量子論

東北大学大学院理学研究科・　高木 伸

(June 2, 1997)

1　序

数年前に The River Runs Through It（Redford）という映画を観た。これをもじって現在の物理学の大状況を言えば The CD Runs Through It とでもなろうか。CDはCantor diagonalization から compact disc まで多義に渉る acronym であるが、ここに言う The CD は Central Dogma としての量子論を指す。量子論の登場せぬ物理の重要性を充分に認識した上で、上記標語に異論を挟む向きは少なかろう [4]。

本講義で採り上げたいのは、大学の正規の講義ではあまり出て来ぬこと、つまり、あまりにも初等的なため、講義の初めの方にちょっと顔を出してそれでおしまい、ところが後で考えると良くは分からぬ、という類のことである。

特にこの十年来、種々干渉計の精度向上やいわゆるメソスコピック系の開発により、以前には"アカデミック"ないし"哲学的"と、あたかも蔑視されていた事項が、現実問題として登場してきている。初等量子力学の範囲で、量子論の基礎に纏わるもやもやをすっきりさせておくことは、これら実験の意味を理解するうえでも不可欠と言えよう。

大学院に進んで理論の勉強をすると高踏技巧の洗礼を受けるのが習わしのようである。筆者が大学院に入ったころは"Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics"（Abrikosov, Gor'kov and Dzyaloshinskii）が自主セミナーの一つの定本であった。金がないこととて海賊版を買い込み（著作権に対する認識が全く欠如していた）、泡を膨らませたり梯子に登ったりして悦に入っていた覚えがある。高踏技巧は強力であり、それなしには計算できないことも多々あるが、その背後に潜む物理的描像を掴まえるには、ときにManual 人間に徹してみることを勧めたい。まにゅある通りに形式的能率的に答を出して事足れりとするのでなく、非能率かつ非真面目 [6] の手作業 (manual work) で考えて初めて分かることも多いはずである。

では、御用とお急ぎでない方々、しばしお付き合い願いたい。

2　破（≈ 波 ≈ 八方破れ）

講義を頼まれた理由を推察するに、おそらく、量子力学を講義しながら筆者が常に、量子力学は分からぬと呟いているからであろう。素手で出かけて行って、ふだん大学でしている漫談をすればよかろう、手がけている仕事も7月までには終わっていよう、そう思って気安く引き受けてしまった。ところがである、まず3月に abstract、次いで5月には lecture note を書くことになっていた。そんな筈ではなかった。ちゃんと契約を取り交して訊いておかなかったのが失敗である。

物理学汎論の大家、故高橋秀俊先生は、講義の板書をすばやく消してしまわれることが多かった。お弟子さんのどなたかがその理由を尋ねたところ、「間違っているといけないので」とおっしゃったとのこと。学生の帳面だけならまだしも、物性研究に掲載されて

半永久保存されるとなると、これは一大事である。高橋先生の故事に習い、間違っている可能性のあることは一切書かないことにしよう、しかし、そうすると何も書くことがない。妥協案として、院生諸氏に対する教育的配慮の名のもとに、問題点だけを書き連ねて答は書かぬこととした。

なお、責任の所在を明確にするためには、「Aは世間一般にaと呼ばれている」、「世間一般はいざ知らず筆者はAをaと呼ぶ」などと書くべきであろうが、文が長々しくなるのを避けるべく、以下、これを各々「Aはaと呼ばれている」、「Aをaと呼ぶ」と書く。つまり、次のように取り決めておく。

> 受身の文章は、世間一般に認められている(と筆者に思われる)事実を表す。これに対し、主語を伴わぬ述語(呼ぶ、名付けるなど)の主語は筆者である。

したがって後者の内容は必ずしも巷に通用するとは限らない。

2.1 いわゆる”波束の収縮”と近藤問題

量子力学を習いたてのころというのは、波動函数の意味が分からぬものらしい。この4月から学部3年生諸君8名のセミナーにつきあっている。半年間の量子力学入門講義の単位を取ったばかり、Gasiorowiczの教科書[1]を使って調和振動子あたりまで終えたが水素原子はまだ、という諸君である。セミナーでは、BohrのEinsteinとの討論を中心とする回顧録[1]をネタにして討論して貰った。水素原子の波動函数について種々の疑問が出された。

- 観測されなければ電子は原子核の回りをぐるぐる回っているのか、それとも雲のように拡がっていて、観測したとたん、一点に集まるのか、
- そうだとすれば、その反動で原子核もひょいと動くのか、
- 波動函数が拡がっていれば、原子核から相当離れた場所でも電子は観測され得ることになるが、そうだとすればエネルギー保存則に反しないか、
- 波動函数が拡がっていれば、或時刻に或場所に電子が観測されたとしても、その直後に、遥か遠方に電子が観測されることもあり得るはず、とすれば相対性原理に反しないか、
- そもそも原子内の電子の位置は観測可能か、如何にしたら観測できるのか。

これらはいずれも”波束の収縮”に関連した質問である。

いつのことか忘れたが、多分、大学院関係の会議の折、青葉山の物理教室5階の会議室で栗駒山を眺めながら、尊敬する大先輩Iさん(現在、神奈川大学教授)と雑談していたとき、Iさん目を細めて曰く「銀河系全体に拡がっていた波束が、観測した途端に、バサーッと”収縮”してくるってわけだね、ハッハッハッ。」本当にバサーッという音がするのかどうか寡聞にして聞いたことはないが、この「バサーッとハッハッハッ」は、Iさんの柔和な目と共に筆者の脳裡にしかと焼き付いている。文章では音声を伝えられなくて残念である[2]。

量子力学の意味に就いて想いを巡らせたことのある読者には、大抵、いま述べた類の疑問を抱かれた覚えが有ろう。斯くの如きたわごとにはもはや何の疑問も興味も無いという向きには本講義は無用である。筆者の如く四半世紀以上も量子力学と付合って居れば此んな事はすっかり解決済かと云うと、それがやっぱり判らぬ。未だに量子力学に拘って居る所以である。判らぬと云うのも、然し、必ずしも筆者の未熟のせいばかりでも無いらし

[1] 邦訳がないので、これを読んでいる学生数は僅少らしい。
[2] 尤も、如何にすれば音声記憶を脳味噌から再生し得るか、筆者には判り兼ねる。

い。つい最近も、金沢での研究会の昼食の折に、近藤淳さん(あのKondo効果の近藤さん[3]である）から次の様な問題を出された。

> トンネル障壁の中にも、波動函数は滲み込んで居るから、粒子が見出され得る筈である。障壁を如何に高くしようと、確率は低くても見出され得る事に変わりは無い。つまり、見出された粒子のポテンシャルエネルギーは幾らでも高く出来る。これはエネルギー保存則と矛盾して居るのでは無いか。

本講義では、これを近藤問題と呼ぶ。近藤問題は、ポテンシャル障壁中の粒子を想い浮かべて印象的に述べられて居るものの、先に紹介した３年生諸君の疑問と本質的に同じ問題である。勿論近藤さんは答を御存知に違い無いが、筆者に対する教育的配慮として此を問題として仰有ったのである。もし全く自明の事なら面白くも何とも無かろう。近藤さんも此を自明の問題とは認識されていないと云う事である。

数年前に、”波束の収縮を験証（実験的に検証）した”と主張する論文が出版された[2]。読者諸氏には、この論文を読み、その主張の正当如何について考えられたい。ただし[3]も参照。

2.2 コヘレンス (coherence)、デコヘレンス (decoherence)、 エトセトラ

標題の言葉を耳にされること、しばしばであろう[4]。しかし、その意味はと問われると、必ずしも明確な答の返って来ぬことが多い。

- ”干渉性のビームと非干渉性のビーム[5]”とはいかなることか。
- ”異なる光源から出た光は互いに干渉しない”と言われるが、なぜか。
- LASERについてもそうか。
- ”観測すると干渉効果が消える”というのは本当か。

これらの質問も”波束の収縮”と密接に関わっている。

通常、正規講義では消化すべきことが多すぎて、このような”つまらぬ”問題にかかずりあっている暇はない。例えば最後の問について言えば、Young型二連間隙実験に対して、Heisenbergのγ線顕微鏡を持出して終とされることが多かろう。しかし、不確定性原理に頼る伝統的議論は古典論と量子論の折衷であって、歴史的価値があり直観的理解にとって重要ではあるものの、それだけで最終解決というわけには行かぬ。上述のような事項が量子力学に立脚して如何に説明さるべきか、初等量子力学の範囲で明確にしておくべきであろう。

2.3 基本的問題点

（1）”波束の収縮”の本質：

- そもそもこれは理論的に必要な概念か、
- あるいは、理論的にはいざ知らず、現実に起こること即ち験証可能なことなのか。

[3]飾り気が無く、筆者の如き者にも気安く話しかけて下さる親しみ深い人なので、無礼を承知で此の様に呼ばせて頂く。

[4]コヒーレンス、デコヒーレンスと書くのが普通らしい。あるいはディコヒァレァンスなどと書くべきかも知れぬが、原語発音を片仮名で再生するのは所詮不可能である。昔、独語の時間に氷上さんという大先生から教わった覚えがある、ギュョエァテァェとは儂のことかとゲーテ云ひ。

[5]この”ビーム”、光子でも中性子でも電子でもミューオンでも、何でも構わぬ。

(2)”観測”の意味：量子力学における”観測問題”と言うと、いささか”哲学めいて”聞こえる。しかし”天体観測”を哲学めいた言葉と思う人はいないであろう。この観測(observation)は受動的行為である。天体は観測者と無関係に運行しており、観測は只それを観るだけである。こういう言い方をすると天文学者のお叱りを受けるかも知れぬが、観測したからといって天体に何の変化も生じないと信じられているのは確かであろう。今様に言えば”自然に優しい[6]”行為である。しかるに、通常の物理実験室で行われるのは測定(measurement)という能動的行為であって、対象に光子・中性子その他もろもろの探針(probe)を打ち込むこと稀ではなく、当然、対象に影響を与える。その影響は、Heisenbergのγ線顕微鏡のように単純な場合（すなわち、古典力学にもそれに対応することがあるけれども計算で補正可能、しかし量子論においては不確定性原理のため補正不可能という場合）もあるが、たいていは、量子力学的位相をも（あるいは、だけを）乱すという、遥かに微妙なものである。少なくとも最近の英語文献では、quantum observation problemなどとは言わずquantum measurement problemと言うのが普通である。日本語も量子力学的測定過程の問題といった表現の方が適切である。要するに、測定自体が一つのれっきとした物理現象であることは、最近のメゾスコピック系やSTM,AFMなどの諸実験を持ち出すまでもなく、明らかであろう。”観測による波束の収縮”を論ずる際にも、このことを念頭に置くべきである。

3　急（≈ 窮 ≈ 急場しのぎ）

高橋先生まで引き合いに出して言い訳をしてみたものの、わけの分からぬ愚問を羅列しただけでは誠に後ろめたく気が引ける。といって、講義のおとをTeXでと言われても、戦後50年をようやく生き延びてへとへとの痩身には、これは並大抵のことでない。TeXを駆使して手駆すどころか、¥印一つ忘れただけでうんともすんとも動かぬ何とも融通の利かぬTeXに手苦す、締め切り日は容赦なく過ぎ、Schrödinger猫にうろたえる窮鼠の心持、さりとて猫を噛むべき勇気もなく、考へるひんと[7]と題する断章を付して急場を凌ぐこととする。先に挙げた論文ともども、予習材料として使われたい。

3.1　考へるひんと其の1：Decoherenceについて

量子干渉性消失の原因として、環境による位相撹乱(dephasing)と環境へのエネルギー散逸(dissipation)とがある。後者の効果は、現実の環境には付きものであろうが、干渉性消失の必要条件ではなく、後者の主要因がむしろ位相撹乱であることも多い。その本質を簡潔に見せてくれる模型としてColeman-Hepp模型を採り上げよう。都合上、対象たる系を巨視系と呼び、それが二状態ハミルトニアンで近似できるものとする。すなわち、巨視系のハミルトニアン$\hat{H}_S$は

$$\hat{H}_S := \frac{1}{2}h\Delta(\hat{\Pi}_1 - \hat{\Pi}_0),$$

ただし

$$\hat{\Pi}_n \equiv |n\rangle\langle n| \ , \ n = 0,\ 1.$$

は状態$|n\rangle$への射影子である。

環境は大きさ1/2のスピンN個から成るとする。

$$環境 = \{\hat{\mathrm{s}}^{(j)} | j = 1\ ,\cdots,\ N\}.$$

[6]何と傲慢な表現であることか

[7]これは昨秋の東北大院講義（およびその他の大学における集中講義）にて他の文脈で話した内容であり、同講義に出席された院生諸氏には重複して申し訳ないが（尤も筆者如きの講義に時間を潰すのももったいないこととて出席者は極少数であった）、特に東北大は本学校の主催側でもあり、まあ、ご勘弁願えよう。

簡単のため環境自体のハミルトニアンは0とし、巨視系と環境との相互作用ハミルトニアン$\hat{H}_{S\mathcal{E}}$は次の形であるとする。

$$\hat{H}_{S\mathcal{E}} := \hat{\Pi}_1 \sum_{j=1}^{N} h\mathcal{B}_j(t-t_j)\hat{s}_x^{(j)}. \tag{1}$$

ここで$\hat{s}_x^{(j)}$は$\hat{\mathbf{s}}^{(j)}$のx成分、$\mathcal{B}_j(t)$は巾$2\delta_j$のパルス型の函数である。つまり、巨視系が状態$|1\rangle$にある場合、またその場合に限り、環境の第jスピンにx方向のパルス磁場がかかる、これが上の相互作用の内容である。($\hat{\Pi}_1$を$\hat{\Pi}_0$でおきかえても以下の議論の本質に影響しない。) ただし、

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T,$$

(Tは定数) とし、隣り合うパルスは互いに重なり合わない($\delta_j + \delta_{j+1} < t_{j+1} - t_j$)とする。環境の各スピンについて、スピン"上向き"の状態$|\uparrow\rangle^{(j)}$, "下向き"の状態$|\downarrow\rangle^{(j)}$、および"θ方向"の状態$|\theta\rangle^{(j)}$を定義しておこう。すなわち

$$\hat{s}_z^{(j)}|\uparrow\rangle^{(j)} = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle^{(j)}, \ \hat{s}_z^{(j)}|\downarrow\rangle^{(j)} = -\frac{1}{2}|\downarrow\rangle^{(j)},$$
$$|\theta\rangle^{(j)} := \cos(\theta/2)|\downarrow\rangle - i\sin(\theta/2)|\uparrow\rangle.$$

また、環境スピンが"すべて下向き"の状態を$|\mathrm{vac}\rangle$とする。

$$|\mathrm{vac}\rangle \equiv |\downarrow, \downarrow, \cdots, \downarrow\rangle := |\downarrow\rangle^{(1)}|\downarrow\rangle^{(2)}\cdots|\downarrow\rangle^{(N)}.$$

以下、全系のハミルトニアン

$$\hat{H} := \hat{H}_S + \hat{H}_{S\mathcal{E}}$$

のもとで、次の初期状態からの時間発展を調べよう。

$$|\Psi(0)\rangle\rangle = |-;\mathrm{vac}\rangle\rangle \equiv |-\rangle|\mathrm{vac}\rangle. \tag{2}$$

準備として

$$[\hat{\Pi}_n \ , \ \hat{H}] = 0$$

に着目する。つまり、巨視系の状態が$|n\rangle$である部分空間$\mathcal{H}_n$ごとに考えればよい。$\hat{H}$を$\mathcal{H}_n$上に制限して得られる演算子を$\hat{H}_n$とすれば

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2}h\Delta,$$
$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2}h\Delta + \sum_{j=1}^{N} h\mathcal{B}_j(t-t_j)\hat{s}_x^{(j)}.$$

これらはそれぞれ環境スピンのみに作用する演算子である。対応する時間発展演算子を$\hat{U}_n(t)$とおけば

$$\hat{U}_0(t) = \exp(it\Delta/2),$$
$$\hat{U}_1(t) = \exp\left\{-it\Delta/2 - i\sum_{j=1}^{N}\theta_j(t)s_x^{(j)}\right\},$$

ただし

$$\theta_j(t) := \int_0^t dt' \mathcal{B}_j(t' - t_j). \tag{3}$$

従って

$$\begin{aligned}\hat{U}_0(t)|\mathrm{vac}\rangle &= \mathrm{e}^{it\Delta/2}|\mathrm{vac}\rangle,\\ \hat{U}_1(t)|\mathrm{vac}\rangle &= \mathrm{e}^{-it\Delta/2}|\theta_1(t),\ \theta_2(1), \cdots,\ \theta_N(t)\rangle\\ &:= \mathrm{e}^{-it\Delta/2}|\theta_1(t)\rangle^{(1)}|\theta_2(t)\rangle^{(2)}\cdots|\theta_N(t)\rangle^{(N)}.\end{aligned}$$

つまり、巨視系が状態$|1\rangle$にある場合、環境の第jスピンの時刻tにおける向きは$\theta_j(t)$で与えられる。もともと下を向いていたスピンが、パルス磁場を受けて回転するからである。つまり、式(3)で定義される$\theta_j(t)$はスピンの回転角を表す。以上を用いて

$$\begin{aligned}|\Psi(t)\rangle\rangle &= \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle\rangle\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|0\rangle\hat{U}_0(t)|\mathrm{vac}\rangle - |1\rangle\hat{U}_1(t)|\mathrm{vac}\rangle\right\}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\mathrm{e}^{it\Delta/2}|0;\mathrm{vac}\rangle\rangle - \mathrm{e}^{-it\Delta/2}|1;\theta_1(t),\ \theta_2(t),\ \cdots,\ \theta_N(t)\rangle\rangle\right\}.\end{aligned}$$

ゆえに

$$P_{\pm}(t) = \frac{1}{2}\left[1 \mp \mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\mathrm{e}^{-it\Delta}\mathcal{C}(t)\right\}\right],$$

$$\mathcal{C}(t) = \langle\mathrm{vac}|\theta_1(t),\ \theta_2(t),\ \cdots,\ \theta_N(t)\rangle = \prod_{j=1}^{N}\cos\{\theta_j(t)/2\}.$$

巨視系が環境と相互作用しない場合にはすべての$\theta_j(t)$が0、つまり$\mathcal{C}(t) = 1$となり、$P_{\pm}(t)$は巨視系が左右の井戸の間でMQC振動することを表す。さて相互作用のある場合、特殊な状況を設定しないかぎり、パルス$\mathcal{B}_j(t)$の面積

$$\theta_j \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt B_j(t)$$

が2πの整数倍になることはない。時間tが経過するにつれ各$\theta_j(t)$が順次θ_jになるから、$|\mathcal{C}(t)|$は少なくとも大局的にはtとともに減少する。(もし”任意のjとtに対し$0 < \theta_j(t) \leq \theta_j < \pi/2$”なら単調に減少する。)特に$N \gg 1$であれば、$|\mathcal{C}(t)|$は$t$が$T$に近づくにつれて限りなく0に近づき、MQC振動の振巾は減衰する。つまり、decoherenceが起こる。

なお、この模型では

$$[\hat{H}_{\mathcal{S}}\ ,\ \hat{H}] = 0.$$

つまり巨視系のエネルギーは保存量であって、環境へのエネルギー散逸は生じない。したがって、上述のdecoherenceは純粋にdephasingによるものである。

3.2 考へるひんと其の2：量子Zeno効果 … 波束の収縮？

標題の効果は、約20年前に”量子論におけるZenoの逆理”という名で提唱された[5]。その内容は、”準安定状態に用意された系を観測し続けると、観測による波束の収縮のため、当該の状態は崩壊(すなわち安定状態へ遷移)しない”というものであった。数年前には”量子Zeno効果と考えられる現象を実験で検出した、したがって波束の収縮が実証された”と主張する論文も出版され[2]、物議を醸した。

前節との関連上、当該の系を巨視系と名付けるが、以下の議論は微視的な系に対してもそのまま成立する。環境としては前節のColeman-Hepp模型と同じものを考え、その初期状態を$|\mathrm{vac}\rangle$とする。一方、巨視系としては一般的な系を考え、その初期状態を$|\psi\rangle$とする。

$$|\Psi(0)\rangle\rangle = |\psi;\mathrm{vac}\rangle\rangle \equiv |\psi\rangle|\mathrm{vac}\rangle\ . \tag{4}$$

そして、巨視系と環境の相互作用が次のような特殊な形であるとする。

$$\hat{H}_{\mathcal{SE}} := \hat{\Pi}\sum_{j=1}^{N} h\mathcal{B}_j(t-t_j)\hat{s}_x^{(j)}\ , \tag{5}$$

$$\hat{\Pi} \equiv 1 - |\psi\rangle\langle\psi|\ , \tag{6}$$

$$\text{すべての}\,j\,\text{に対し}\quad \int_{-\infty}^{\infty} dt\mathcal{B}_j(t) = \pi\ . \tag{7}$$

この相互作用は(1)に似ているが、巨視系が初期状態と直交する状態にあるときだけに利くという点、および、パルスがπパルスであるという点において異なる。以下、簡単のためパルスは等間隔にかけられるものとし、その間隔をτとする。また、パルス幅δは"十分に狭い"ものとする。すなわち

$$t = j\tau\ , \qquad \delta \ll \tau_{\mathcal{S}}\ . \tag{8}$$

$\tau_{\mathcal{S}}$は、"環境から切り離された際の、巨視系の時間変化に特徴的な時間尺度(例えば、前節の二状態模型ならばΔ'　　)である。

さて巨視系独自の時間発展を

$$\exp(-it\hat{H}_{\mathcal{S}}/h)|\psi\rangle = c(t)|\psi\rangle\ + |\phi(t)\rangle\ , \tag{9}$$

と書くことができる。ただし$|\phi(t)\rangle$は、一般に規格化されていないが、$|\psi\rangle$と直交した状態である。

$$\langle\psi\mid\phi(t)\rangle\ = 0\ . \tag{10}$$

以下、全系の状態の時間変化を、各期間毎に追ってみよう。

(1) $0 < t < \tau - \delta$
この期間には$\hat{H} = \hat{H}_{\mathcal{S}}$ であるから、(3.2)により

$$|\Psi(\tau-\delta)\rangle\rangle = c(\tau)|\psi;\mathrm{vac}\rangle\rangle + |\phi_1;\mathrm{vac}\rangle\rangle\ ,\quad |\phi_1\rangle := |\phi(\tau)\rangle. \tag{11}$$

右辺のcとϕの引数は、正確には$\tau-\delta$であるが、条件(8)を用いてτとした。

(2) $\tau - \delta < t < \tau + \delta$
この期間には、条件(8)により$\hat{H}_{\mathcal{S}}$を無視してよく、$\hat{H} \simeq \hat{H}_{\mathcal{SE}}$である。したがって、時刻$\tau-\delta$から$t$までの時間発展演算子　$\hat{U}(t,\tau-\delta)$ は、式(3)で定義されるスピン回転角$\theta_j(t)$を用いて次の形に書かれる。

$$\hat{U}(t,\tau-\delta) \quad = \exp\{-i\hat{\Pi}\theta_1(t)\hat{s}_x^{(1)}\} = (1-\hat{\Pi}) + \hat{\Pi}\exp\{-i\theta_1(t)\hat{s}_x^{(1)}\}\ , \tag{12}$$

特に

$$\hat{U}(\tau+\delta,\tau-\delta) \quad = (1-\hat{\Pi}) + \hat{\Pi}\exp\{-i\pi\hat{s}_x^{(1)}\}\ . \tag{13}$$

ゆえに

$$|\Psi(\tau+\delta)\rangle\rangle = c(\tau)|\psi;\mathrm{vac}\rangle\rangle + |\phi_1;\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle\rangle \tag{14}$$

を得る。

(3) $\tau+\delta < t < 2\tau-\delta$
この期間には再び$\hat{H}=\hat{H}_S$ であるから、() により

$$|\Psi(2\tau-\delta)\rangle\rangle = c(\tau)\{c(\tau)|\psi;\mathrm{vac}\rangle\rangle + |\phi_1;\mathrm{vac}\rangle\rangle\} + |\tilde{\phi};\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle\rangle\ . \tag{15}$$

ただし

$$|\tilde{\phi}\rangle := \exp(-i\tau\hat{H}_S/h)|\phi_1\rangle =: c_1(\tau)|\psi\rangle + |\phi_2\rangle\ ,\quad \langle\psi\mid\phi_2\rangle\ = 0\ . \tag{16}$$

$\hat{U}(2\tau+\delta,2\tau-\delta)$ は　$\hat{U}(\tau-\delta,\tau-\delta)$ と同じ式で与えられるから

$$|\Psi(2\tau+\delta)\rangle\rangle = \{c(\tau)\}^2|\psi;\mathrm{vac}\rangle\rangle + c(\tau)|\phi_1;\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle\rangle + c_1(\tau)|\psi;\uparrow\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle\rangle + |\phi_2;\uparrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle\rangle\ . \tag{17}$$

以下同様にして、時刻$T(\equiv N\tau+\delta)$ における状態が次の形になることが分かる。

$$|\Psi(T)\rangle\rangle = \{c(\tau)\}^N|\psi;\mathrm{vac}\rangle\rangle + \sum_{n\geq 0}|\tilde{\psi}_n;\star_n\rangle\rangle\ , \tag{18}$$

ここで$|\tilde{\psi}_n\rangle$ は巨視系の状態、$|\star_n\rangle$ は環境の状態であって、後者はすべてのn について、$|\mathrm{vac}\rangle$ と直交している。

$$\langle\mathrm{vac}|\star_n\rangle = 0\ . \tag{19}$$

一方、$|\tilde{\psi}_n\rangle$ は一般に$|\psi\rangle$ と直交しない。
　例えば$N=2$ ならば以下の通りである。

$$|\tilde{\psi}_0\rangle = c_1(\tau)|\psi\rangle\ ,\quad |\tilde{\psi}_1\rangle = c(\tau)|\phi_1\rangle\ ,\quad |\tilde{\psi}_2\rangle = |\phi_2\rangle\ ,$$

$n\geq 3$ については　$|\tilde{\psi}_n\rangle = 0$,

$$|\star_0\rangle = |\uparrow\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle\rangle\ ,\quad |\star_1\rangle\ = |\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle\rangle\ ,\quad |\star_2\rangle = |\uparrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle\rangle\ .$$

式(18) から、時刻Tにおいて全系がその初期状態に見出される確率$P_{\mathrm{tot}}(t)$ を計算すると、

$$P_{\mathrm{tot}}(T) = |\langle\langle\Psi(0)|\Psi(T)\rangle\rangle|^2\ = p^N\ ,\quad p := |c(\tau)|^2. \tag{20}$$

ところが

$$c(\tau)\quad = \langle\psi|\exp(-i\tau\hat{H}_S/h)|\psi\rangle\ . \tag{21}$$

したがって

$$p\quad = 1-(\tau/\tau_Q)^2 + \mathcal{O}(\tau^4)\ ,\quad \tau_Q := h/\triangle E\ . \tag{22}$$

ただし$\triangle E$は巨視系の始状態におけるエネルギーの不確定度、すなわち

$$(\triangle E)^2 := \langle\psi|\left(\hat{H}_S - \langle\psi|\hat{H}_S|\psi\rangle^2\right)^2|\psi\rangle \tag{23}$$

であり、τ_Qはそれに付随する特性時間 (quantum indeterminacy time) である。
　ここで、Tを一定に保ちつつNを大きくして

$$\tau/\tau_Q \simeq T/N\tau_Q \ll 1 \tag{24}$$

とすれば、

$$P_{tot}(T) > 1 - N^{-1}(T/\tau_Q)^2. \tag{25}$$

さて通常、実験家にとって、環境が如何なる状態に見出されるかは関知するところではない。したがって、興味のある量は$P_{tot}(T)$ではなく、むしろ巨視系がその初期状態に見出される確率$P_S(T)$である。後者は、その定義により次のように求められる。

$$P_S(T) = |\langle\langle\psi; \mathrm{vac}|\Psi(T)\rangle\rangle|^2 + \sum_{\star} |\langle\langle\psi; \star|\Psi(T)\rangle\rangle|^2 , \tag{26}$$

ただし$|\star\rangle$は、環境の状態のうちで$|\mathrm{vac}\rangle$と直交する任意のものである。右辺第一項は$P_{tot}(T)$に他ならない。また確率は1以下の量である。したがって

$$1 \geq P_S(T) \geq P_{tot}(T) . \tag{27}$$

これと式 (25) を組み合わせて次の結果を得る。

$$0 \leq 1 - P_S(T) \leq N^{-1}(T/\tau_Q)^2 . \tag{28}$$

ゆえに、Tを一定に保ちつつ$N \to \infty$とする極限では$P_S(T) = 1$となる、すなわち、時刻Tにおいて巨視系は確実に初期状態に見出される。Tの大きさの如何にかかわらず、(28)の右辺が十分小さいという状況を設定することが原理的には可能であろう。というわけで、次の結論に導かれる。

> 環境と「頻繁に(24)」かつ「強く(7)」相互作用することにより、"巨視系が初期状態に「事実上(28)」留まり続ける" という事態が起こり得る。

4 とぴっくす：月夜の猫

うーん、何を話しましょうか。まだ考えていないが、おそらく、今や六十弐歳円熟の猫に登場願い、まな板に載せることになろう。別に、猫を切り刻むという悪趣味に走る積もりは毛頭ない。Einsteinの月明かりに照らして、猫を実験のそじょうに載せようということである。

References

[1] N. Bohr, "Discussion with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics" in *Atomic Physics and Human Knowledge* (John Wiley and Sons, 1958), p.32-66.

[2] W.M. Itano, D.J. Heinzen, J.J. Bollinger and D.J. Wineland, Phys.Rev.A41(1990)2295. "Quantum Zeno effect"

[3] W.M. Itano, D.J. Heinzen, J.J. Bollinger and D.J. Wineland, Phys.Rev.A43(1991)5168. "Reply to "Comment on Quantum Zeno effect""

[4] A.J. Leggett, *The Problems of Physics* (Oxford University Press, 1987) ; 邦訳 物理学のすすめ（紀伊國屋書店, 1990）. 特に "Chap.5: Skeletons in the cupboard".

[5] B. Misra and E.C.G. Sudarshan, J.Math.Phys.18(1977),756. "The Zeno's Paradox in quantum theory"

[6] 森　政弘, 「非まじめ」のすすめ, 講談社 (1984).