連続体上の計算概念について
——再帰関数を超えるもの——

八杉満利子

1. 序文

1. 1 背景

近年、数学における計算可能性問題が、数学研究において重要なテーマになってきている。最初は離散構造上の（自然数上の、と考えてよい）計算概念が論じられていた。離散構造上の計算可能性概念は、たとえば再帰関数論あるいはテューリング機械理論等によって表現されている。どの理論でも「計算可能性」は明確に定義されており、また数学的にはすべて相互に同値である。離散構造上の計算概念はこれら（のそれぞれ）によって尽くされている、という「チャーチのテーゼ」は広く認められている。人がこれらを「計算」と呼ぶのは各人にとって、少なくともその一つが「計算」という感覚に合致しているからだろう。ここでは再帰関数を採用する。

その後連続体上の「計算可能性」が考察の対象となり、解析学における計算可能性構造の研究が進んだ。ここでは実数体に話を限定する。

数学における計算可能性の特性は、入力の情報から出力を求めるプロセスとして決定論的なものが存在することである。数学的にはこの条件を、後述するように、「列計算可能性」によって表す。

実数および実数上の連続関数の計算可能性概念については、2 節の定義が計算の意味を適切に表現するものとして合意されており、それに基づく数学の実行によってその妥当性が十分検証されている。

実数においても連続関数においても、計算可能性の基礎になるのは再帰関数であり、有理数列、諸々の収束率や関数の連続率などが再帰関数で与えられる。

しかし、科学・技術において有用な不連続関数は多数あり、それらの計算も普遍的な問題である。不連続関数の計算可能性の基礎としては再帰関数のみでは不十分で、何らかの拡張が必要である。そのための理論は多数提案されてきた。それらは数学的には適当な条件の下で同値になるが、一意的な計算可能性概念は確定していないのである。

ここではそれらのうちの二つの方法、すなわち「極限再帰関数による収束率の容認」と「関数の定義域の位相の変更」について解説し、それらにおける「計算概念」について検討する。

1. 2 計算とは

本論に入る前に、連続体上の計算可能性問題において何を計算と考えるか、あるいは何を計算と感じるか、について考えておきたい。

まず基本になる再帰関数の特性を考えよう。再帰関数とは大まかにいえば計算プログラムが書ける離散構造上の関数である。一歩一歩の計算が実行され、やがて計算が停止して答えが出力される。人はこのように、一歩一歩の結果とともに「有限回で求める値に到達する保証」があれば、そのプロセスを「計算」として受け入れる。

再帰関数とテューリング機械による計算が同値であることは数学的な事実であるが、両者は「計算感覚」として同じではない。それにも関わらずその差異について議論されないのは、経験的に両者間の変換に慣れ親しんでいるからだと考えられる。以後の議論でも「慣れ親しみ感」は重要な要素である。

再帰関数は本来自然数上で定義されるが、その定義は整数、有理数などに拡張できる。

実数および実数上の連続関数の計算可能性は、それらの通常の定義において、有理数列、諸々の収束率や連続率などをすべて再帰関数に限定することによって得られる。たとえばある実数が計算可能とは、それを近似する（それに収束する）再帰的有理数列があって、その近似の精度（近似率あるいは収束率と呼ばれる）が再帰関数で与えられることである。整数、有理数、数学でよく知られている $e, \pi, \sqrt{2}$ などの無理数は計算可能である。この計算可能性の定義は容易に実数の列に拡張することができる。

不連続関数は「連続でない」という以外の特性を持たない。たとえば連続関数の連続率に対応するような量も定義できない。そのために不連続関数の計算概念は一通りには決まらず、各方法論に依存して定義されることになり、その都度「何をもって計算と呼ぶか」を検討する必要が生じるのである。

不連続関数の計算可能性の基礎としては再帰関数の極限をとること、あるいは関数の定義域の位相の変換など、再帰性を超える原理を必要とする。これらを計算として認めようとする場合に何が問題になるか、どのような解決策があり得るか、を問うことが本論の主内容である。どちらも前述のような再帰関数の有限的な「計算感」からの飛躍であるが、「慣れ親しむ」ことによって「再帰性の延長上にある計算」として容認できる範囲にはあると思われる。これらの意味は、以後の各節での計算可能性に関する解説の後に、より明確になるであろう。

ここで一点注意しておきたい。我々は通常の古典数学に携わっているのであって、いわゆる構成的数学とは立場が異なる。すなわち、古典数学を全面的に仮定している。たとえば実数の中での代数的数について研究するように、普通の実数体の中での計算可能実数の構造について研究する、という立場である。

2. 計算可能性の定義：実数と連続関数の場合

この節では計算可能実数および実数上の連続関数の計算可能性の定義を述べる。正確な定義の前に概観を与えておこう。

2.1 計算可能性概観

前述のようにある実数が計算可能とは、それが再帰的有理数列によって再帰的な精度をもって近似されることである。

一般に収束（近似）、連続などの精度（収束率または近似率、連続率）が再帰関数で得られるときには、その現象を「実効的」と呼ぶ。実効性とは、計算可能性問題の再帰性への帰着を意味する。数学における種々な対象物、たとえば実数、実数列、連続関数、などの計算可能性は実質再帰的有理数列と、収束あるいは連続のいわゆる $\varepsilon - \delta$ 方式の定義の再帰性のみに依存している。後者は、ε に対して δ を再帰的にとれる、という要請である。

実数上の連続関数の計算可能性は、列計算可能性（計算可能実数列を計算可能実数列に写す）および実効的連続性（再帰的連続率の存在）によって定義される。

以上は実数および実数列と、実数上の連続関数についての計算の意味を適切に表現するものとして、広く合意されている。列計算可能性と実効的連続性は連続関数の計算可能性のパラダイムと称してよいだろう。

2.2 計算可能性の定義

この節では計算可能実数および実数上の連続関数の計算可能性の定義を述べる。

実数の概念は、有理数のコーシー列あるいは有理数のデデキント・カットなどで表現される。計算可能性の定義ではどの表現についても同値になることが知られている (Pour-El & Richards, 1989) が、有理数のコーシー列が扱いやすい。すなわち実数 x について、

(A) (i) ある有理数のコーシー列 $\{r_n\}$ があって、

(ii) x はそれによって近似される。

(ii) を詳しく書くと、「任意の p に対して N が存在して、$n \geq N$ ならば $|x - r_n| < \frac{1}{2^p}$ が成り立つ」となる。p, N, n は自然数を表す変数である。(A) を「計算」の立場から表現しなおすと、次の (B) になる。

(B) (i) n に対して r_n を計算する方法が存在する。

(ii) $\{r_n\}$ の x への近似の精度（近似率あるいは収束率）の計算方法が存在する。

(B) の数学的な記述は次の (C) になる。

(C) (i) $\{r_n\}$ は（自然数から有理数への）再帰関数である。

(ii) ある再帰関数 α が存在して、任意の p と任意の $n \geq \alpha(p)$ について、$|x - r_n| < \frac{1}{2^p}$ が成り立つ。

(ii) は、いわゆる $\varepsilon - \delta$ 方式の条件において ε に対して δ（この場合には p に対して N）を与える計算方法の存在を要求するものである。古典的な実数の性質 (A) から実効的な条件 (B) または (C) への移行を「実効化」と呼ぶ。また、(ii) の条件を満たす近似を「実効的近似」という。

他の計算可能性定義においても実効性および実効化の構造は同様である。

実数の計算可能性の定義は実数列 $\{x_m\}$ に対して自然に拡張される。

実数関数 f が（実数全体で）連続である、とは、

(D) (i) 任意の実数 x に対して関数値 $f(x)$ が定まり、

(ii) 連続の性質が成り立つ。

(ii) はいわゆる $\varepsilon - \delta$ 方式で表現されるものであるが、後のために次のような同値な表現を採用する：

任意の p, k に対して N が存在して、$x, y \in [-k, k]$ で $|x-y| < \frac{1}{2^N}$ ならば $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^p}$ が成り立つ。

(D) の実効化は次のように述べられる。

(E) (i) ある計算方法があって、任意の計算可能な実数 x に対して、その方法によって計算可能実数 $f(x)$ を得ることができる。

(ii) 連続率 N の計算方法が存在する。

(E) をもって連続関数 f の計算可能性と考え、数学的には次の (F) で表現する。

(F) (i) （列計算可能性）f は計算可能実数列 $\{x_n\}$ を計算可能実数列 $\{f(x_n)\}$ に写す。

(ii) （実効的連続性）f に対して再帰的な連続率 β が存在する：

すべての p, k に対して $x, y \in [-k, k]$ で $|x-y| < \frac{1}{2^{\beta(p,k)}}$ ならば $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^p}$ が成り立つ。

前述のように、数学でよく使われる実数は計算可能であり、教科書で見るような数列は計算可能である。加減乗除、三角関数、指数関数、対数などよく知られている関数は、その定義域上で計算可能である。

3. 不連続関数についての反例

不連続関数の計算可能性については、当然ながら連続性に基づく定義を適用するわけにはいかないので、実効的連続性の条件は論外である。しかしせめて、列計算可能性は計算可能性の一条件とできないだろうか？この期待が裏切られる例を以下で説明する。ここでどのような不連続関数を計算可能と認めたいか、という問題があり、それによってこの反例の意味も変わるが、不連続関数の計算可能性についての多くの理論において計算可能であることが示され、かつ素朴な意味でも計算可能と感じられる例を扱う。

$[x]$ は最大整数値関数、あるいはガウス関数と呼ばれ、x を越えない最大整数を値とする。関数値が各整数点で飛躍するので不連続であるが、右連続ではある。個々の関数値は整数なのだから当然計算可能である。後で説明するように、我々は関数として $[x]$ は「計算可能」だという感覚をもつ。他方列計算可能性が成り立たないという意味で、一般的定義によれば、$[x]$ の値の計算方法はない。ガウス関数は計算可能性についての、数学的な定義と人の

感覚のずれを示す例といえるが、人の感覚による計算可能性を何らかの形で反映させる方法を 4 節で提示する。

ガウス関数についての列計算可能性の反例を (Yasugi, Brattka & Washihara, 2002) から引用しておく。

a は 0 を値としてとらない再帰的単射（１対１関数）で、値の集合（$Ran(a)$ と書く）が再帰的でないものとする (Odifreddi, 1999)。$\{x_n\}$ は次のような計算可能実数列とする。（実際には有理数列である。）

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2^m} & n = a(m) \text{ のとき} \\ 0 & \text{そのような } m \text{ がないとき} \end{cases}$$

これを使って、別の計算可能実数列 $\{y_n\}$ を $y_n = 1 - x_n$ と定義する。このとき

$$y_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^m} & n = a(m) \text{ のとき} \\ 1 & \text{そのような } m \text{ がないとき} \end{cases}$$

となり、したがって

$$[y_n] = \begin{cases} 0 & n = a(m) \text{ のとき} \\ 1 & \text{そのような } m \text{ がないとき} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで $\{[y_n]\}$ が計算可能実数列であると仮定すると、$Ran(a)$ が再帰的になることが示される。すなわち、$[y_n] < \frac{1}{2}$ ならば $n \in Ran(a)$ であり、$[y_n] > \frac{1}{2}$ ならば $n \notin Ran(a)$ である。仮定によれば前提条件は再帰的なので、$Ran(a)$ が再帰的になる。これは a の条件に矛盾する。したがって、計算可能な入力 $\{y_n\}$ に対して関数値の列 $\{[y_n]\}$ は計算可能列ではない。

他方、人はガウス関数を「計算」するのだ。たとえば、まず各整数点 n を認識し、関数値 $[n] = n$ を計算する。そしてこれを基に $n < x < n + 1$ について関数値 $[x] = n$ を計算する。この「計算」はどのような原理にしたがっているのだろうか。このことについて以下で考察していく。

なおこの例は、個々の関数値の計算可能性とその計算方法の存在とは別の事柄であること、また、有理数列 $\{x_n\}$ のように実数列として計算可能であるが有理数列としては再帰的ではない例が存在すること、を示している。

4. 不連続関数の計算可能性について

「不連続関数の計算可能性」は、当然ながら連続性に基づく定義が適用できないので、2.2 節の定義の多少の変更によって得る、というわけにはいかない。さらに 3 節で見たように、列計算可能性も一般には成立しない。それでも人はある種の不連続関数について「計算可能感」をもっている。

不連続関数の計算可能性理論は多数提案されてきた。そのなかでも、（不連続関数を含む）「計算可能な関数の族」の作る数学的構造の研究を目的とする、M.B. プール-エルが提唱した、「実効的関数空間論」が数学者にとっては魅力的である。その理論では空間の 1 要素としての（不連続）関数の計算可能性を定義する (Pour-El et al., 1989; Yasugi & Washihara, 2000)。この方針によれば再帰関数の定義とそのいくつかの初等的な性質の理解以外は通常の数学の知識と技術によって（不連続関数の）計算可能性の研究を進めることができる。

この方法論は有効でまた美しく、解析学における計算可能性問題について多くの成果をあげてきた。しかし関数空間論とは、一般に関数の不連続点における挙動を無視して、ある区間内での関数の平均的挙動を扱うものである。他方具体的な不連続関数については多くの場合、不連続点での関数値は容易に計算できるものであり、人はまずそれを計算する。私は、このような人間の知的行為を数学的に表現することが、数学における計算可能性問題の特性を示すことである、と考えている。その目標に向かっているときに自然に行き着いたのが、「極限再帰関数」および「実効的一様位相」を使う手法であった。

不連続関数の不連続点における関数値の計算には一歩一歩感は希薄であるが、実際に計算している、という事実はある。これを従来の計算論で基礎付けようとすると、極限再帰性あるいは位相の変換のように、伝統的な計算論からの「飛躍」を認めなければならない。飛躍を含めたプロセスを「計算」と認識できるか、また、その認識は何に基づくものか、などの疑問がわき、簡単には決着がつかない。

以下では、連続関数の計算可能性を基本にして、不連続関数の計算可能性についての二つの視点を紹介し、その意義と問題点を検討していきたい。

4.1 極限再帰性

3 節の反例 $\{[y_n]\}$ について、なんらかの「計算」の意味を与えてみよう。(Yasugi et al., 2002) で連続関数の場合に習って $[x]$ の計算を試み、再帰関数に何を付け加えるべきか、を分析している。まずその概要を述べよう。

任意の計算可能な実数 x について x が再帰的有理数列 $\{r_k\}$ と再帰的収束率 α で表現されるものとするとき、その情報を使って $n-1 < x < n+1$ となる整数 n を求める計算方法が存在する。たとえばそれによって得られた n が 0 であったとしよう。次のような性質 $R(p)$ を考える。

$$R(p) \equiv r_{\alpha(p)} < -\frac{1}{2^p}$$

$R(p)$ は再帰的に判定できる。このとき再帰的自然数列 $\{N_p\}$ を次のように定義する：$R(p)$ が成り立つとき $N_p = 1$、成り立たないとき $N_p = 2$。（N_p の値は相異なる自然数であれば何でもよい。）さらに、N_p が決まるごとに $N_p = 1$ ならば $s_p = -1 + \frac{1}{2^{p+1}}$、$N_p = 2$ ならば $s_p = \frac{1}{2^{p+1}}$ と定義すると、$\{s_p\}$ は再帰的な有理数列である。

$R(p)$ がどこかの $p = p_0$ で成り立てば p_0 以上の任意の q についても $R(q)$ は成り立つ。し

たがって N_p は最終的に安定して値 1 をとる。もしそのような p がなければ、N_p は最初から安定していて値は 2 である。これらの安定値を整数列 $\{N_p\}$ の極限と定義し、$\lim_p N_p$ と書く。極限値は 1 か 2 に確定する。極限値が 1 ならば $[x] = -1$ であり、2 ならば $[x] = 0$ である。いずれにしても再帰的有理数列 $\{s_p\}$ は $[x]$ を近似する。

この場合の近似率はどうなるか？$\lim_p N_p = 1$ の場合には $R(p)$ が成り立つ最初の $p = p_0$ が近似率になる。$\lim_p N_p = 2$ の場合には最初から正しい値に行き着いているので、近似率は 1 でよい。$\lim_p N_p$ が 1 の場合、2 の場合、それぞれの中では近似率は再帰的に求まる。

以上のことから、もしも再帰関数 $\{N_p\}$ について極限値をとる操作を計算過程として容認するならば、$[x]$ は再帰的有理数列 $\{s_p\}$ によって近似され、近似率は $\lim_p N_p$ の値にしたがって再帰的に決まる。言い換えると、$\{s_p\}$ の $[x]$ への収束率は $\{N_p\}$ の極限値に関して再帰的（recursive in $\lim_p N_p$）な関数として得られる。

もしも x がたとえば事実上 $-1 < x < 0$ であるならば、前述の計算は有限回で $R(p)$ に行き着き、連続関数の関数値の計算と同様になる。すなわち、この方法での $[x]$ の関数値の計算は、形式的には連続関数の場合の計算方法を実行し、結果として収束率の計算が極限計算を使って行われた形になっている。

１個の計算可能な実数 $[x]$ について説明したが、以上の議論は x の特殊性に依存しないものなので、計算可能実数列 $\{x_m\}$ について同様の考察ができる。そのときには $\{N_{mp}\}$ と $\{s_{mp}\}$ が m にも依存して決まる。

一般に再帰関数 $\gamma(m, p)$ について $p = 0, 1, 2, \cdots$ と計算を進めるときに、もしもある p_0 から先は一定の値になるならば、その値を $\gamma(m, p)$ の p に関する極限とよび、$\lim_p \gamma(m, p)$ と表す。結果は m の関数であり、極限再帰関数と呼ばれる。γ が p のみの関数であるときには極限値は定数になる。

極限再帰関数を使えば、ガウス関数の列計算可能性は次のように表現される。「任意の計算可能実数列 $\{x_m\}$ に対して関数値の列 $\{[x_m]\}$ は再帰的（２重）有理数列で近似され、その収束率は極限再帰関数で得られる。」この状況を「極限再帰的列計算可能性」と呼んでおく。

再帰関数の極限値をとるというのは便宜上の操作のように見えるが、ゴールドが学習理論のために (Gold, 1965) で導入した概念であり、「極限同定」と表現されている。問題は再帰関数の極限同定を計算として実感できるか、ということだ。

以上によれば、不連続点における関数 $[x]$ の値の計算を連続関数の場合に習って実行すると、それは極限再帰的な計算過程になる。実際 3 節で見たように再帰的ではありえない。しかし論理的な階層としては極限再帰性が再帰性の次に位置するので、これをガウス関数の計算の基礎と考えることは妥当でないとはいえない。

極限再帰性による計算では、人は任意有限の場所での一歩一歩の計算手続きを持っており、極限がある場合には、実際に有限ステップで正解に到達しているが、その事実は認識できない。それでも「計算感」を持てるとすれば、意識の一部が無限遠点に飛んでいる、あ

るいは自分の分身が無限遠点に行っている、という感覚があるからだろう。しかし無限遠点は有限の場所にいる存在にとっては明確には把握できないものであり、一種の想像の世界である。

以上を総合すると、極限再帰性による計算について、「想像力」が計算感の基礎になり得るか、また連続関数の計算方法の単純な拡張が不連続関数の計算の意味を捉えているか、の二点が課題として残る。後者については逆に、連続関数の計算の拡張である、という意味で計算手続きとしては自然なものである、という見方もできる。

すでに述べたように、$R(p_0)$ となる p_0 が存在する場合とそのような数が存在しない場合があり、それぞれで再帰的な近似率が存在する。このケース分けは

$$\exists p R(p) \vee \forall p \neg R(p)$$

と表現される。これは Σ^0_1 排中律である。極限再帰関数の極限同定とこの排中律は（構成的に）同値である。それぞれの場合が $\lim_p N_p = 1$、$\lim_p N_p = 2$ に対応する。したがって極限再帰関数の代わりに Σ^0_1 排中律を基礎にして各場合の中で再帰的な計算をする、と考えてもよいのであるが、ここでは極限同定による場合分けを採用する。

なお、(Yasugi & Washihara, 2003) では (Yasugi et al., 2002) と同様のことをラーデマッハ関数系について検討している。さらに (Yasugi & Tsujii, 2005; Yasugi, Tsujii & Mori, 2005; Yasugi, Mori & Tsujii, 2007) などで区分連続関数（列）、Fine 連続関数（列）、など多くの具体的な極限再帰的列計算可能関数を提示している。極限同定を含む体系 (Nakata & Hayashi, 2002) と計算の実装 (小林, 2007) も考案されている。

4.2. 実効的一様位相

関数を観察する、観察者の立場では、たとえば不連続点を計算とは別途に認識し、実数空間を不連続点によって分割できる。この方法で実数空間にユークリッド位相から誘導される「一様位相」を導入し、関数の連続化ができる。（一様位相とは、距離位相と類似の性質をもつ位相である。一様位相の条件のいくつかが再帰関数によって表現されるとき、実効的一様位相と呼ぶ。）ユークリッド位相における不連続関数の計算可能性問題はこのような関数の定義域の位相の変更によって、連続関数の計算可能性問題に還元可能なのである。すなわち、（ユークリッド不連続）関数の計算可能性を実効的一様位相における連続関数の計算可能性（列計算可能性と実効的連続性）として定義できる (Tsujii, Yasugi & Mori, 2001)。（この場合の列計算可能性を「一様位相的列計算可能性」と呼んでおく。）

一般論を展開する代わりにガウス関数の例で説明しよう。ある整数点 n から次の整数 $n+1$ の間の左閉・右開区間 $[n, n+1)$ を互いに孤立させる（別の空間と考える）ことによって新しい位相を導入できる。すなわち実数体を区間列 $\{[n, n+1)\}$ に分割して、各区間 $[n, n+1)$ の内部ではユークリッド距離による位相を保存するものとする。この位相が「実効的一様

位相」の性質を満たし、その位相に関してはガウス関数は連続（実際には実効的に連続）になる。n における関数の連続性は、$[n, n+1)$ が $x < n$ から孤立しているので $[n, n+1)$ の中でのみ考えればよいからである。また、たとえば数列 $\{-\frac{1}{2^k}\}$ は $[-1, 0)$ の中にあって $[0, 1)$ の中にはないので、0 に収束しない。このような状況のために、3 節の計算可能実数列 $\{x_n\}$ は新位相では計算可能とはならず、したがって反例 $\{[y_n]\}$ はここでは考慮の対象とならない。実際にガウス関数は新位相では列計算可能性も満たすのである。

不連続点を認識しそれを基に位相の変換を行うプロセスあるいは（知的）行為は、計算そのものとは別の行為とみなされる。このプロセスは通常の数学であり、数学者にとって自然なことである。位相の変換後は再帰関数による収束率と連続率さえ求められればよい。その意味で、一様位相による不連続関数の計算可能性問題の扱いは、数学者の思考により近いといえる。

ここで問題になるのは、不連続点を認識することの根拠である。極限概念よりも一見直観的かもしれないが、不連続点の認識は超越的な思考であり、それを自然で直観的である、と思わせるものは何か、を説明できないといけない。これがこの手法の課題である。

最後に一言別だけ比喩的な説明を記しておこう。一様位相による計算問題の扱いにおいて、不連続点の認識は計算機言語の型に相当する。型は計算そのものには組み込まれていない。計算の外で型を決めて、各型の中で計算を行う。計算機上ではデータはすべて有限情報しか持たないが、プログラム言語の型と一様位相とは構造的な類似点をもっている。

4.3 二種の列計算可能性について

極限再帰的列計算可能性と一様位相的列計算可能性とは、概念的には相互に異質なものである。しかしある自然な条件を満たす例では、それらは同値になる (Yasugi, 2007)。たとえばガウス関数のような「区分連続関数」、ファイン位相における「ファイン連続関数」などについては「実効的連続性」の仮定のもとで一様位相的列計算可能性と極限再帰的列計算可能性とは同値である (Yasugi & Tsujii, 2005; Yasugi et al., 2005)。数学的には二種類の列計算可能性が相互に翻訳される。しかしその際に概念的にどのような翻訳が行われているのか、を知るにはなお詳細な分析を必要とする。

極限再帰的列計算可能性は (八杉, 2003) でも述べているように、機械的な力づくの計算方法であり、数学的な直観に訴えるものではないともいえる。他方その単純さと、連続関数の列計算可能性の自然な拡張になっている、という意味で優れている。求める真の値を知るためには極限操作が必要であって、計算過程において現在どこにいるのか不明であることは不安かもしれないが、正しい軌道上にいることは保証されている、という安心感がある。

一様位相的列計算可能性では、4.2 節でも述べたように不連続点の認識という超越的な行為が基礎になる。極限再帰的列計算可能性では不連続点を「認識」しない、あるいはその必要がない。再帰性を超える部分は再帰関数の極限同定であり、それは再帰関数の延長上

にある。極限再帰関数は、いわゆる計算論としては自然なものである。しかし、人間は多くの場合に逆に不連続点こそ容易に認識する。ガウス関数の例では、人はまず整数点を認識し、その点での関数値を計算し、そこから右方向の関数値もそれによって決めることができる。極限再帰性にはこのような自然さはない。

以上のように、不連続関数の列計算可能性に関して、「計算論的な意味での自然な拡張」と「数学者の視点からの自然な拡張」の二手法を検討してきた。数学的にはどちらにも意味があり、状況によってどちらも使い勝手がある。いずれにしても現在までのこの二手法についての考察は、数学的相互関係が主であった。数学者の営みとしての計算可能性問題のためには、人間の認識力についての考察を深めなければならない。

5. 問題点についての考察

不連続関数の「列計算」を人の認識行為とみなすとき、そこには二重構造がある。その二重構造を、階層としてではなく、ひとつのシステムとみたてることを試みるのが一方法かもしれない。

プログラム言語において、4.2 節のように型は計算部分とは別の機能をもつが、実際に作成するプログラムでは両者は共存して、計算プログラムという一つのシステムを構成している。一様位相化とその中での計算、再帰関数による計算と極限同定、においても同様の考え方ができないだろうか。

たとえば、再帰関数による計算とその拡張である極限同定を一つの計算プロセスとして組み立ててしまうことは不可能ではないだろう。あるいは、一様位相の決定（不連続点の認識）とその中での再帰的な計算を、プログラムの場合のように、統合された一つの機構として見立てられないだろうか。

以上の考察において、人が先か、数学が先か、ということは問わないが、数学（この場合は二手法による関数の列計算可能性）の哲学的基礎の考察のためには「人間が数学をする」という視点が必要で、「数学における計算についての人間の認識とは何か」ということから出発しなければならない。

たとえば極限同定を「計算」と認知できるか、あるいはそれを直観的に「計算」と思うことができるか、と問うことができる。もしできるとすればその根拠は何か、についての答えは一つではないだろう。ある事象に対する直観というのは決まったものではないはずだ。たとえば | の繰り返し ||| を数 3 とみなすのは、人間どうしのコミュニケーションの手段としてはよいかもしれないが、一般には数に対する直観は | の繰り返しではない。しかし | の繰り返しに慣れ親しめば、それが数としての直観になるかもしれない。「直観的」はそれ自体独立した認識方法であろうが、その内容は決まったものではない。

以上不連続関数の列計算可能性についての問題点を指摘してきた。問題に対する答えは一通りではないであろうし、部分的に考察が進めば、問自体が変わるかもしれない。柔軟

な思考で答えを探していきたい。

文献

Gold, E.M. (1965). 'Limiting recursion,' *Journal of Symbolic Logic*, *30*, *1*, 28–48.

小林聡「極限計算可能数学のゲーム意味論」. 日本ソフトウェア科学会第 24 回大会論文集, CD-ROM, 2007 年.

Nakata, M. & Hayashi, S. (2002). 'A limiting first order relizability interpretation,' *Scientiae Mathematicae Japonicae*, *55*, *3*, 567–589.

Odifreddi, P. (1999). *Classical recursion theory*, Amsterdam: Elsevier.

Pour-El, M.B. & Richards, J.I. (1989). *Computability in Analysis and Physics*, Berlin: Springer-Verlag.

Tsujii, Y., Yasugi, M., & Mori, T. (2001). 'Some properties of the effectively uniform topological space,' *Lecture Notes in Computer Science*, *2064*, 336-356.

Yasugi, M. & Tsujii, Y. (2005). 'Computability of a function with jumps-Effective uniformity and limiting recursion-,' *Topology and its Applications*, *146-147*, 563–582.

Yasugi, M. & Washihara, M. (2000). 'Computability structures in analysis,' *Sugaku Expositions, AMS*, *13*, *2*, 215–235.

——— (2003). 'A note on Rademacher functions and computability,' in *Words, Languages and Combinatorics III*, 466–475.

八杉満利子 (2003). 「不連続関数の極限計算可能性—意義と問題点—」,『科学基礎論研究』, 第 30 巻, 第 2 号, 13–18 頁.

Yasugi, M. (2007). 'Effective uniformity versus limiting recursion in sequential computability of a function.' Manuscript.

Yasugi, M., Brattka, V., & Washihara, M. (2002). 'Computability aspects of some discontinuous functions,' *Scientiae Mathematicae Japonicae*, *55*, *3*, 427–441.

Yasugi, M., Tsujii, Y., & Mori, M. (2005). 'Sequential computability of a function —Effective Fine space and limiting recursion—,' *Journal of Universal Computer Science*, *11-12*, 2179–2191.

Yasugi, M., Mori, T., & Tsujii, Y. (2007). 'The effective sequence of uniformities and its limit: as a methodology in computable analysis,' *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, *15*, *2*, 99–121.

〔京都大学大学院博士課程・哲学〕