ホワイトノイズ超関数と量子確率微分方程式

名古屋大学大学院
多元数理科学研究科
尾　畑　伸　明
obata@math.nagoya-u.ac.jp

1　はじめに

決定論的な物理系が通常の微分方程式で記述されるのに対して, ランダムな揺らぎを含む物理系には確率微分方程式が用いられる. 確率微分方程式論が数学の一分野として登場したのは比較的新しく 1940 年代のことであり, 伊藤清の業績にちなんで「伊藤解析」とも呼ばれている. 伊藤解析は 1970 年代には無限変数の超関数のアイデアと融合し, 現在では「確率解析」として無限次元解析の理論的興味から諸科学に現れるランダム現象の解析といった応用面にわたり, 広く研究され大いに発展してきている. その中にあって, 量子系への応用という点はやや遅れて, 1980 年頃から伊藤解析の量子版としての量子確率微分方程式の数学的基礎づけが研究され今日に至っている. 古典論の場合を振り返れば, 量子確率微分方程式を超関数論的に取り扱うことの実効性が予想される. この論文では, 数年前から著者が展開しているホワイトノイズ超関数論によるアプローチを紹介するとともに, 特に, 量子確率微分方程式の解の存在と構成について論ずる.

まず, 簡単な Langevin 方程式の例を通してホワイトノイズ超関数論の基本的なアイデアを説明しよう. 速度 $v = v(t)$ の粒子 (質量は 1 とする) が粘性抵抗 (抵抗係数 $k > 0$) のある媒質の中を外力 $f = f(t)$ を受けながら運動する系は Newton 方程式

$$\frac{dv}{dt} = -kv + f, \qquad v|_{t=0} = v_0, \tag{1.1}$$

で記述される. ここで, 外力は位置には無関係だが, 時間とともに変化しても良いとしている. 今, $t \mapsto f(t)$ が (例えば) 連続関数であれば, (1.1) は容易に解けて,

$$v(t) = e^{-kt}v_0 + e^{-kt}\int_0^t e^{ks}f(s)ds \tag{1.2}$$

となる. では, 外力に揺らぎのある場合はどうなるだろうか. この場合は, 各時刻 t で発生する外力 $f(t)$ はある確率分布に従う確率変数と考えられる. (一般に, 時間パラメータ付きの確率変数は確率過程と呼ばれる.) はっきりさせるために, 確率空間 (Ω, P) を導入し, $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to f(t,\omega) \in \mathbb{R}$ と表示しよう. たとえ f が確率過程であっても, 各サンプル $\omega \in \Omega$ に対して $t \mapsto f(t,\omega)$ が連続関数であれば, (1.2) は定義され, 解 $v(t) = v(t,\omega)$ は確率過程として得られる. 確率変数の基本的な特性量は平均と分散である. 簡単のため, 外力の平均値

$\mathbf{E}(f(t))=0$ を仮定しよう．このとき，確率過程 $v(t)$ の平均と分散は，(1.2) から容易に求められ，

$$\mathbf{E}(v(t)) = e^{-kt}v_0 + e^{-kt}\int_0^t e^{ks}\mathbf{E}(f(s))\,ds = e^{-kt}v_0 \tag{1.3}$$

$$\mathbf{V}(v(t)) = e^{-2kt}\int_0^t\int_0^t e^{k(r+s)}\mathbf{E}(f(r)f(s))\,drds \tag{1.4}$$

となる．分散がランダム力 $f(t)$ の時間相関関数 $\mathbf{E}(f(r)f(s))$ で与えられることに注意しておく．時間相関関数が

$$\mathbf{E}(f(r)f(s)) = \delta(r-s) \tag{1.5}$$

のようにデルタ関数で与えられるランダム力は，一般にホワイトノイズと呼ばれる．このとき，(1.4) は

$$\mathbf{V}(v(t)) = e^{-2kt}\int_0^t e^{2ks}\,ds = \frac{1-e^{-2kt}}{2k} \tag{1.6}$$

となる．ここで注意すべきことは，"普通の関数ではない"デルタ関数を導入したので，確率過程としての $f(t)$ はもはや仮想のものであって，方程式 (1.1) やその解 (1.2) は全く意味を失っていることである．さらに $f(t)$ の高次の時間相関関数が

$$\mathbf{E}(f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{2n-1})) = 0$$
$$\mathbf{E}(f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{2n})) = \sum_\sigma \delta(t_{\sigma(1)}-t_{\sigma(2)})\delta(t_{\sigma(3)}-t_{\sigma(4)})\cdots\delta(t_{\sigma(2n-1)}-t_{\sigma(2n)})$$

のように与えられているとき，$f(t)$ は，Gauss 型ホワイトノイズと呼ばれる．ここで，$\sum_\sigma$ は異なるタイプのデルタ関数の積が各々1度ずつ現れるように (σ の取り方は $(2n)!/(2^n n!)$ 通りある) とる．このとき，$v(t)$ は Gauss 分布に従い $t\to\infty$ の定常状態では，その平均と分散は (1.3), (1.6) から判るように，それぞれ 0, $1/2k$ で与えられる．この分布は Maxwell 分布とも呼ばれ気体分子運動論では馴染みのものである．こうして，確率変数としては形式的ではあるが，Gauss 型ホワイトノイズは基本的なノイズ源といえるのである [33].

このような形式的な確率変数や計算を正当化する数学，つまり確率過程に基づく微積分法は伊藤清によって創始され，今日では「伊藤解析」と呼ばれている．その基礎は，Brown 運動 B_t の無限小増分 $dB_t = B_{t+dt}-B_t$, $dt>0$, に関する伊藤型確率積分にある．それによれば，(1.1) は

$$dv = -kvdt + dB_t \iff v(t)-v_0 = -k\int_0^t v(s)\,ds + B(t) \tag{1.7}$$

のような「伊藤型確率微分方程式」であるとして出発し，その解は，

$$v(t) = e^{-kt}v_0 + e^{-kt}\int_0^t e^{ks}dB_s$$

のような「伊藤型確率積分」で与えられるのである．1970 年代になると，確率微分方程式に対する超関数的アプローチが現れてきた．超関数論によってデルタ関数が正当化され，微分方程式論に大きな変革が現れたが，同じようなことは確率解析にも期待できる．Malliavin 解析 [22] や飛田解析がその代表的なものである．特に，飛田解析は「ホワイトノイズ解析」とも呼ばれ，一旦は dB_t として姿を消してしまったホワイトノイズをあからさまに数学的対象

として捉える理論である[1]. これについては, 次節以降で詳述するが Gauss 空間上の超関数空間 $(E)^*$ を導入することによって, ホワイトノイズ W_t を $(E)^*$ 内の C^∞-級 flow として取り扱うことができる. そうすると, (1.7) は再び

$$\frac{dv}{dt} = -kv + W_t$$

と書かれる. 形はもとの (1.1) と同一であるが, 解 $v = v(t)$ は $(E)^*$ の中で求めることになる. 考える空間は $(E)^*$ のように無限次元空間になってしまったが, 方程式そのものに特異性はなく, 普通の微積分の規則で解を求めることができ,

$$v(t) = e^{-kt}v_0 + e^{-kt}\int_0^t e^{ks}W_s\,ds$$

となる. これは, 考えている空間は違うのであるが, (1.2) と形は全く同じである. ここで述べてきたものは簡単な一例であるが, ホワイトノイズ解析によって従来の形式的計算に数学的裏付けを与え, 揺らぎの本質を直に捉えることができるようになった.

一方で, 1960 年頃から散逸量子系の解析において量子 Langevin 方程式が議論されてきた (Lax [20], Senitzky [36] など. なお Accardi [1] も参照). それを量子伊藤理論を定式化してユニタリ拡張の問題として捉えたのが Hudson–Parthasarathy [16] であり, その理論の後, 若干の超関数のアイデアも取り入れながら大いに発展して今日に至っている. 最近出版された教科書 Meyer [21], Parthasarathy [32] はこの方面の必携書となっている. まず, Brown 運動を定義する確率空間と $L^2(\mathbb{R})$ 上の Boson Fock 空間 ($\mathbb{R}$ が Brown 運動の時間パラメータを与える) が同型になる (Wiener–Itô–Segal 同型). すると B_t をその Boson Fock 空間上のかけ算作用素とみなすことができ,

$$B_t = A_t + A_t^*$$

のように, さらに「素」な 2 つの量子確率過程に分解することがわかる. A_t, A_t^* はそれぞれ消滅過程, 生成過程と呼ばれている. Hudson–Parthasarathy–Meyer 理論は, それらの無限小増分 dA_t, dA_t^*, 及びゲージ過程の無限小増分 $d\Lambda_t$ に基づく伊藤解析の量子版とでも言うべきものである. 生成・消滅過程によって, 第 3 の量子確率過程 Λ_t を表すことは, 彼らの量子確率積分で許される被積分関数の範囲ではできないが, 応用上極めて重要であるので独立につけ加えられている.

このような流れを眺めれば, ホワイトノイズ解析の量子版を建設し, 応用面を探るのは興味のあることと言えよう. このアプローチの一つの特徴は, デルタ関数を掌中にする超関数論を基礎にしているので, 「素」となるべき量子ノイズは a_t, a_t^* の 2 つで十分であるということである. 実際, "すべて"の量子確率過程を a_t と a_t^* に関する "量子確率積分"で表現することができる[2]. また, このことは, すべての作用素が生成・消滅作用素で表現できるという場の理論における直感にもあっている[3]. こうして, 我々の立場を図示すれば次のようになる.

[1]飛田 [12] に興味深い解説記事がある.

[2]ここで" "をつけたのは, 数学として表現するのだからむろん一定の枠をはめたり, 概念を一般化したりした上で, との意味. 詳しくは本文 §4 を参照されたい.

[3]このことを証明するためには, "すべての作用素" に対して枠をはめなければならない. 有界作用素に対しては Berezin [3], Gelfand triplet に付随したものは Obata [23] で証明された. なお, §3 も参照せよ.

古典確率解析 **量子確率解析**

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\text{Itô 理論}\\ dB_t\end{array}} \arrow[r, "dB_t = dA_t + dA_t^*"] \arrow[d, "dB_t = W_t dt"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Hudson–Parthararathy–Meyer 理論}\\ dA_t,\ dA_t^*,\ d\Lambda_t\end{array}} \arrow[d, "dA_t = a_t dt"] \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{Hida 理論}\\ W_t\end{array}} \arrow[r, "W_t = a_t + a_t^*"'] & \boxed{\begin{array}{c}\text{量子ホワイトノイズ解析 (提案中)}\\ a_t,\ a_t^*\end{array}}
\end{tikzcd}
$$

この論文では, ホワイトノイズ超関数論 (WNDT) を簡単に紹介した後, 量子確率過程がどのようにして素過程である a_t, a_t^* で表現されるかを説明する. その後, 作用素の Wick 積を導入し, 量子確率微分方程式の解の構成に応用する. ホワイトノイズ超関数論については, 最近出版された Kuo [19] は極めて丁寧に書かれており, この方面への格好の入門書である. また, この論文ではホワイトノイズ空間上の作用素論が基礎になっているが, これについては Obata [23] を参照されたい. 量子ホワイトノイズ解析については, 本はまだないが, Obata [27], [28], [29] に多少まとまった記述がある. 関連するものとして, Huang [13], Huang–Luo [14], Obata [25], 大矢–小嶋 [31] なども参照されたい. ここで展開する理論は物理では絶対零度の場合に対応し, 有限温度の場合に拡張することは極めて興味深い問題となる. この観点から Hudson–Lindsay [15] や有光グループによる研究 [2], [34] は重要な指針を与えるものである.

2 ホワイトノイズ超関数論

2.1 Brown 運動からホワイトノイズへ

水中の花粉粒子のジグザグ運動は, 数学的には確率過程として定式化されている. 確率変数の 1 径数族 $\{B_t\}_{t\ge 0}$ で

(i) $\{B_t\}$ は Gauss 系, つまり任意の有限 1 次結合 $c_1 B_{t_1} + \cdots + c_n B_{t_n}$ が Gauss 分布に従う;
(ii) $B_0 = 0,\ \mathbf{E}(B_t) = 0,\ \mathbf{E}(B_s B_t) = \min\{s, t\}$;

を満たすものを Brown 運動または Wiener 過程 と呼ぶ. ここでは, 無限次元 Gauss 測度を用いて Brown 運動を構成する. 他の方法については, [11], [17] などを参照されたい.

実 Hilbert 空間 $H = L^2(\mathbb{R}, dt)$ の実内積とノルムを

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_{\mathbb{R}} \xi(t)\eta(t)\, dt, \qquad |\xi|_0 = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}, \qquad \xi, \eta \in H,$$

によって定義する. (ここで, ノルムの添字 0 は後で便利なようにつけた.) 有限次元 Euclid 空間ならば, Bochner の定理によって確率測度と正定値関数が 1 対 1 対応するが, 無限次元空間に対しては Gelfand triplet を用いなければならない [38]. さて, 無限回微分可能な急減少関数の全体を $E = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, その双対空間, つまり E 上の連続線形 (汎) 関数[4] の全体を

[4] $E = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ の標準的な位相は, ノルムの系列 $\|\xi\|_{j,k} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |t^j \xi^{(k)}(t)|$ で定まる. つまり, ξ_n が ξ に収束するとは任意の j, k に対して $\|\xi_n - \xi\|_{j,k} \to 0$ が成り立つことである.

$E^* = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ で表す. E^* の元は Schwartz の緩増加超関数とも呼ばれ, 例えば, デルタ関数やその微分がそうである. このとき, 自然な包含関係

$$E = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset H = L^2(\mathbb{R}) \subset E^* = \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \tag{2.1}$$

が成り立つことに注意しておこう. $E^* \times E$ 上の標準線形形式は H の内積を拡張したものであるから同じ記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す. また, (2.1) は Gelfand triplet とも呼ばれる[5]. 無限次元空間上の測度論によって,

$$e^{-|\xi|_0^2/2} = \int_{E^*} e^{i\langle x, \xi \rangle} \mu(dx), \qquad \xi \in E,$$

を満たす確率測度 μ が E^* 上に唯一存在する. これを E^* 上の (標準) Gauss 測度, 確率空間 (E^*, μ) を Gauss 空間と呼ぶ.

補 題 2.1 各 $\xi \in E$ に対して, E^* 上の関数を $X_\xi(x) = \langle x, \xi \rangle$, $x \in E^*$, によって定義する. このとき, $\{X_\xi\}_{\xi \in E}$ は平均 0 の Gauss 系であり,

$$\mathbf{E}(X_\xi X_\eta) = \int_{E^*} \langle x, \xi \rangle \langle x, \eta \rangle \, \mu(dx) = \langle \xi, \eta \rangle, \qquad \xi, \eta \in E,$$

が成り立つ.

証明は容易である. この補題によって, 任意の $\xi \in H$ に対して, $X_\xi(x) = \langle x, \xi \rangle$ が定義される. 実際, 近似列 $\xi_n \in E$ を $|\xi_n - \xi|_0 \to 0$ となるように選んで, X_{ξ_n} の L^2-極限を X_ξ とするのである. 特に, 区間 $[0, t]$ の特性関数 $1_{[0,t]}$ は H に属するので,

$$B_t(x) = \left\langle x, 1_{[0,t]} \right\rangle, \qquad x \in E^*, \quad t \geq 0, \tag{2.2}$$

は $L^2(E^*, \mu)$ に属する関数 (Gauss 型確率変数) である. 容易な計算で $\{B_t\}_{t \geq 0}$ は Brown 運動であることがわかる.

ところで, $\{B_t\}_{t \geq 0}$ は平均 0 の Gauss 系なので, 独立性と直交性は同値な概念となる. $s < t$ として, 時間区間 $[s, s+h]$, $[t, t+h]$ を考える. ここで $h > 0$ が小さければ, 時間区間は互いに素になるから $h^{-1}(B_{s+h} - B_s)$ と $h^{-1}(B_{t+h} - B_t)$ は独立になる. 直感的には $h \downarrow 0$ の極限で $\{dB_t/dt\}_{t \geq 0}$ は各時点毎に独立な Gauss 型確率変数の族となりそうである. しかしながら, Brown 運動の殆どすべてのサンプルは, 至る所微分不可能なほどジグザグである (Paley–Wiener–Zygmund の定理 [17]) ので, dB_t/dt は文字どおりには存在しないのである. この事情は, (2.2) を形式的に微分してみても判る:

$$\frac{d}{dt} B_t(x) = \langle x, \delta_t \rangle = x(t), \qquad x \in E^*.$$

x は超関数なのだから, 点 t での値は意味がない. それにも関わらず,

$$W_t(x) = \frac{d}{dt} B_t(x) \tag{2.3}$$

はホワイトノイズと呼ばれ, さまざまな問題に応用されている. デルタ関数が超関数論によって正当化されたように, ホワイトノイズも無限変数の超関数論によって正当化される.

[5] このような関数空間の三つ組は, もともとスペクトル理論の拡張のために導入された [8]. 別の応用として, 量子力学における観測量 (Hilbert 空間上の一般には非有界な自己共役作用素) を連続作用素として取り扱ったり, 複素固有値に意味づけしたりするなどの物理的応用もある [5], [37].

2.2 ホワイトノイズ超関数

一般の記法として, 実空間 $\mathfrak{X}$ に対してその複素化を $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}$ で表す. まず, $H_{\mathbb{C}} = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ 上の Boson Fock 空間を

$$\Gamma(H_{\mathbb{C}}) = \left\{ (f_n)_{n=0}^{\infty}\,; \begin{array}{c} f_n \in H_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} = (L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n))_{\mathrm{sym}}, \\ \|(f_n)\|^2 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n!\,|f_n|_0^2 < \infty \end{array} \right\} \tag{2.4}$$

によって定義する. 但し, $H_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} 0} = \mathbb{C}$ と約束する. ノルムの定義の仕方に注意を要するが[6], 基本的には,

$$\Gamma(H_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C} \oplus H_{\mathbb{C}} \oplus H_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} 2} \oplus \cdots \oplus H_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} \oplus \cdots \quad (\text{Hilbert 空間の直和}) \tag{2.5}$$

と考えて良い. $H_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ は (対称) n 粒子空間とも呼ばれる. さて, ホワイトノイズ超関数の導入の鍵は次の有名な同型定理にある.

定 理 2.2 (Wiener–Itô–Segal) 各 $\xi \in H_{\mathbb{C}}$ に対して, $\phi_\xi \in L^2(E^*, \mu)$ を

$$\phi_\xi(x) = e^{\langle x, \xi \rangle - \langle \xi, \xi \rangle / 2}, \qquad x \in E^*, \tag{2.6}$$

で定めるとき, 対応 $\phi_\xi \quad \longleftrightarrow \quad (1, \xi, \xi^{\otimes 2}/2!, \xi^{\otimes 3}/3!, \cdots)$ は, 線形に拡張されて $L^2(E^*, \mu)$ と $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ のユニタリ同型を与える.

(2.6) の ϕ_ξ を指数ベクトル, 特に ϕ_0 を真空ベクトルという. Wiener–Itô–Segal 同型によって, $\phi \in L^2(E^*, \mu)$ と $(f_n)_{n=0}^{\infty} \in \Gamma(H_{\mathbb{C}})$ が対応しているとき,

$$\phi \sim (f_0, f_1, f_2, \cdots) \tag{2.7}$$

と表す. $\phi \in L^2(E^*, \mu)$ は E^* 上の L^2-関数であるから, 各 $x \in E^*$ に対して殆ど至るところの意味で $\phi(x)$ が確定する. (2.7) の対応があるとき, Wick テンソルを用いれば $\phi(x)$ は (f_n) によって直接的に表示することもできる. 詳しくは Kuo [19], Obata [23] などを見よ.

Wiener–Itô–Segal の同型の下で Brown 運動は

$$B_t \sim (0, 1_{[0,t]}, 0, \cdots)$$

のように対応し, Brown 運動は 1 粒子空間の関数 $1_{[0,t]} \in H$ で表現される. 1 粒子空間に対しては, 既に Gelfand triple $E \subset H \subset E^*$ が付随している. 超関数空間 $E^* = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ において

$$\delta_t = \frac{d}{dt} 1_{[0,t]}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

[6] 物理学の文献 (例えば, [5], [7]) では, ノルム (2.4) の定義で, 荷重 $n!$ をつけないのがむしろ普通の流儀であるが, 本質的な違いを生ずるものではない. しかし, 後で必要になる指数ベクトルや生成・消滅作用素の定義も違ってくるので注意されたい.

は全く正しい式であるから, 何らかの方法で$\Gamma(H_{\mathbb{C}}) \cong L^2(E^*, \mu)$ に付随する Gelfand triple を導入すれば, (2.3) が正当化されるだろう. それは Gauss 空間 (E^*, μ) 上の (したがって無限変数の) 超関数を構成することに他ならない. 大雑把にいえば, (2.5) を元にして,

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} E_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} \subset \Gamma(H_{\mathbb{C}}) \cong L^2(E^*, \mu) \subset \bigoplus_{n=0}^{\infty} (E_{\mathbb{C}}^{\otimes n})^*_{\mathrm{sym}}$$

を考えることになる. $\phi \sim (f_n)$ がテスト空間の元で, $\Phi \sim (F_n)$ が超関数の元であれば, それらの標準双線形形式は, $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ の複素双線形形式[7] を拡張したものであるから,

$$\langle\langle \Phi,\, \phi \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, \langle F_n,\, f_n \rangle$$

で与えられることになる.

実際には, 収束の議論や Hilbert 空間でない $E_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ の直和をどのように定義するかなどで微妙な問題を生ずる. このような (専門家にとってのみ興味のある) 技術的な問題点の詳細は, [19], [23] などに譲ることとし, ここではノルムの記号だけ準備しておく (なお, [27] も参照). まず, $E = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ の位相は Hilbert 型ノルムの列 $|\cdot|_p$, $p \in \mathbb{R}$, で定まる (定義は省略する). このノルムは, $E_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ にも自然に拡張される. 次に, $\phi \sim (f_n) \in L^2(E^*, \mu)$ に対してノルムの系列を

$$\|\, \phi \,\|_p^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, |\, f_n \,|_p^2 \tag{2.8}$$

で定義する. すべての $p \geq 0$ に対して $\|\, \phi \,\|_p < \infty$ となる ϕ の全体を (E) と書くと, (複素) Gelfand triplet

$$(E) \subset (L^2) \equiv L^2(E^*, \mu) \cong \Gamma(H_{\mathbb{C}}) \subset (E)^* \tag{2.9}$$

が得られる. (E) の元をホワイトノイズテスト関数, $(E)^*$ の元をホワイトノイズ超関数と呼ぶ. (2.9) は, Hida–Kubo–Takenaka 空間 [18] とも呼ばれる. $(E)^* \times (E)$ 上の標準複素双線形形式を $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ で表す. 構成の仕方から $(E)^*$ は, $F_n \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes n})^*_{\mathrm{sym}}$ で, ある $p \geq 0$ が存在して $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, |\, F_n \,|_{-p}^2 < \infty$ となっている $\Phi \sim (F_n)$ の全体である. 等式 (2.8) はそのままホワイトノイズ超関数に対しても成り立つ.

各 $t \in \mathbb{R}$ におけるデルタ関数 δ_t は $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) = E^*$ に属するから,

$$W_t \sim (0, \delta_t, 0. \cdots)$$

はホワイトノイズ超関数である. これをホワイトノイズと呼ぶ. 次の事実が注目に値する.

定 理 2.3 Brown 運動 $t \mapsto B_t \in (E)^*$, ホワイトノイズ $t \mapsto W_t \in (E)^*$ はともに C^∞-級 flow であり,

$$\frac{d}{dt} B_t = W_t \tag{2.10}$$

が $(E)^*$ で成り立つ.

[7] この論文では, 混乱を避けるため, 複素 Hilbert 空間に対してエルミート内積を表す記号は導入しない.

3　作用素論

通常, 量子確率論というと Hilbert 空間上の有界作用素を対象にすることが多いが, ここでは少し広い意味で捉える. あとで, Brown 運動 B_t を $L^2(E^*,\mu)$ 上に働くかけ算作用素と考えるのであるが, B_t は Gauss 分布に従うので非有界な関数であり, したがって B_t はかけ算作用素として非有界な作用素になる. そのような (Hilbert 空間上では) 非有界な作用素も, Gelfand triple を導入して連続作用素として扱ってしまおうというのが我々の理論の要点である. 実際, 我々は

$$\mathcal{L}((E),(E)^*) = \{\Xi : (E) \to (E)^*;\ \text{連続線型作用素}\}$$

を研究の対象にする[8]. このとき, $\mathcal{L}((E),(E))$ や Fock 空間 $\Gamma(H_{\mathbf{C}}) \cong L^2(E^*,\mu)$ 上の有界線形作用素全体 $\mathbf{B}(L^2(E^*,\mu))$ は $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ の部分空間になる. これらの空間に位相が必要な場合は, 有界収束位相を考えるのが好都合である.

3.1　積分核作用素

Fock 空間 $\Gamma(H_{\mathbf{C}})$ 上の作用素で最も基本的なものは, 生成・消滅作用素であるが, (2.9) を考えることで, 各点ごとの生成・消滅作用素が導入される. テスト関数 $\phi \in (E)$ として $\phi \sim (0,\cdots,0,\xi^{\otimes n},0,\cdots)$, $\xi \in E_{\mathbf{C}}$, を考えよう. このとき, 任意の $y \in E_{\mathbf{C}}^*$ に対して

$$D_y\phi \sim (0,\cdots,0,n\langle y,\,\xi\rangle\xi^{\otimes(n-1)},0,\cdots)$$

とおくと, D_y は (E) 上に連続的に拡張されて, $D_y \in \mathcal{L}((E),(E))$ となる. これを消滅作用素, その共役作用素 $D_y^* \in \mathcal{L}((E)^*,(E)^*)$ を生成作用素と呼ぶ. 特に, $y = \delta_t \in E^*$ に対して

$$a_t = D_{\delta_t}, \qquad a_t^* = D_{\delta_t}^*, \qquad t \in \mathbb{R},$$

とおく. これらが点 $t \in \mathbb{R}$ における消滅作用素・生成作用素である[9]. ここで特に強調しておきたいことは, $a_t \in \mathcal{L}((E),(E))$, $a_t^* \in \mathcal{L}((E)^*,(E)^*)$ となっていることである. 特に, 両者とも $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ に属する.

位相線形空間の一般論によって, 任意の $\kappa \in (E_{\mathbf{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ に対して,

$$\langle\!\langle \Xi_{l,m}(\kappa)\phi,\,\psi\rangle\!\rangle = \left\langle \kappa,\,\left\langle\!\!\left\langle a_{s_1}^*\cdots a_{s_l}^* a_{t_1}\cdots a_{t_m}\phi,\,\psi\right\rangle\!\!\right\rangle\right\rangle, \qquad \phi,\psi \in (E),$$

をみたす作用素 $\Xi_{l,m}(\kappa) \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ が一意的に存在することがわかる. これを

$$\Xi_{l,m}(\kappa) = \int_{\mathbf{R}^{l+m}} \kappa(s_1,\cdots,s_l,t_1,\cdots,t_m)a_{s_1}^*\cdots a_{s_l}^* a_{t_1}\cdots a_{t_m} ds_1\cdots ds_l dt_1\cdots dt_m \tag{3.1}$$

のように形式的積分で表し, κ を核超関数とする積分核作用素 (integral kernel operator) と呼ぶ. 場の量子論では常識的な表現ではあるが, κ の方こそ超関数にとっていることに注意せよ. 前の l 変数, 後ろの m 変数についてそれぞれ対称になっている κ の全体を $(E_{\mathbf{C}}^{\otimes(l+m)})^*_{\mathrm{sym}(l,m)}$ と書く. 核超関数をこの空間に制限すれば一意的である.

---

[8] 本稿を通じて, 断りがない限り, 双対空間に位相が必要な場合は, 強双対位相 (有界集合上の一様収束位相) を考える. なお, 位相線形空間に関する用語は [8], [35] 等を参照されたい.

[9] 場の量子論を別として, 確率解析において各時点毎の (つまり時間パラメータを smear しない) 生成・消滅作用素を導入したのは Hida [10] である.

定 理 3.1 [23] 任意の $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ は, $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ の位相で収束する級数

$$\Xi = \sum_{l,m=0}^{\infty} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}), \qquad \kappa_{l,m} \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*_{\mathrm{sym}(l,m)}, \tag{3.2}$$

に展開される. このとき, 核超関数 $\kappa_{l,m}$ は一意的に定まる. もし $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E))$ ならば, $\kappa_{l,m} \in ((E_{\mathbb{C}}^{\otimes l}) \otimes (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})^*)_{\mathrm{sym}(l,m)}$ であって (この条件は $\Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}) \in \mathcal{L}((E),(E))$ と同値), 級数 (3.2) は $\mathcal{L}((E),(E))$ で収束する.

積分核作用素の重要性はこの展開定理に集約されている. このタイプの展開は, Haag [9] をはじめ, 多くの人たちによってさまざまな形で取り上げられている (例えば, [3], [5], [7]).

3.2 作用素シンボル

指数ベクトル $\{\phi_\xi\,;\,\xi \in E_{\mathbb{C}}\}$ は (E) の稠密部分空間を張るので, $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ は指数ベクトルに対する作用で一意的に定まる. すなわち, $E_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}}$ 上の関数

$$\widehat{\Xi}(\xi,\eta) = \langle\!\langle \Xi\phi_\xi,\, \phi_\eta \rangle\!\rangle, \qquad \xi,\eta \in E_{\mathbb{C}},$$

は, Ξ を一意的に定める. これを Berezin [3] などに倣って, Ξ のシンボルと呼ぼう. 特に $\widehat{\Xi}(0,0) = \langle\!\langle \Xi\phi_0,\, \phi_0 \rangle\!\rangle$ は Ξ の真空期待値と呼ばれ, しばしば重要である. 例えば, 積分核作用素に対しては,

$$\Xi_{l,m}(\kappa)\widehat{\ }(\xi,\eta) = \left\langle \kappa,\, \eta^{\otimes l} \otimes \xi^{\otimes m} \right\rangle e^{\langle \xi,\,\eta\rangle}, \qquad \xi,\eta \in E_{\mathbb{C}}, \quad \kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*, \tag{3.3}$$

となる. よって (3.2) と (3.3) から,

$$e^{-\langle \xi,\,\eta\rangle}\widehat{\Xi}(\xi,\eta) = \sum_{l,m=0}^{\infty} \left\langle \kappa_{l,m},\, \eta^{\otimes l} \otimes \xi^{\otimes m} \right\rangle \tag{3.4}$$

を得るから, Ξ の核超関数は, (3.4) の左辺をテイラー展開して求めることができる. 勝手な関数 $\Theta : E_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ が作用素 $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ のシンボルになるわけではない.

定 理 3.2 [23] $E_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}}$ 上の複素数値関数 Θ が $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ のシンボルであるための必要十分条件は,

(O1) (正則性) $\xi, \xi_1, \eta, \eta_1 \in E_{\mathbb{C}}$ を任意に固定するとき, 2 変数複素関数

$$z, w \mapsto \Theta(z\xi + \xi_1, w\eta + \eta_1), \qquad z, w \in \mathbb{C},$$

は $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 上で正則である.

(O2) (増大度) 定数 $C \ge 0$, $K \ge 0$, $p \ge 0$ があって,

$$|\Theta(\xi,\eta)| \le C \exp K\left(|\,\xi\,|_p^2 + |\,\eta\,|_p^2\right), \qquad \xi,\eta \in E_{\mathbb{C}}.$$

上に述べたシンボルの特徴づけ定理は, Fourier 変換など特別な作用素の定義・積分核作用素の一般化・量子的 Hitsuda-Skorokhod 積分・作用素の Wick 積など幅広く応用されている. なお, $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E))$ のシンボルの特徴づけも得られている [23]. 次の結果も応用範囲は広い.

定 理 3.3 $T \subset \mathbb{R}$ を区間, $t_0 \in T$ を定点とする. このとき, 写像 $t \mapsto \Xi_t \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$, $t \in T$, に対して次の 2 条件は同値である.
(i) 写像 $t \mapsto \Xi_t$ は $t = t_0$ において連続.
(ii) 任意の $\xi, \eta \in E_{\mathbf{C}}$ に対して,

$$\lim_{t \to t_0} \widehat{\Xi}_t(\xi,\eta) = \widehat{\Xi}_{t_0}(\xi,\eta),$$

かつ, 適当な $C \geq 0$, $K \geq 0$, $p \geq 0$ と t_0 の開近傍 U が存在して,

$$\left|\widehat{\Xi}_t(\xi,\eta)\right| \leq C \exp K\left(|\xi|_p^2 + |\eta|_p^2\right), \qquad \xi,\eta \in E_{\mathbf{C}}, \quad t \in U. \tag{3.5}$$

4 量子ホワイトノイズ解析

4.1 かけ算作用素としての Brown 運動とホワイトノイズ

一般に, Gauss 空間上の可測関数 (すなわち確率変数) Φ は, かけ算作用素として $L^2(E^*,\mu)$ に働く. その平均値は,

$$\mathbf{E}(\Phi) = \int_{E^*} \Phi(x)\,\mu(dx) = \langle\!\langle \Phi\phi_0,\, \phi_0 \rangle\!\rangle$$

で与えられるが, 最後の表式は真空ベクトル ϕ_0 に付随する状態におけるかけ算作用素 Φ の期待値 (vacuum expectation) である. この観点から Brown 運動を考えたとき, それを量子 Brown 運動という. しかしながら, $B_t \notin L^\infty(E^*,\mu)$ であるから, 量子 Brown 運動は $t > 0$ なる限り非有界作用素である. ホワイトノイズをこのような観点から論ずるとき, 量子ホワイトノイズというが, こちらは非有界作用素どころではなく, Hilbert 空間 $L^2(E^*,\mu)$ の枠内では議論は不可能である. すなわち, Hilbert 空間 $L^2(E^*,\mu)$ が念頭にはあるものの C*-環 $\mathbf{B}(L^2(E^*,\mu))$ に固執していたのでは量子 Brown 運動や量子ホワイトノイズを議論できない. このような困難は Hida–Kubo–Takenaka 空間 $(E) \subset L^2(E^*,\mu) \subset (E)^*$ とそれに付随する作用素空間 $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ を出発点とすることで解消される.

2 つの関数 $\phi, \psi \in (E)$ に対して, その積 $\phi\psi$ は E^* 上の関数であるが, これも (E) に属することが示される. さらに, この演算は $(E) \times (E)$ から (E) の中への連続双線形写像になる ([18],[23]). よって, すべてのホワイトノイズ超関数 Φ はかけ算作用素として (E) から $(E)^*$ への連続線形作用素を誘導する. つまり,

$$\langle\!\langle \Phi\phi,\, \psi \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \Phi,\, \phi\psi \rangle\!\rangle, \qquad \phi, \psi \in (E),$$

によって定まる $\Phi : \phi \mapsto \Phi\phi$ を考えることによって, $(E)^* \to \mathcal{L}((E),(E)^*)$ が得られる. これは連続な埋め込み写像である.

定 理 4.1 $t \mapsto B_t \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$, $t \mapsto W_t \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ ともに C^∞-写像であり, (2.10) は $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ の位相で成り立つ.

4.2 量子確率過程

定理 4.1 を念頭に置いて, 次の定義を提案している [25].

定 義 $T \subset \mathbb{R}$ を区間とするとき, 作用素の族 $\{\Xi_t\}_{t \in T} \subset \mathcal{L}((E),(E)^*)$ で $t \mapsto \Xi_t$ が連続写像になっているものを量子確率過程と呼ぶ. 連続線形写像 $\Xi : E_{\mathbf{C}} \to \mathcal{L}((E),(E)^*)$ を量子確率

超過程という. 量子確率超過程 Ξ が連続的に $\mathcal{L}(E_{\mathbf{C}}^*, \mathcal{L}((E),(E)^*))$ の元に拡張できるとき正則であるという.

正則な量子確率超過程 Ξ に対して $\{\Xi_t = \Xi(\delta_t)\}$ は量子確率過程になるが, すべての量子確率過程がこのようにして得られるわけではない. $(E)^*$ の中の連続な流れ $t \mapsto \Phi_t \in (E)^*$ はかけ算作用素として量子確率過程となる.

積分核作用素に関連して, 最も基本的な量子確率過程をあげておく.

命 題 4.2 $\{a_t = \Xi_{0,1}(\delta_t)\}$, $\{a_t^* = \Xi_{1,0}(\delta_t)\}$ は正則な量子確率過程である. 実は, $t \mapsto a_t \in \mathcal{L}((E),(E))$, $t \mapsto a_t^* \in \mathcal{L}((E)^*,(E)^*)$ はともに C^∞-写像であり, さらに,

$$W_t = a_t + a_t^* \tag{4.1}$$

が成り立つ.

命 題 4.3 積分核作用素で定義される $A_t = \Xi_{0,1}(1_{[0,t]})$, $A_t^* = \Xi_{1,0}(1_{[0,t]})$, $t \geq 0$, は量子確率過程であり,

$$B_t = A_t + A_t^* \tag{4.2}$$

が成り立つ.

上の $\{A_t\}$, $\{A_t^*\}$ をそれぞれ, 消滅過程, 生成過程という. 起点 $t=0$ はもちろん便宜的なものである. (4.1) と (4.2) から, これまでの確率解析は $\{W_t\}$ あるいは $\{B_t\}$ の生成する可換代数を取り扱う理論であるといえる. 量子確率論の立場では, ホワイトノイズや Brown 運動は互いに非可換な二つの量子確率過程に分解する.

4.3 量子確率積分

以上のような量子確率過程の定式化を用いて, 量子確率積分が容易に導入される. $\{L_t\} \subset \mathcal{L}((E),(E)^*)$ を適当な時間区間で定義されている量子確率過程とし, その時間区間内に始点 a を固定する. このとき, 位相線形空間の一般論によって

$$\langle\!\langle \Xi_t \phi, \psi \rangle\!\rangle = \int_a^t \langle\!\langle L_s \phi, \psi \rangle\!\rangle \, ds, \qquad \phi, \psi \in (E),$$

をみたす $\Xi_t \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ が一意的に存在し, $\{\Xi_t\}$ は再び量子確率過程となることが証明される. これを

$$\Xi_t = \int_a^t L_s \, ds$$

と書き, 量子確率過程 $\{L_s\}$ の ds に関する積分という. さらに $\{\Xi_t\}$ は $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ の位相に関して, 微分可能で

$$\frac{d}{dt} \Xi_t = L_t$$

が成り立つ. 命題 4.3 で導入した消滅過程 $\{A_t\}$ と生成過程 $\{A_t^*\}$ に対して

$$A_t = \int_0^t a_s \, ds, \quad \frac{d}{dt} A_t = a_t, \qquad A_t^* = \int_0^t a_s^* \, ds, \quad \frac{d}{dt} A_t^* = a_t^*$$

が成り立つ.

では, 本題の量子確率積分に入ろう. まず, 量子確率過程 $\{L_t\} \subset \mathcal{L}((E),(E)^*)$ に対して, $\{L_t a_t\}$, $\{a_t^* L_t\}$ も量子確率過程になる. よって, 次の定義は意味をなす.

定 義　量子確率過程 $\{L_t\} \subset \mathcal{L}((E),(E)^*)$ に対して, 新しい量子確率過程

$$\int_a^t L_s a_s\, ds, \qquad \int_a^t a_s^* L_s\, ds \tag{4.3}$$

をそれぞれ L_t の消滅過程, 生成過程に関する量子確率積分という. 後者は量子 Hitsuda–Skorokhod 積分ともいう.

上で導入した量子確率積分は, Hudson–Parthasarathy [16] などで議論されている (適合過程に対する) 伊藤型積分を一般化したものになっている (詳細は [25]).

4.4　量子確率過程の表現定理

前節の量子確率積分 (4.3) は,

$$\int_a^t L_s a_s\, ds = \int_{\mathbb{R}} 1_{[a,t]}(s) L_s a_s\, ds, \qquad \int_a^t a_s^* L_s\, ds = \int_{\mathbb{R}} a_s^* 1_{[a,t]}(s) L_s\, ds,$$

と書き直される. そこで, $L \in \mathcal{L}(E_{\mathbf{C}}, \mathcal{L}((E),(E)^*))$ を $\mathcal{L}((E),(E)^*)$-値超関数として

$$\int_{\mathbb{R}} L(s) a_s\, ds, \qquad \int_{\mathbb{R}} a_s^* L(s)\, ds$$

を考えることは自然であろう. 実際, 積分核作用素 (3.1) の自然な一般化として κ を作用素値超関数に置き換えることができる. L を $\mathbb{R}^{l+m}$ 上の $\mathcal{L}((E),(E)^*)$-値超関数, すなわち, $L \in \mathcal{L}(E_{\mathbf{C}}^{\otimes(l+m)}, \mathcal{L}((E),(E)^*))$ とすれば,

$$\langle\langle \Xi \phi_\xi, \phi_\eta \rangle\rangle = \left\langle\left\langle L(\eta^{\otimes l} \otimes \xi^{\otimes m}) \phi_\xi, \phi_\eta \right\rangle\right\rangle, \qquad \xi, \eta \in E_{\mathbf{C}},$$

をみたす連続作用素 $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ が一意的に存在することが作用素シンボルの一般論で証明される. これを

$$\int_{\mathbb{R}^{l+m}} a_{s_1}^* \cdots a_{s_l}^* L(s_1, \cdots, s_l, t_1, \cdots, t_m) a_{t_1} \cdots a_{t_m} ds_1 \cdots ds_l dt_1 \cdots dt_m$$

と書いて, 一般化された積分核作用素または単に積分核作用素と呼ぶ. また, 一般化された積分核作用素は, 従来の積分核作用素 (3.1) を逐次積分することによって自然に現れるが, 逐次積分の正当性 (Fubini 型定理) は厳密に証明できる [28].

一般の量子確率過程 $\{\Xi_t\}$ を積分核作用素で展開し, 項をまとめなおすことによって次の結果が示される.

定 理 4.4 [25], [29]　任意の量子確率過程 $\{\Xi_t\} \subset \mathcal{L}((E),(E)^*)$ に対して, 3 つの連続写像 $t \mapsto L_t \in \mathcal{L}(E_{\mathbf{C}}, \mathcal{L}((E),(E)^*)$, $t \mapsto M_t \in \mathcal{L}(E_{\mathbf{C}}, \mathcal{L}((E),(E)))$, $t \mapsto c_t \in \mathbb{C}$ が存在し,

$$\Xi_t = \int_{\mathbb{R}} L_t(s) a_s\, ds + \int_{\mathbb{R}} a_s^* M_t^*(s)\, ds + c_t I \tag{4.4}$$

と分解する. このとき, 任意の $\xi \in E_{\mathbf{C}}$ と t に対して $[M(\xi), a_t] = 0$.

この結果は, 特定の性質を持った量子確率過程の特徴づけなどの応用が期待できる. なお, $\{c_t I\}$ はスカラー作用素からなる量子確率過程である. 一言では, すべての量子確率過程は生成・消滅過程の量子確率積分で表せるということで, ノイズ項として生成・消滅過程が基本的であるという結論に達する. これは, ホワイトノイズによるアプローチの重要な帰結である.

5 量子確率微分方程式

5.1 作用素の Wick 積

生成・消滅作用素に対しては古くから Wick 積 (あるいは正規積) の概念がある. 標語的には生成作用素を左側に, 消滅作用素を右側に寄せて並べ替えたものをいう. 今, Wick 積を $\diamond$ で表せば,

$$a_s^* \diamond a_t = a_s^* a_t, \qquad a_s \diamond a_t^* = a_t^* a_s,$$

となる. 右辺は通常の作用素の合成から定まる積である. しかしながら, もっと複雑な作用素に対する Wick 積は作用素シンボルを用いて定義するのが適当である.

補 題 5.1 $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ に対して,

$$\widehat{\Xi}(\xi,\eta) = \widehat{\Xi}_1(\xi,\eta)\widehat{\Xi}_2(\xi,\eta)e^{-\langle\xi,\eta\rangle}, \tag{5.1}$$

をみたす作用素 $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ が一意的に存在する.

証 明 シンボルの特徴づけ定理によって,

$$|\widehat{\Xi}_i(\xi,\eta)| \le C\exp K(|\xi|_p^2 + |\eta|_p^2), \qquad \xi,\eta \in E_{\mathbf{C}}, \quad i=1,2,$$

となる適当な定数 $C \ge 0$, $K \ge 0$, $p \ge 0$ が取れる. 本来は $i=1,2$ 毎にそのような定数が定まるが, おのおの大きい方で取り替えればよい. そうすれば, (5.1) の右辺は,

$$\begin{aligned} |\widehat{\Xi}_1(\xi,\eta)\widehat{\Xi}_2(\xi,\eta)e^{-\langle\xi,\eta\rangle}| &\le C^2\exp\left\{2K(|\xi|_p^2+|\eta|_p^2) + |\langle\xi,\eta\rangle|\right\} \\ &\le C^2\exp\left\{\left(2K+\frac{\rho^{2p}}{2}\right)(|\xi|_p^2+|\eta|_p^2)\right\} \end{aligned}$$

となり, 確かにそれは作用素シンボルになる (定理 3.2). 証明終

上の補題で存在を示した作用素 Ξ を Ξ_1 と Ξ_2 の Wick 積といい,

$$\Xi = \Xi_1 \diamond \Xi_2$$

で表す[10]. 写像 $(\Xi_1,\Xi_2) \mapsto \Xi_1 \diamond \Xi_2$ は $\mathcal{L}((E),(E)^*) \times \mathcal{L}((E),(E)^*)$ から $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ への双線形写像となる. 一方の変数を固定すれば, 他方に関して連続になる (偏連続性). さらに,

$$\Xi \diamond I = \Xi, \quad \Xi_1 \diamond \Xi_2 = \Xi_2 \diamond \Xi_1, \quad (\Xi_1 \diamond \Xi_2)\diamond \Xi_3 = \Xi_1 \diamond (\Xi_2 \diamond \Xi_3), \quad (\Xi_1 \diamond \Xi_2)^* = \Xi_1^* \diamond \Xi_2^*,$$

が成り立つ. 特に,

$$a_s \diamond a_t = a_s a_t, \qquad a_s^* \diamond a_t = a_s^* a_t, \qquad a_s \diamond a_t^* = a_t^* a_s, \qquad a_s^* \diamond a_t^* = a_s^* a_t^*.$$

また, 次の結果も有用である.

命 題 5.2 [14] $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ に対して次の3条件は同値である.
(i) $\Omega \diamond \Xi = \Omega\Xi$ が任意の $\Omega \in \mathcal{L}((E)^*,(E)^*)$ に対して成り立つ.
(ii) $\Xi^* \diamond \Omega = \Xi^*\Omega$ が任意の $\Omega \in \mathcal{L}((E),(E))$ に対して成り立つ.
(iii) Ξ は消滅作用素のみで展開される: $\Xi = \sum_{m=0}^{\infty} \Xi_{0,m}(\kappa_{0,m})$.

---

[10] $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ に対して, $\widetilde{\Xi}(\xi,\eta) = \langle\!\langle \Xi\phi_\xi, \phi_\eta\rangle\!\rangle e^{-\langle\xi,\eta\rangle} = \widehat{\Xi}(\xi,\eta)e^{-\langle\xi,\eta\rangle}$ を Ξ の Wick シンボルということもある [4], [14]. これを用いると, (5.1) は $(\Xi_1 \diamond \Xi_2)^{\sim}(\xi,\eta) = \widetilde{\Xi}_1(\xi,\eta)\widetilde{\Xi}_2(\xi,\eta)$ となり記法上少し見やすくなるが, 混乱を避けるため, 本論文では Wick シンボルは用いない.

5.2 Wick 指数関数

$\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ の展開 $\Xi = \sum_{l,m=0}^{\infty} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m})$ において,

$$\deg \Xi = \max\{l+m\,;\, \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}) \neq 0\}$$

とおく. $\deg \Xi = \infty$ もあり得る.

定 理 5.3 $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ に対して無限級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Xi^{\diamond n} \tag{5.2}$$

が $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ で収束するための必要十分条件は, $\deg \Xi \leq 2$. ただし, $\Xi^{\diamond 0} = I$ とする.

証 明 作用素シンボルに移って議論すればよい. 実際, (5.2) の第 N 部分和を S_N とおけば, 定義によって

$$\widehat{S}_N(\xi,\eta) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \left(\widehat{\Xi}(\xi,\eta)\right)^n e^{-(n-1)\langle\xi,\eta\rangle} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \left(\widehat{\Xi}(\xi,\eta)e^{-\langle\xi,\eta\rangle}\right)^n e^{\langle\xi,\eta\rangle}.$$

明らかに,

$$\lim_{N\to\infty} S_N(\xi,\eta) = \exp\left\{\widehat{\Xi}(\xi,\eta)e^{-\langle\xi,\eta\rangle} + \langle\xi,\eta\rangle\right\}. \tag{5.3}$$

ここで, 適当な定数 $C \geq 0$, $K \geq 0$, $p \geq 0$ があって,

$$\left|\exp\left\{\widehat{\Xi}(\xi,\eta)e^{-\langle\xi,\eta\rangle} + \langle\xi,\eta\rangle\right\}\right| \leq C \exp K\left(|\xi|_p^2 + |\eta|_p^2\right) \tag{5.4}$$

が成り立つことが, S_N が $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ で収束するための必要十分条件である (定理 3.3). $\langle\xi,\eta\rangle$ の項は問題ないので, (5.4) の代わりに

$$\left|\exp\left\{\widehat{\Xi}(\xi,\eta)e^{-\langle\xi,\eta\rangle}\right\}\right| \leq C \exp K\left(|\xi|_p^2 + |\eta|_p^2\right) \tag{5.5}$$

も同等な条件である. 一方で, Ξ のシンボルは積分核作用素による展開を用いれば,

$$\widehat{\Xi}(\xi,\eta) = \sum_{l,m=0}^{\infty} \left\langle \kappa_{l,m},\, \eta^{\otimes l} \otimes \xi^{\otimes m}\right\rangle e^{\langle\xi,\eta\rangle} \tag{5.6}$$

である. ここで, $\deg \Xi \leq 2$ を仮定すれば,

$$\begin{aligned}\left|\exp\left\{\widehat{\Xi}(\xi,\eta)e^{-\langle\xi,\eta\rangle}\right\}\right| &\leq \exp\left\{\sum_{l+m\leq 2} \left|\left\langle \kappa_{l,m},\, \eta^{\otimes l} \otimes \xi^{\otimes m}\right\rangle\right|\right\} \\ &\leq \exp\left\{\sum_{l+m\leq 2}^{\infty} |\kappa_{l,m}|_{-p} |\eta|_p^l |\xi|_p^m\right\}\end{aligned}$$

なので, (5.5) が成り立つことは見やすい.

逆に, (5.5) を仮定して, $\deg \Xi \le 2$ を導くこともできる. 今,

$$f(z) = \widehat{\Xi}(z\xi, \eta)e^{-z\langle \xi, \eta\rangle}$$

とおくと, $\exp f(z)$ は零点をもたない $\mathbb{C}$ 上の正則関数であり, その増大度

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r}, \qquad M(r) = \max_{|z|=r} |\exp f(z)|,$$

は仮定から ≤ 2 である. よって, Hadamard の定理から, $f(z)$ は z の高々2次の多項式である. したがって, (5.6) において, $m > 2$ の項はすべて消える. 同様に, $l > 2$ の項もすべて消え, Ξ は積分核作用素の有限和であることがわかる. そうすれば, 最大次数の増大度を仮定(5.5) と比較して $l + m > 2$ の項はすべて消えていることがわかる. 証明終

定理 5.3で定義した無限級数 (5.2) を Wick 指数関数といい,

$$\mathrm{wexp}\ \Xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Xi^{\diamond n}$$

で表す. 一般の $\Xi \in \mathcal{L}((E), (E)^*)$ に対しては定義されず, $\deg \Xi \le 2$ をみたすものに対してだけ定義されることに注意せよ. §5.3で空間 (E) を取り替えることによって定義を拡張する. 以下の補題は, Wick 積の定義と定理 3.3を元にした標準的な議論で証明できる.

補 題 5.4 $\Xi_i \in \mathcal{L}((E), (E)^*)$, $\deg \Xi_i \le 2$, に対して

$$(\mathrm{wexp}\ \Xi_1) \diamond (\mathrm{wexp}\ \Xi_2) = \mathrm{wexp}\,(\Xi_1 + \Xi_2).$$

したがって,

$$\mathrm{wexp}\ \Xi \diamond \mathrm{wexp}\,(-\Xi) = I.$$

補 題 5.5 $\Xi \in \mathcal{L}((E), (E)^*)$ が $\deg \Xi \le 2$ をみたすものとする. このとき, $z \mapsto \mathrm{wexp}\,(z\Xi) \in \mathcal{L}((E), (E)^*)$ は $\mathbb{C}$ 上の正則関数で

$$\frac{d}{dz}\,\mathrm{wexp}\,(z\Xi) = \Xi \diamond \mathrm{wexp}\,(z\Xi)$$

が成り立つ.

補 題 5.6 $\{\Xi_t\}_{t\in T} \subset \mathcal{L}((E), (E)^*)$ を $\deg \Xi_t \le 2$ をみたす量子確率過程とする. このとき, $\{\mathrm{wexp}\ \Xi_t\}$ も量子確率過程である. もし, $t \mapsto \Xi_t \in \mathcal{L}((E), (E)^*)$ が微分可能であれば,

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{wexp}\ \Xi_t = \frac{d\Xi_t}{dt} \diamond \mathrm{wexp}\ \Xi_t$$

が成り立つ.

注 意 $\Xi \mapsto \mathrm{wexp}\ \Xi$ の連続性はいえない. 実際, $\mathrm{wexp}\ \Xi$ は $\deg \Xi \le 2$ を満たすΞ に対してのみ定義されるが, その条件をみたす Ξ は開集合をなさない.

5.3 Kondratiev–Streit によるホワイトノイズ超関数

前節では Wick 指数関数を, $\deg \Xi \le 2$ であるような作用素 $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ に対してのみ定義したが, この制限を緩めることができる. Kondratiev–Streit はホワイトノイズテスト関数をより制限することによって, より大きな超関数の空間を構成した (丁寧な解説は Kuo [19]). まず, $0 \le \beta < 1$ をパラメータとして, 新しいテスト関数の空間 $(E)_\beta$ を導入しよう. $\phi \sim (f_n)$ が $(E)_\beta$ に含まれているとは,

$$|\xi|_{p,\beta}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} |f_n|_p^2 < \infty$$

がすべての p で成り立つときに言う. $\beta = 0$ が本来の (E) の場合に相当する. 明らかに,

$$(E)_\beta \subset (E) \subset L^2(E^*, \mu) \subset (E)^* \subset (E)_\beta^*$$

が成り立つ. (E) で得られている基本的な結果は $(E)_\beta$ でも似た形で成り立つ. 特に, $\{\phi_\xi ; \xi \in E_{\mathbf{C}}\} \subset (E)_\beta$ かつ稠密な部分空間を張るので, $\Xi \in \mathcal{L}((E)_\beta, (E)_\beta^*)$ はやはりそのシンボルで一意的に定まる. さらに,

定 理 5.7 $\Theta : E_{\mathbf{C}} \times E_{\mathbf{C}} \to \mathbb{C}$ が $\Xi \in \mathcal{L}((E)_\beta, (E)_\beta^*)$ の作用素シンボルに成るための必要十分条件は, 定理 3.2の (O1) と次の (O2′) が成り立つことである.
(O2′) 定数 $C \ge 0$, $K \ge 0$, $p \ge 0$ があって,

$$|\Theta(\xi, \eta)| \le C \exp K \left(|\xi|_p^{\frac{2}{1-\beta}} + |\eta|_p^{\frac{2}{1-\beta}} \right), \qquad \xi, \eta \in E_{\mathbf{C}}.$$

これを用いて定理 5.3と同様な議論をすれば, 次の結論を得る.

定 理 5.8 $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ に対して無限級数

$$\mathrm{wexp}\ \Xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Xi^{\diamond n}$$

が $\mathcal{L}((E)_\beta, (E)_\beta^*)$ で収束するための必要十分条件は $\deg \Xi \le 2/(1-\beta)$ である.

補題 5.4 – 5.6 も容易に拡張される. しかし残念ながら, $(E)_\beta$ を導入しても扱える作用素は積分核作用素の有限和に限られる. 最近, さらにホワイトノイズ超関数を拡張する試みが Cochran–Kuo–Sengupta [6] によって議論されている. 彼らの枠組みで wexp Ξ が任意の $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ に対して定義できるかどうかは, 興味深いが今のところ不明である.

5.4 量子確率微分方程式への応用

補 題 5.9 量子確率過程 $\{L_t\} \subset \mathcal{L}((E),(E)^*)$ に対して

$$M_t = \int_a^t L_s \, ds$$

も量子確率過程であるが, $\deg M_t \le \deg L_t$ が成り立つ.

L_t の展開を

$$L_t = \sum_{l,m=0}^{\infty} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}(t))$$

とすると, 各 l, m に対して $t \mapsto \kappa_{l,m}(t)$ は連続写像になることに注意すればよい. これまでの議論をまとめて,

定 理 5.10 $T \subset \mathbb{R}$ を 0 を含む区間, $\{L_t\}_{t\in T} \subset \mathcal{L}((E),(E)^*)$ を量子確率過程で $\deg L_t \le 2/(1-\beta)$, $0 \le \beta < 1$, をみたすものとする. このとき, 初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{d\Xi_t}{dt} = \Xi_t \diamond L_t \\[2ex] \Xi|_{t=0} = \Xi_0 \in \mathcal{L}((E),(E)^*) \end{cases}$$

の解は, $\mathcal{L}((E)_\beta,(E)^*_\beta)$ の中に一意的に存在し,

$$\Xi_t = \Xi_0 \diamond \mathrm{wexp} \int_0^t L_s\, ds$$

で与えられる.

実例をいくつかあげて論文を締めくくりたい. そのうちのいくつかは Huang–Luo [14] で形式的に (収束を度外視して) 議論された.

例 1 $\{L_t\}$ を量子確率過程で, その展開は生成作用素を含まないものとし,

$$\frac{d\Xi_t}{dt} = \Xi_t L_t \tag{5.7}$$

を考える. もし, $\deg L_t \le 2/(1-\beta)$ であれば解は $\mathcal{L}((E)_\beta,(E)^*_\beta)$ に存在する. 特に, $\deg L_t \le 2$ であれば解は $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ に存在する. 同程度連続性 (equicontinuity) による少し細かい議論 [26] で, $\Xi_t \in \mathcal{L}((E),(E))$ もわかる. (5.7) の共役

$$\frac{d\Xi_t}{dt} = L_t^* \Xi_t$$

についても同様である.

例 2

$$\frac{d\Xi_t}{dt} = a_t^* \Xi_t a_t$$

は Wick 積を用いれば,

$$\frac{d\Xi_t}{dt} = \Xi_t \diamond (a_t^* a_t)$$

となるから, その解は

$$\Xi_t = \Xi_0 \diamond \mathrm{wexp} \int_0^t a_s^* a_s\, ds.$$

ここで, 個数過程（あるいは gauge 過程）

$$\Lambda_t = \int_0^t a_s^* a_s \, ds$$

を導入すれば,

$$\Xi_t = \Xi_0 \diamond \mathrm{wexp}\, \Lambda_t$$

と表示される. また, $\Xi_t \in \mathcal{L}((E), (E)^*)$ である.

例 3 $\{L_t\}$, $\{M_t\}$ を量子確率過程として

$$\frac{d\Xi_t}{dt} = \Xi_t \diamond L_t + M_t.$$

もし, $\deg L_t \le 2/(1-\beta)$ であれば, 解は $\Xi_t \in \mathcal{L}((E)_\beta, (E)_\beta^*)$ をみたし,

$$\Xi_t = \left(\int_0^t M_s \diamond \Omega_s^{\diamond(-1)} \, ds + \Xi_0 \right) \diamond \Omega_t,$$

$$\Omega_t = \mathrm{wexp} \int_0^t L_s ds, \qquad \Omega_t^{\diamond(-1)} = \mathrm{wexp} \left(- \int_0^t L_s ds \right),$$

で与えられる.

例 4 [27] 熱浴と相互作用する自由度 1 の量子調和振動子に付随する消滅作用素 b の時間発展は, 量子 Langevin 方程式

$$\frac{d\Omega_t}{dt} = -\left(i\omega + \frac{\gamma}{2} \right) \Omega_t - \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} I \otimes a_s \, ds, \quad \Omega_0 = b \otimes I, \tag{5.8}$$

に従う [7]. ただし, この方程式はベクトル値 ($\mathcal{S}(\mathbb{R})$-値) ホワイトノイズ関数, すなわち, $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes (E)$ 上の作用素に対する方程式である. (5.8) の解は,

$$\Omega_t = e^{-(i\omega+\gamma/2)t} b \otimes I + I \otimes \Xi_t,$$

$$\Xi_t = -\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ist} - e^{-(i\omega+\gamma/2)t}}{i(\omega - s) + \gamma/2} a_s \, ds,$$

で与えられ, $\Omega_t \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes (E), \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes (E))$ がわかる. 実は, $t \mapsto \Omega_t$ は C^∞-級であり, 我々の意味で $\{\Xi_t\} \subset \mathcal{L}((E), (E))$ は量子確率過程である. このあたりは超関数論のメリットである. 実際, Hilbert 空間である Fock 空間の枠内では Ω_t や Ξ_t は非有界作用素になり, 時間微分の取り扱いには注意を要する.

参考文献

[1] L. Accardi: *Noise and dissipation in quantum theory*, Rev. Math. Phys. **2** (1990), 127–176.

[2] 有光敏彦: 量子性と散逸, 物性研究 **66** (1996), 131–150.

[3] F. A. Berezin: “The Method of Second Quantization,” Academic Press, 1966.

[4] F. A. Berezin: *Wick and anti-Wick operator symbols*, Math. USSR Sbornik **15** (1971), 577–606.

[5] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov and I. T. Todorov: "Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory," Benjamin, Massachusetts, 1975. [江沢 洋 他訳:『場の量子論の数学的方法』東京図書, 1972.]

[6] W. G. Cochran, H.-H. Kuo and A. N. Sengputa: *New classes of white noise generalized functions*, preprint, 1996.

[7] C. W. Gardiner: "Quantum Noise," Springer–Verlag, 1991.

[8] I. M. Gelfand and N. Ya. Vilenkin: "Generalized Functions, Vol. 4," Academic Press, 1964.

[9] R. Haag: *On quantum field theories*, Dan. Mat. Fys. Medd. **29**, No. 12 (1955), 1–37.

[10] T. Hida: "Analysis of Brownian Functionals," Carleton Math. Lect. Notes, Vol. 13, Carleton University, Ottawa, 1975.

[11] T. Hida: "Brownian Motion," Springer–Verlag, 1980.

[12] 飛田武幸: ホワイトノイズ解析 – 20 年の歩みと展望あれこれ, 名城大学理工学部研究報告 **36** (1996), 1–18.

[13] Z.-Y. Huang: *Quantum white noises – White noise approach to quantum stochastic calculus*, Nagoya Math. J. **129** (1993), 23–42.

[14] Z.-Y. Huang and S.-L. Luo: *Wick calculus of generalized operators and its applications to quantum stochastic calculus*, preprint, Huazhong Univ. Sci. Tech., 1994.

[15] R. L. Hudson and M. Lindsay: *The classical limit of reduced quantum stochastic evolutions*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **43** (1985), 133–145.

[16] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy: *Quantum Ito's formula and stochastic evolutions*, Commun. Math. Phys. **93** (1984), 301–323.

[17] 伊藤 清:『確率論』基礎数学講座, 岩波書店, 1975.

[18] I. Kubo and S. Takenaka: *Calculus on Gaussian white noise I–IV*, Proc. Japan Acad. **56A** (1980), 376–380; 411–416; **57A** (1981), 433–437; **58A** (1982), 186–189.

[19] H.-H. Kuo: "White Noise Distribution Theory," CRC Press, 1996.

[20] M. Lax: *Quantum noise IV. Quantum theory of noise sources*, Phys. Rev. **145** (1966), 110–129.

[21] P. A. Meyer: "Quantum Probability for Probabilists," Lect. Notes in Math. Vol. 1538, Springer–Verlag, 1993.

[22] D. Nualart: "The Malliavin Calculus and Related Topics," Springer–Verlag, 1995.

[23] N. Obata: "White Noise Calculus and Fock Space," Lect. Notes in Math. Vol. 1577, Springer–Verlag, 1994.

[24] N. Obata: *Operator calculus on vector-valued white noise functionals*, J. Funct. Anal. **121** (1994), 185–232.

[25] N. Obata: *Generalized quantum stochastic processes on Fock space*, Publ. RIMS **31** (1995), 667–702.

[26] N. Obata: *Constructing one-parameter transformation groups on white noise functions in terms of equicontinuous generators*, 1995.

[27] 尾畑伸明: 量子ホワイトノイズの数学的基礎, 物性研究 **66** (1996), 76–94.

[28] N. Obata: *Integral kernel operators on Fock space – Generalizations and applications to quantum dynamics*, to appear in Acta Appl. Math.

[29] N. Obata: *Invitation to quantum white noise*, to appear in Proc. Workshop at Yonsei Univ., 1996.

[30] N. Obata: *Quantum stochastic process as continuous flow of Fock space operators*, to appear in 京都大学数理解析研究所講究録, 1996.

[31] 大矢雅則・小嶋 泉: 『量子情報と進化の力学』数理情報科学シリーズ 12, 牧野書店, 1996.

[32] K. R. Parthasarathy: "An Introduction to Quantum Stochastic Calculus," Birkhäuser, 1992.

[33] H. Risken: "The Fokker–Plank Equation," Springer–Verlag, 1989.

[34] T. Saito and T. Arimitsu: *Quantum stochastic Liouville equation of Ito type*, Mod. Phys. Lett. B **7** (1993), 1951–1959.

[35] H. H. Schaefer: "Topological Vector Spaces," 4th corrected printing, Springer–Verlag, 1980.

[36] I. R. Senitzky: *Dissipation in quantum mechanics. The harmonic oscillator*, Phys. Rev. **119** (1960), 670–679.

[37] 田崎秀一: 複素固有値問題に基づく非平衡統計力学理論 – 複素スペクトル理論, 物性研究 **60** (1993), 1–19.

[38] 山崎泰郎: 『無限次元空間上の測度（上）』紀伊國屋, 1978.