{118}
$$

である。

Ito型の積とStratonovich型の積の関係(56), (57), 及び積の規則(42)より, $dW(t), dW^{\dagger}(t)$, $d\tilde{W}(t), d\tilde{W}^{\dagger}(t)$ をそれぞれ $dW_t$, $dW_t^{\dagger}$, $d\tilde{W}_t$, $d\tilde{W}_t^{\dagger}$ で表した式,

$$dW(t) = dW_t - \kappa\left[\mu a(t) + \nu\tilde{a}^{\dagger}(t)\right]dt, \tag{119}$$

$$dW^{\dagger}(t) = dW_t^{\dagger} - \kappa\left[a^{\dagger}(t) - \tilde{a}(t)\right]dt, \tag{120}$$

$$d\tilde{W}(t) = d\tilde{W}_t - \kappa\left[\mu\tilde{a}(t) + \nu a^{\dagger}(t)\right]dt, \tag{121}$$

$$d\tilde{W}^{\dagger}(t) = d\tilde{W}_t^{\dagger} - \kappa\left[\tilde{a}^{\dagger}(t) - a(t)\right]dt, \tag{122}$$

を得る。(119)–(122)を(114)に代入すると, Stratonovich型量子Langevin方程式(114)は

$$\begin{aligned}
dA(t) = i&\left[\hat{H}_S(t),\ A(t)\right]dt \\
&+\kappa\left\{\left[a^{\dagger}(t)-\tilde{a}(t),\ A(t)\right]\left(\mu a(t)+\nu\tilde{a}^{\dagger}(t)\right)\right. \\
&-\left(a^{\dagger}(t)-\tilde{a}(t)\right)\left[\mu a(t)+\nu\tilde{a}^{\dagger}(t),\ A(t)\right] \\
&+\left[\tilde{a}^{\dagger}(t)-a(t),\ A(t)\right]\left(\mu\tilde{a}(t)+\nu a^{\dagger}(t)\right) \\
&\left.-\left(\tilde{a}^{\dagger}(t)-a(t)\right)\left[\mu\tilde{a}(t)+\nu a^{\dagger}(t),\ A(t)\right]\right\}dt \\
&-\left\{\left[a^{\dagger}(t)-\tilde{a}(t),\ A(t)\right]\circ dW_t+\left[\tilde{a}^{\dagger}(t)-a(t),\ A(t)\right]\circ d\tilde{W}_t\right\} \\
&+\left\{dW_t^{\dagger}\circ\left[\mu a(t)+\nu\tilde{a}^{\dagger}(t),\ A(t)\right]\right. \\
&\left.+d\tilde{W}_t^{\dagger}\circ\left[\mu\tilde{a}(t)+\nu a^{\dagger}(t),\ A(t)\right]\right\},
\end{aligned} \tag{123}$$

となる。さらに, Ito型の積とStratonovich型の積の関係(56), (57), 及び積の規則(42)を用いると, Stratonovich型方程式(123)はIto型方程式(110)に一致することが分かる。

## 5.5 期待値の方程式

初期時刻における熱ケット真空 $|0_f(0)\rangle \equiv |0_f\rangle$ は, 注目する系の熱ケット真空 $|0_S\rangle$ と揺動力の系の熱ケット真空 $|\rangle$ との積で(104)のように表せると仮定する。また, 全系の熱ブラ真空 $\langle 1_{tot}|$ は, 任意の時刻で, 注目する系の熱ブラ真空 $\langle 1_S|$ と揺動力の系の熱ブラ真空 $\langle|$ を用いて,

$$\langle 1_{tot}| = \langle|\langle 1_S|, \tag{124}$$

と表せる。

ブラ真空 $\langle 1_{tot}|$ にボゾン系に対するIto型量子Langevin方程式(110)を作用すると,

$$
\begin{aligned}
d\langle 1_{tot}|A(t) = i\langle 1_{tot}|\,[H_S(t),\ A(t)]\,dt \\
&+\kappa\left(\langle 1_{tot}|a^\dagger(t)\,[A(t),\ a(t)] + \langle 1_{tot}|\left[a^\dagger(t),\ A(t)\right]a(t)\right)dt \\
&+2\kappa\bar{n}\langle 1_{tot}|\left[a^\dagger(t),\ [A(t),\ a(t)]\right]dt \\
&+\langle 1_{tot}|\left[A(t),\ a^\dagger(t)\right]dF_t + \langle 1_{tot}|\,[a(t),\ A(t)]\,dF_t^\dagger,
\end{aligned}
\tag{125}
$$

を得る。

さらに，ケット真空 $|0_f(0)\rangle \equiv |0_f\rangle$ に(125)を作用させ，Ito型の積の性質(51)を用いると，任意の物理量 $A$ に対する期待値の方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle 1_{tot}|A(t)|0_f\rangle = i\langle 1_{tot}|\,[H_S(t),\ A(t)]\,|0_f\rangle \\
&+\kappa\left(\langle 1_{tot}|a^\dagger(t)\,[A(t),\ a(t)]\,|0_f\rangle + \langle 1_{tot}|\left[a^\dagger(t),\ A(t)\right]a(t)|0_f\rangle\right) \\
&+2\kappa\bar{n}\langle 1_{tot}|\left[a^\dagger(t),\ [A(t),\ a(t)]\right]|0_f\rangle,
\end{aligned}
\tag{126}
$$

を得る。これは，無限小演算子が(101), (102) で与えられるボゾン系に対するマスター方程式(100) から得られる期待値の方程式と一致しており，ここで構成された量子確率微分方程式の体系が一貫したものであることを示している。

# 6 まとめ

この論文では，Hudson, Parthasarathy等数学者が構成していた量子Wiener過程を拡張し，NETFDの枠組で捉えなおすことにより，量子Wiener過程をその表現空間とともに構成した。それをもとに，数学者により研究されていた確率Schrödinger方程式を求め，それを基礎にNETFDにおける量子確率微分方程式の体系を構成した。

量子Wiener過程は，時間を指標にもつボゾン演算子を用いて構成された。表現空間として，Hudson, Parthasarathyと同様にFock空間 $\Gamma^0$ を採用すれば，絶対零度における量子Wiener過程が得られる。一方，直積空間 $\Gamma = \Gamma^0 \otimes \tilde{\Gamma}^0$ におけるBogoliubov変換により得られるFock空間 $\Gamma^\beta$ を表現空間に採用すれば，有限温度の量子Wiener過程が得られる。絶対零度の真空と有限温度の真空は直行し，それぞれの表現空間はユニタリ非同値である。異なる温度の表現空間がユニタリ非同値であるという性質は，NETFDまたはTFDの特徴的な性質である。

時間発展のユニタリ性をもとに，有限温度の量子Wiener過程を揺動力とする，確率的な波動関数に対するSchrödinger方程式(確率Schrödinger方程式)を求めた。この確率的

な波動関数に対応する確率的な密度演算子を導入し，Hilbert 空間の量と熱空間の量の対応原理により，確率的な密度演算子に対応する熱ケット真空を得た。熱ケット真空の時間発展方程式 (Schrödinger 方程式) として確率 Liouville 方程式を構成した。確率 Liouville 方程式の時間発展演算子を用いて任意の物理量に対する Heisenberg 演算子を定義し，その Heisenberg 演算子の運動方程式として，量子 Langevin 方程式が構成された。このように，熱空間における Schrödinger 表示の方程式として量子確率 Liouville 方程式が，Heisenberg 表示の方程式として量子 Langevin 方程式が構成されるのが，NETFD における量子確率微分方程式の体系の特徴である。

Ito 型の量子確率 Liouville 方程式を量子 Wiener 過程のブラ真空 $\langle|$ に作用することにより，量子マスター方程式を得た。また，Ito 型の量子 Langevin 方程式に対して，初期時刻の熱ケット真空 $|0_f\rangle$ と熱ブラ真空 $\langle 1_{tot}|$ に関する期待値をとることにより，任意の物理量の期待値の方程式を得た。この方程式がマスター方程式から求めた期待値の方程式と一致していることは，体系の一貫性を示している。

Hudson, Lindsay は，注目する系の Hiilbert 空間 $\mathcal{H}_S^0$ と有限温度の量子 Wiener 過程の熱空間 $\Gamma^\beta$ の直積空間 $\mathcal{H}_S^0 \otimes \Gamma^\beta$ 上で確率的時間発展を構成した。そこでは，注目する系に対する表現空間が熱空間ではないので，確率 Liouville 方程式を導入することができない。我々は，注目する系に対しても熱空間を採用することにより，確率 Liouville 方程式を導入することができたのである。

この論文で構成した熱空間における確率的時間発展は，ユニタリである。一方，非ユニタリな確率的時間発展が，NETFD の枠組みで構成されている [22]-[32]。このように，NETFD では時間発展がユニタリの体系と非ユニタリの体系が可能であることが分かった。これら二つの体系は，物理量の期待値の方程式に対して同じ表式を与えるという意味で同等である。両体系の関係を調べることは今後の課題である。

# A 対応原理

熱空間のベクトルと Hilbert 空間の演算子の間の対応原理は，以下の規則で与えられる [34, 17, 18]:

$$
\begin{aligned}
\rho_S(t) &\longleftrightarrow |0(t)\rangle, \\
A_1 \rho_S(t) A_2 &\longleftrightarrow A_1 \tilde{A}_2^{\dagger} |0(t)\rangle.
\end{aligned}
$$

ただし，$\rho_S(t)$ は Hilbert 空間上の密度演算子であり，$|0(t)\rangle$ は熱空間の熱ケット真空である。$A_1$, $A_2$ は Hilbert 空間上の任意の演算子である。

# References


[1] I. R. Senitzky, Phys. Rev. **119** (1960) 670.

[2] M. Lax, Phys. Rev. **145** (1966) 110.

[3] H. Haken, *Optics. Handbuch der Physik* vol. XXV/2c (1970), [*Laser Theory* (Springer, Berlin, 1984)], and the references therein.

[4] R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **26** Suppl. (1969) 1.

[5] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, Commun. Math. Phys. **93** (1984) 301.

[6] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, Acta Appl. Math. **2** (1984) 353.

[7] R. L. Hudson and J. M. Lindsay, in *Quantum Probability and Applications II*, eds. L. Accardi and W. von Waldenfels, Lecture Notes in Mathematics **1136** (Springer-Verlag, 1984) 276.

[8] R. L. Hudson and J. M. Lindsay, J. Funct. Anal. **61** (1985) 202.

[9] K. R. Parthasarathy, Rev. Math. Phys. **1** (1989) 89.

[10] K. R. Parthasarathy, Monographs in Mathematics Vol. 85, *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus* (Birkhäuser Verlag, 1992).

[11] R. Kubo, J. Math. Phys. **4** (1963) 174.

[12] R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsume, *Statistical Physics II* (Springer, Berlin 1985).

[13] A. S. Parkins and C. W. Gardiner, Phys. Rev. **A37** (1988) 3867.

[14] C. W. Gardiner, *Quantum Noise* Springer Series in Synergetics **56** (Springer-Verlag, 1991).

[15] H. Dekker, Physica **A175** (1991) 485.

[16] C. W. Gardiner, A. S. Parkins and P. Zoller, Phys. Rev. **A46** (1992) 4363.

[17] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 429.

[18] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 32.

[19] T. Arimitsu, in *Thermal Field Theories*, eds. H. Ezawa, T. Arimitsu and Y. Hashimoto (North-Holland, 1991) 207.

[20] T. Arimitsu, Lecture Note of the *Summer School for Younger Physicists in Condensed Matter Physics* [published in "Bussei Kenkyu" (Kyoto) **60** (1993) 491-526, written in English], and the references therein.

[21] T. Arimitsu, Condensed Matter Physics (Lviv, Ukraine) **4** (1994) 26.

[22] T. Arimitsu, Phys. Lett. **A153** (1991) 163.

[23] T. Saito and T. Arimitsu, Modern Phys. Lett. B **6** (1992) 1319.

[24] T. Arimitsu and T. Saito, Bussei Kenkyu **59-2** (1992) 213, in Japanese.

[25] T. Arimitsu and T. Saito, Proc. Field Theory and Collective Phenomena in memory of Prof. H. Umezawa, ed. F. C. Khanna, G. W. Semenoff (World Scientific 1995) 250.

[26] T. Arimitsu and T. Saito, Vistas in Astronomy **37** (1993) 99.

[27] T. Arimitsu, M. Ban and T. Saito, Physica **A177** (1991) 329.

[28] T. Arimitsu, M. Ban and T. Saito, in *Structure: from Physics to General Systems*, eds. M. Marinaro and G. Scarpetta (World Scientific, 1991) 163.

[29] T. Saito and T. Arimitsu, Modern Phys. Lett. B **7** (1993) 623.

[30] T. Saito and T. Arimitsu, Modern Phys. Lett. B **7** (1993) 1951.

[31] T. Arimitsu and T. Saito, *Quantum Stochastic Differential Equations in Phase-Space Methods*, Mod. Phys. Lett. B (1994) submitted.

[32] T. Arimitsu and T. Saito, *General Structure of the Time-Evolution Generator for Quantum Stochastic Liouville Equation* (1996) in preparation to submit.

[33] H. Umezawa, H. Matsumoto and M. Tachiki, *Thermo Field Dynamics and Condensed States* (North-Holland 1982).

[34] M. Schmutz, Z. Phys. **B 30** (1978) 97.