量子解析と非平衡統計力学

東京大学 大学院理学系研究科　　鈴木増雄

量子力学や統計物理学では、非可換な演算子を扱う。これによって量子ゆらぎが取り込まれる。この非可換性を考慮して微積分法を定式化する。すなわち、演算子 A の関数 $f(A)$ を A そのもので微分する定式化を行う。微分 dA が A と非可換であるため、通常の微積分法の公式とは異なったものとなる。いま、内部微分δ_Aを$\delta_A Q = [A, Q] = AQ - QA$ によって定義すると、新しい「量子微分」$df(A)/dA$ は、公理論的には次式によって定義される。

$$\frac{df(A)}{dA} = \frac{\delta_{f(A)}}{\delta_A} = \frac{f(A) - f(A - \delta_A)}{\delta_A} = \int_0^1 f^{(1)}(A - t\delta_A)dt$$

ここで、$f^{(n)}(x)$ は、通常の意味での $f(x)$ の n 階微分を表す。$d^n f(A)/dA^n$ は

$$\frac{d^n f(A)}{dA^n} = n! \int_0^1 dt_1 \int_0^t dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n f^{(n)}(A - t_1\delta_1 - \cdots - t_n\delta_n)$$

で与えられる。ただし、$\{\delta_j\}$ は$\delta_j : dA \cdots\cdots dA = (dA)^{j-1}(\delta_A dA)(dA)^{n-j}$ によって定義される超演算子 (hyper operator) である。多変数演算子の関数 $f(\{A_j\})$ に対しても、偏微分、高階偏微分などが定義できる。これらを用いると、演算子のテーラー展開公式を導くこともできる。von Neumann 方程式からエントロピー演算子の方程式を導くのにも大変便利である。また、高次指数分解公式への応用もある。さらに演算子汎関数の量子微分も定義できる。

参考文献

M. Suzuki, ~~Submitted to~~ Commun. Math. Phys., J. Math. Phys. (in press), および J. Stat. Phys.
岩波講座４「統計力学」(改訂版)（1996年6月3日発行）の補章「量子解析とその応用」参照。また, Int. J. Mod. Phys. B10 1637—1647 (1996) 参照。代数的定式化に関しては, Phys. Lett. A および日本応用数理学会論文誌参照。