ベイジアンネットワーク、共通原因、そして因果的マルコフ条件

北島雄一郎

1. はじめに

次のような仮想的な状況を考えてみよう。ある建物では十年間のうち一日の割合、つまり 1/3650 の確率で火災が発生する。火災が発生したとき火災警報器が作動する確率は 95 %で、火災が発生していないとき火災警報器が作動する確率は 1 %とする。また、火災警報器が作動したとき太郎の部屋でサイレンが鳴り響く確率は 99 %で、火災警報器が作動していないとき太郎の部屋でサイレンが鳴り響く確率は 0.1 %とする。この火災警報器とサイレンはそれなりの精度で火災を知らせているようにみえる。あるとき、太郎の部屋でサイレンが鳴り響いた。このとき、火災が発生している確率はいくらだろうか？

火災が発生するという事象を A、火災警報器が作動するという事象を B、太郎の部屋でサイレンが鳴り響くという事象を C とすると、この問題は $P(A) = 1/3650$、$P(B \mid A) = 0.95$、$P(B \mid \neg A) = 0.01$、$P(C \mid B) = 0.99$、$P(C \mid \neg B) = 0.001$ という条件の下で[1]、$P(A \mid C)$ はいくらかという問題である。C の原因は B のみであり、B の原因は A のみであるとき、

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

$P(A' \wedge B' \wedge C') = P(A')P(B' \mid A')P(C' \mid B')$（$A'$ は A もしくは $\neg A$、B' は B もしくは $\neg B$、C' は C もしくは $\neg C$ を表しているものとする）という条件が成り立つと仮定しても妥当であるように思える。そしてこの仮定のもと、$P(A \mid C)$ の値はおおよそ 0.023 となる[2]。一見、この火災警報器とサイレンはそれなりの精度で火災を知らせているようにみえるが、実際にサイレンが鳴ったとき火災が起こっている確率は 2.3 %程度である。

上の例では三つの事象のみの単純な場合を考えた。ベイジアンネットワーク[3] の手法を用いると、より複雑な因果関係の場合でも、ある事象が生じたときその事象の原因が実際に生じていた確率（今の場合であれば、太郎の部屋でサイレンがなったとき、火災が実際に起こっていた確率）を推論することができる。その際、上の例で仮定した条件に対応する因果的マルコフ条件とよばれる条件（定義 12）を課する[4]。

Hausman & Woodward (1999) は、ベイジアンネットワークにおける因果的マルコフ条件は正当化されるかという問題を考えた。そして、二つの事象 A と B が確率的に相関しているならば、「A は B の原因である」もしくは「A は B の結果である」もしくは「A と B は共通の原因をもつ」という条件を前提したら因果的マルコフ条件は正当化されると主張した。この共通原因に関する要請を CM1 とよぼう（正確な定義は定義 14 で述べる）。彼らの論証は次のような構造をもつ (Hausman & Woodward, 1999, sec. 5)。

1. CM1 を仮定すると、因果の介入（intervention）理論、特にモジュラリティ（modularity）

とよばれる仮定をおくことによって、CM2 とよばれる条件（定義 15 で正確な定義を述べる）が導かれる[5]。

2. CM1 かつ CM2 から CM とよばれる条件（定義 13 で正確な定義を述べる）が導かれる（命題 18 でその導出を述べる）。

3. CM と因果的マルコフ条件を同一視する[6]。

4. 因果的マルコフ条件が正当化される。

Steel (2006) は、3 は成立するとは限らないということを反例を構成することによって指摘した。したがって、1 の議論が正しいとしても、因果的マルコフ条件は正当化されない。本稿では、因果的マルコフ条件と CM1 や CM2 など因果的マルコフ条件に関連する定義の論理的関係を整理する（命題 18 と定理 19 と (5)）。そして、CM1 が妥当であると仮定したとき、さらにどのような条件が正当化されれば、因果的マルコフ条件が正当化されるのかを考えたい（定理 21 と (7)）。

2. ベイジアンネットワークに関わる定義

この節では、ベイジアンネットワークを定義するために必要な定義を Neapolitan (2004) を参考にしながら述べる。ただし、定義の仕方や表記は多少変更した。

定義 1 (確率). Ω を空でない有限集合、P を以下の条件をみたす Ω のすべての部分集合からなる集合から $[0,1]$ への写像とする。

1. $P(\Omega) = 1$

2. 任意の互いに排反な Ω の部分集合 A と B に対して $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ となる。

P を Ω 上の確率（*probability*）という。

定義 2 (確率変数). P を有限集合 Ω 上の確率、$v^1, \ldots, v^n$ をある有限集合の要素とする。Ω から $\{v^1, v^2, \ldots, v^n\}$ への以下の条件をみたす写像 V を Ω 上の確率変数（*random variable*）、$\{v^1, v^2, \ldots, v^n\}$ の要素を確率変数 V の値とよぶ。

1. 任意の V の値 v^s と v^t に対して、$v^s = v^t$ であることと $V^{-1}(v^s) = V^{-1}(v^t)$ であることは同値である。

2. $V^{-1}(v^1) \cup \cdots \cup V^{-1}(v^n) = \Omega$

v が確率変数 V の値であるとき、$v@V$ とかくことにする。

定義 3. P を有限集合 Ω 上の確率、$V_1, \ldots, V_n$ を Ω 上の確率変数、$\mathbb{V}$ を $\{V_1, \ldots, V_n\}$ とする。$\{(v_1, \ldots, v_n) | v_1 @ V_1, \ldots, v_n @ V_n\}$ の要素を $\mathbb{V}$ の値とよぶ。v が $\mathbb{V}$ の値であるとき、$v@\mathbb{V}$ とかく。$v = (v_1, \ldots, v_n)$ であるとき、$\mathbb{V}^{-1}(v)$ は $V_1^{-1}(v_1) \cap \cdots \cap V_n^{-1}(v_n)$ として与えられる。

定義 4 (独立)**.** P を有限集合 Ω 上の確率、$\mathbb{S}$ と $\mathbb{T}$ を Ω 上の確率変数の集合とする。$\mathbb{S}$ の任意の値 s と $\mathbb{T}$ の任意の値 t に対して、

$$P(\mathbb{S}^{-1}(s) \cap \mathbb{T}^{-1}(t)) = P(\mathbb{S}^{-1}(s))P(\mathbb{T}^{-1}(t))$$

となるとき、$\mathbb{S}$ と $\mathbb{T}$ は独立である（*independent*）といい、$I_P(\mathbb{S}, \mathbb{T})$ とかく。

P を有限集合 Ω 上の確率、S と T を Ω 上の確率変数とする。S の任意の値 s と T の任意の値 t に対して、$P(S^{-1}(s)) \neq 0$ であるとき $P(S^{-1}(s) \cap T^{-1}(t))/P(S^{-1}(s))$ を $P(T^{-1}(t) \mid S^{-1}(s))$ とかく。

定義 5 (条件付独立)**.** P を有限集合 Ω 上の確率、$\mathbb{S}$、$\mathbb{T}$、$\mathbb{U}$ を Ω 上の確率変数の集合とする。任意の $s@\mathbb{S}$、$t@\mathbb{T}$、$u@\mathbb{U}$ に対して、$P(\mathbb{U}^{-1}(u)) \neq 0$ ならば、

$$P(\mathbb{S}^{-1}(s) \cap \mathbb{T}^{-1}(t) \mid \mathbb{U}^{-1}(u)) = P(\mathbb{S}^{-1}(s) \mid \mathbb{U}^{-1}(u))P(\mathbb{T}^{-1}(t) \mid \mathbb{U}^{-1}(u))$$

となるとき、$\mathbb{S}$ と $\mathbb{T}$ は $\mathbb{U}$ のもとで条件付独立である（*conditinally independent*）といい、$I_P(\mathbb{S}, \mathbb{T} \mid \mathbb{U})$ とかく。ただし、$\mathbb{U}$ が空集合のときは $I_P(\mathbb{S}, \mathbb{T} \mid \mathbb{U})$ は $I_P(\mathbb{S}, \mathbb{T})$ を表すとする。

後で用いる確率変数の性質をまとめておく。

命題 6. P を有限集合 Ω 上の確率、$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ を Ω 上の空でない確率変数の集合とする。このとき、以下の事実が成立する。

1. $\mathbb{D}$ を $\mathbb{B}$ の部分集合とする。このとき、$I_P(\mathbb{A}, \mathbb{B} \mid \mathbb{C})$ ならば $I_P(\mathbb{A}, \mathbb{D} \mid \mathbb{C})$ である。
2. $\mathbb{D}$ を $\mathbb{B}$ の部分集合とする。このとき、$I_P(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ ならば $I_P(\mathbb{A}, \mathbb{D})$ である。
3. $I_P(\mathbb{A}, \mathbb{B} \cup \mathbb{D} \mid \mathbb{C})$ ならば $I_P(\mathbb{A}, \mathbb{B} \mid \mathbb{C} \cup \mathbb{D})$ である。
4. $I_P(\mathbb{A}, \mathbb{B} \mid \mathbb{C})$ かつ $I_P(\mathbb{B}, \mathbb{C})$ ならば $I_P(\mathbb{A} \cup \mathbb{C}, \mathbb{B})$ である。

証明. 1. $\mathbb{D}' := \mathbb{B} \backslash \mathbb{D}$ とおく。$a@\mathbb{A}$、$d@\mathbb{D}$、$c@\mathbb{C}$ を任意の値とする。条件より、$P(\mathbb{C}^{-1}(c)) \neq 0$ のとき、任意の $d'@\mathbb{D}'$ に対して

$$\begin{aligned} &P(\mathbb{A}^{-1}(a) \mid \mathbb{C}^{-1}(c))P(\mathbb{D}^{-1}(d) \cap \mathbb{D}'^{-1}(d') \mid \mathbb{C}^{-1}(c)) \\ &= P(\mathbb{A}^{-1}(a) \cap \mathbb{D}^{-1}(d) \cap \mathbb{D}'^{-1}(d') \mid \mathbb{C}^{-1}(c)) \end{aligned} \tag{1}$$

となる。よって、

$$
\begin{aligned}
&P(\mathbb{A}^{-1}(a) \mid \mathbb{C}^{-1}(c))P(\mathbb{D}^{-1}(d) \mid \mathbb{C}^{-1}(c)) \\
&= P(\mathbb{A}^{-1}(a) \mid \mathbb{C}^{-1}(c))P\left(\mathbb{D}^{-1}(d) \cap \left(\bigcup_{d'@\mathbb{D}'} \mathbb{D}'^{-1}(d')\right) \mid \mathbb{C}^{-1}(c)\right) \\
&= \sum_{d'@\mathbb{D}'} P(\mathbb{A}^{-1}(a) \mid \mathbb{C}^{-1}(c))P\left(\mathbb{D}^{-1}(d) \cap \mathbb{D}'^{-1}(d') \mid \mathbb{C}^{-1}(c)\right) \\
&= \sum_{d'@\mathbb{D}'} P(\mathbb{A}^{-1}(a) \cap \mathbb{D}^{-1}(d) \cap \mathbb{D}'^{-1}(d') \mid \mathbb{C}^{-1}(c)) \quad (\because (1)\text{ 式}) \\
&= P(\mathbb{A}^{-1}(a) \cap \mathbb{D}^{-1}(d) \mid \mathbb{C}^{-1}(c))
\end{aligned}
$$

となる。

2. 1. と同様に証明できる。

3. $a@\mathbb{A}$、$b@\mathbb{B}$、$c@\mathbb{C}$、$d@\mathbb{D}$ を任意の値とする。$P(\mathbb{B}^{-1} \cap \mathbb{D}^{-1}(d) \cap \mathbb{C}^{-1}(c)) = 0$ であるとき、$P(\mathbb{C}^{-1}(c) \cap \mathbb{D}^{-1}(d)) \neq 0$ ならば $P(\mathbb{A}^{-1}(a) \mid \mathbb{C}^{-1}(c) \cap \mathbb{D}^{-1}(d))P(\mathbb{B}^{-1}(b) \mid \mathbb{C}^{-1}(c) \cap \mathbb{D}^{-1}(d)) = 0 = P(\mathbb{A}^{-1}(a) \cap \mathbb{B}^{-1}(b) \mid \mathbb{C}^{-1}(c) \cap \mathbb{D}^{-1}(d))$ となる。

   $P(\mathbb{B}^{-1} \cap \mathbb{D}^{-1}(d) \cap \mathbb{C}^{-1}(c)) \neq 0$ ならば、仮定より、$P(\mathbb{A}^{-1}(a) \mid \mathbb{C}^{-1}(c)) = P(\mathbb{A}^{-1}(a) \mid \mathbb{B}^{-1}(b) \cap \mathbb{D}^{-1}(d) \cap \mathbb{C}^{-1}(c))$ となる。1. より $I_P(\mathbb{A}, \mathbb{D} \mid \mathbb{C})$ だから、$P(\mathbb{A}^{-1}(a) \mid \mathbb{C}^{-1}(c)) = P(\mathbb{A}^{-1}(a) \mid \mathbb{D}^{-1}(d) \cap \mathbb{C}^{-1}(c))$ となる。よって、$P(\mathbb{A}^{-1}(a) \mid \mathbb{D}^{-1}(d) \cap \mathbb{C}^{-1}(c)) = P(\mathbb{A}^{-1}(a) \mid \mathbb{B}^{-1}(b) \cap \mathbb{D}^{-1}(d) \cap \mathbb{C}^{-1}(c))$ となるから、$I_P(\mathbb{A}, \mathbb{B} \mid \mathbb{C} \cup \mathbb{D})$ である。

4. $a@\mathbb{A}$、$b@\mathbb{B}$、$c@\mathbb{C}$ を任意の値とする。$P(\mathbb{C}^{-1}(c) \cap \mathbb{A}^{-1}(a)) = 0$ ならば、$P(\mathbb{A}^{-1}(a) \cap \mathbb{C}^{-1}(c))P(\mathbb{B}^{-1}(b)) = 0 = P(\mathbb{A}^{-1}(a) \cap \mathbb{C}^{-1}(c) \cap \mathbb{B}^{-1}(b))$ となる。

   $P(\mathbb{C}^{-1}(c) \cap \mathbb{A}^{-1}(a)) \neq 0$ とする。条件より、$P(\mathbb{B}^{-1}(b) \mid \mathbb{C}^{-1}(c) \cap \mathbb{A}^{-1}(a)) = P(\mathbb{B}^{-1}(b) \mid \mathbb{C}^{-1}(c))$、$P(\mathbb{B}^{-1} \mid \mathbb{C}^{-1}(c)) = P(\mathbb{B}^{-1}(b))$ である。よって、$P(\mathbb{B}^{-1}(b) \mid \mathbb{C}^{-1}(c) \cap \mathbb{A}^{-1}(a)) = P(\mathbb{B}^{-1}(b))$ となるので、$I_P(\mathbb{A} \cup \mathbb{C}, \mathbb{B})$ である。

□

定義 7 (親と子)**.** $\mathbb{V}$ を有限集合、$\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ の部分集合を $\mathbf{E}$ とする。グラフ $\mathbb{G}$ とは $\mathbb{V}$ と $\mathbf{E}$ からなり、$\mathbb{V}$ の要素をノード（*node*）、$\mathbf{E}$ の要素をエッジ（*edge*）という。

$(V, V') \in \mathbf{E}$ のとき $V \to V'$ とかき、V を V' の親（*parent*）、V' を V の子（*child*）とよぶ。また、V と V' は隣接している（*adjacent*）という。

$V \to V'$ であれば、V は V' の直接の原因、V' は V の直接の結果と解釈される。

定義 8 (先祖)**.** ノードの集合 $\mathbb{V}$ とエッジの集合 $\mathbf{E}$ からなるグラフを考える。V を $\mathbb{V}$ の要素とする。V の先祖（*ancestor*）は以下のように帰納的に定義される。

- V の親は V の先祖である。
- V' が V の先祖であるならば、V' の親も V の先祖である。

定義 9 (子孫). ノードの集合 $\mathbb{V}$ とエッジの集合 $\mathbf{E}$ からなるグラフを考える。V を $\mathbb{V}$ の要素とする。V の子孫（*decendent*）は以下のように帰納的に定義される。

- V の子は V の子孫である。
- V' が V の子孫であるならば、V' の子も V の子孫である。

V' が V' の先祖であり、かつ V' は V の親でないとき、V' は V の間接的な原因と解釈される。V' が V の子孫であり、かつ V' は V の子でないとき、V' は V の間接的な結果と解釈される。

定義 10 (経路). ノードの集合 $\mathbb{V}$ とエッジの集合 $\mathbf{E}$ からなるグラフを考える。ノードとノードを結ぶ経路（*path*）は $\mathbb{V}$ の部分集合と $\mathbf{E}$ の部分集合からなる集合で、以下のように帰納的に定義される。

- ノード V と V' が隣接しているならば、「V と V' を結ぶ一つのエッジ」と V と V' からなる集合は V と V' を結ぶ経路である。
- V と V' を結ぶ経路があり、かつ V と V' を結ぶ経路に属さない V' に隣接するノード V'' が存在するならば、「V' と V'' を結ぶ一つのエッジ」と V'' と「V と V' を結ぶ経路」からなる集合は V と V'' を結ぶ経路である。

例えば、あるノードとその子孫を結ぶ経路は存在するし、あるノードとその先祖を結ぶ経路も存在する。

定義 11 (DAG). ノードの集合 $\mathbb{V}$ とエッジの集合 $\mathbf{E}$ からなるグラフを考える。$\mathbb{V}$ の要素 V と V' が存在して、V が V' の子孫であり、かつ、先祖であるようなグラフを巡回的（*cyclic*）という。巡回的でないグラフを非巡回的（*acyclic*）という。非巡回的なグラフを *DAG*（*directed acyclic graph*）とよぶ。

以下、P を有限集合 Ω 上の確率とし、Ω 上の確率変数をノードとする DAG と P の組を $(\mathbb{G}, P)$ と表すことにする。ただし、ノードの数は有限とする。$\mathbb{G}$ におけるノード A の親すべてからなる集合を $\mathrm{Parents}(A)$ とよぶ。$\mathbb{G}$ のノード全体の集合からノード A と A の子孫を取り除いた集合を $\mathrm{ND}(A)$ と表す。

また、ノード A と B を結ぶ経路に属するノード X, Y, Z が存在して Y は X の子であり、かつ Z の子でもあるとき、

$$X \to Y \leftarrow Z$$

Y において矢印の頭と頭が出会っているので、ノード A と B を結ぶ経路に頭頭（head-to-head）ノードがあるとよぶことにする。

3. 因果的マルコフ条件

定義 12 (CMC). $(\mathbb{G}, P)$ は、任意のノード A に対して、$ND(A)$ が空でないならば $I_P(\{A\}, ND(A) \mid Parents(A))$ となるとき、*CMC* をみたすという。

この条件は因果的マルコフ条件と呼ばれ、これをみたす $(\mathbb{G}, P)$ がベイジアンネットワークとよばれる (Neapolitan, 2004, p. 45)。Hausman & Woodward (1999) は以下の条件を定義 12 と同一視した。しかし、Steel (2006) が指摘したように、その同一視は正しくない（反例 20）。

定義 13 (CM). $(\mathbb{G}, P)$ は、任意のノード A に対して、$ND(A)$ が空でないならば、任意の $B \in ND(A)$ に対して $I_P(\{A\}, \{B\} \mid Parents(A))$ となるとき、*CM* をみたすという。

次の定義は Hausman & Woodward (1999) が因果的マルコフ条件を正当化する議論を展開する際に仮定した条件で、非常に重要である。この定義は、確率変数 A と B が相関しているならば、A と B は因果関係にあるか、もしくは A と B の共通原因があるということを述べている。

定義 14 (CM1). $(\mathbb{G}, P)$ は、任意の相異なるノード A と B に対して、$I_P(\{A\}, \{B\})$ でないならば、「A は B の祖先である」もしくは「B は A の祖先である」もしくは「A と B の共通の祖先が存在する」とき、*CM1* をみたすという。

$(\mathbb{G}, P)$ が CM1 に加えて以下の条件も満足すれば、$(\mathbb{G}, P)$ は CM を満足する（命題 18）。

定義 15 (CM2). $(\mathbb{G}, P)$ は、任意のノード A に対して、$ND(A)$ と $Parents(A)$ が空でないならば、任意の $B \in ND(A)$ に対して $I_P(\{A\}, \{B\} \mid Parents(A))$ となるとき、*CM2* をみたすという。

1 節で述べたように、Hausman & Woodward (1999) は CM1 を仮定した上でモジュラリティなどの条件のもとで CM2 は正当化されると考えた。

Hausman & Woodward (1999) は以下の定義で述べる CMC1 と CMC2 という条件を扱っていないが、CMC、CM、CM1、CM2 の論理的関係を整理するために本稿ではこれらの条件を導入する。

定義 16 (CMC1). $(\mathbb{G}, P)$ は、任意の互いに排反なノードの集合 $\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ に対して、$I_P(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ でないならば、あるノード $A \in \mathbb{A}$ と $B \in \mathbb{B}$ が存在して、「A は B の祖先である」もしくは「B は A の祖先である」もしくは「A と B の共通の祖先が存在する」とき、*CMC1* をみたすという。

定義 17 (CMC2)**.** $(\mathbb{G}, P)$ は、任意のノード A に対して、$ND(A)$ と $Parents(A)$ が空でないならば、 $I_P(\{A\}, ND(A) \mid Parents(A))$ となるとき、$CMC2$ をみたすという。

以下の性質は容易に示すことができる。

命題 18.

1. $(\mathbb{G}, P)$ が *CMC1* を満足すれば、$(\mathbb{G}, P)$ は *CM1* を満足する。
2. $(\mathbb{G}, P)$ が *CMC2* を満足すれば、$(\mathbb{G}, P)$ は *CM2* を満足する。
3. $(\mathbb{G}, P)$ が *CM1* かつ *CM2* を満足すれば、$(\mathbb{G}, P)$ は *CM* を満足する。

証明.

1. 定義より明らか。
2. 命題 6 の 1. より成り立つ。
3. $(\mathbb{G}, P)$ が CM1 かつ CM2 をみたすとする。A を $(\mathbb{G}, P)$ を任意のノード、B を ND(A) に属する任意のノードとする。Parents(A) が空集合でないならば、CM2 より $I_P(\{A\}, \{B\} \mid \mathrm{Parents}(A))$ となる。Parents(A) が空集合ならば、「A は B の祖先でない」かつ「B は A の祖先でない」かつ「A と B は共通の祖先をもたない」。よって、CM1 より $I_P(\{A\}, \{B\})$ となる。

□

次の定理は d 分離（d-separation）という考え方とその性質を用いれば、簡単に示すことができる[7] が、ここでは d 分離を用いない証明を与える。

定理 19. 以下の条件は同値である。

1. $(\mathbb{G}, P)$ は *CMC* をみたす。
2. $(\mathbb{G}, P)$ は *CMC1* かつ *CMC2* をみたす。

証明. 1 $\Longrightarrow$ 2 $(\mathbb{G}, P)$ が CMC をみたすならば CMC2 をみたすということは自明なので、$(\mathbb{G}, P)$ が CMC をみたすならば CMC1 をみたすということを示す。そのために、$(\mathbb{G}, P)$ が CMC をみたすとき、任意の排反なノードの集合 $\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ と任意のノード $A \in \mathbb{A}$ と $B \in \mathbb{B}$ に対して、A と B を結ぶ任意の経路において頭頭ノードが存在するならば、$I_P(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ であることを帰納法を用いて示す。

$(\mathbb{G}, P)$ のノードの数が 1 であるときは自明。

CMC をみたす $(\mathbb{G}, P)$ のノードの数が $k-1$ のとき（k は 2 以上の自然数）、任意の互いに排反なノードの集合 $\mathbb{X}$ と $\mathbb{Y}$ と任意のノード $X \in \mathbb{X}$ と $Y \in \mathbb{Y}$ に対して X と Y を結ぶ任意の経路において頭頭ノードが存在するならば $I_P(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ であると仮定する。

CMC をみたすノードの数が k であるような $(\mathbb{G}, P)$ を考える。$\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ を互いに排反なノードの集合とし、任意のノード $A \in \mathbb{A}$ と $B \in \mathbb{B}$ に対して、A と B を結ぶ任意の経路において頭頭ノードが存在するとしよう。このとき、$I_P(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ となることを示せばよい。

ノードの数は有限なので、子孫をもたないノードが少なくとも一つは存在する。このノードを D とする。$(\mathbb{G}, P)$ から D と「D と D の親を結ぶエッジ」を取り除いたグラフを $(\mathbb{G}', P)$ とかく。$(\mathbb{G}', P)$ に属する任意のノード Q を考える。このノードは $(\mathbb{G}, P)$ に属するから CMC より、$I_P(\{Q\}, \mathrm{ND}(Q) \mid \mathrm{Parents}(Q))$ である。ただし、$\mathrm{ND}(Q)$ と $\mathrm{Parents}(Q)$ は $(\mathbb{G}, P)$ において定義されている。$(\mathbb{G}', P)$ における Q の親の集合 $\mathrm{Parent}'(Q)$ は $\mathrm{Parents}(Q)$ と一致し、$(\mathbb{G}', P)$ に属するすべてのノードからなる集合から Q と $(\mathbb{G}', P)$ における Q の子孫を取り除いた集合 $\mathrm{ND}'(Q)$ は $\mathrm{ND}(Q)$ の部分集合であるから、命題 6 より $I_P(\{Q\}, \mathrm{ND}'(Q) \mid \mathrm{Parents}'(Q))$ となる。よって、$(\mathbb{G}', P)$ も CMC をみたす。

D は $\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ のいずれにも属さないとする。$(\mathbb{G}, P)$ に属する任意のノード $A \in \mathbb{A}$ と $B \in \mathbb{B}$ を考える。$(\mathbb{G}, P)$ において、A と B を結ぶ任意の経路において頭頭ノードが存在するとする。D は子孫を持たないので、$(\mathbb{G}', P)$ においても A と B を結ぶ任意の経路において頭頭ノードが存在する。帰納法の仮定より $I_P(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ となる。

D は $\mathbb{A}$ に属するとする。$\mathbb{A}' := \mathbb{A} \backslash \{D\}$ とおく。$\mathbb{C}' := \mathbb{A}' \backslash \mathrm{Parents}(D)$、$\mathbb{C}'' := \mathrm{Parents}(D) \backslash \mathbb{A}'$ とおくと

$$\{D\} \cup \mathrm{Parents}(D) \cup \mathbb{C}' = \mathbb{A} \cup \mathbb{C}'' \tag{2}$$

となる。D は子孫を持たないので、$\mathbb{B}$ も $\mathbb{C}'$ も $\mathrm{ND}(D)$ に属する。CMC と命題 6 より $I_P(\{D\}, \mathbb{B} \cup \mathbb{C}' \mid \mathrm{Parents}(D))$ となる。命題 6 より、

$$I_P(\{D\}, \mathbb{B} \mid \mathrm{Parents}(D) \cup \mathbb{C}') \tag{3}$$

となる。B を $\mathbb{B}$ に属する任意のノードとする。A' を $\mathbb{A}'$ に属する任意のノードとする。$\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ に関する仮定より、$(\mathbb{G}', P)$ において、A' と B を結ぶ任意の経路において頭頭ノードが存在する。C'' を $\mathbb{C}''$ に属する任意のノードとする。$(\mathbb{G}', P)$ において B と C'' を結ぶ頭頭ノードを含まない経路が存在すると仮定すると、$(\mathbb{G}, P)$ において B と D を結ぶ頭頭ノードを含まない経路が存在することになる。$B \in \mathbb{B}$ かつ $D \in \mathbb{A}$ なので、これは仮定と矛盾。よって、B と C'' を結ぶ経路が存在するならば、その経路はすべて頭頭ノードを含む。よって、$\mathbb{A}' \cup \mathbb{C}''$ に属する任意のノードと $\mathbb{B}$ に属する任意のノードに対して、それらを結ぶ経路が存在するならば、その経路は頭頭ノードを必ず含む。$\mathbb{A}' \cup \mathbb{C}'' = \mathrm{Parents}(D) \cup \mathbb{C}'$ だから帰納法の仮定より、

$$I_P(\mathrm{Parents}(D) \cup \mathbb{C}', \mathbb{B}) \tag{4}$$

となる。(3) 式と (4) 式と命題 6 より $I_P(\{D\} \cup \mathrm{Parents}(D) \cup \mathbb{C}', \mathbb{B})$ となる。(2) 式より、$I_P(\mathbb{A} \cup \mathbb{C}'', \mathbb{B})$ となる。命題 6 より、$I_P(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ となる。

D が B に属するときも、4. と同様に示すことができる。

$2 \Longrightarrow 1$ $(\mathbb{G}, P)$ は CMC1 と CMC2 をみたすとする。A を $(\mathbb{G}, P)$ に属する任意のノードとする。Parents(A) が空集合でないとすると、CMC2 より $I_P(\{A\}, \mathrm{ND}(A) \mid \mathrm{Parents}(A))$ となる。

Parents(A) が空集合であるとき、ND(A) に属する任意のノード B に対して、「A は B の祖先ではなく」かつ「B は A の祖先でなく」かつ「A と B が共通の祖先をもつことはない」。よって、CMC1 より $I_P(\{A\}, \mathrm{ND}(A))$ となる。

□

命題 18 と定理 19 より以下の論理関係が成立する。

$$\mathrm{CMC} \Longleftrightarrow \mathrm{CMC1} \wedge \mathrm{CMC2} \Longrightarrow \mathrm{CM1} \wedge \mathrm{CMC2} \Longrightarrow \mathrm{CM1} \wedge \mathrm{CM2} \Longrightarrow \mathrm{CM} \qquad (5)$$

しかし、次の反例 (Steel, 2006, pp.221-223) を見れば分かるように、$\mathrm{CMC1} \wedge \mathrm{CMC2} \Longleftarrow \mathrm{CM1} \wedge \mathrm{CMC2}$ は成立するとは限らない。したがって、CM1 を前提して CM2 が成り立つということを論証したとしても、CMC の妥当性は論証できたことにはならない。

反例 20. P を有限集合 Ω 上の確率、A、B、C を Ω 上の確率変数とする。A、B、C をノードとする $(\mathbb{G}, P)$ を考え、A、B、C はすべて隣接するノードを持たないとする。A の値を a^1, a^2、B の値を b^1, b^2、C の値を c^1, c^2 とする。確率は以下のようになっているとする。

$P(A^{-1}(a^1) \cap B^{-1}(b^1) \cap C^{-1}(c^1))$	5/160	$P(A^{-1}(a^2) \cap B^{-1}(b^1) \cap C^{-1}(c^1))$	15/160
$P(A^{-1}(a^1) \cap B^{-1}(b^1) \cap C^{-1}(c^2))$	27/160	$P(A^{-1}(a^2) \cap B^{-1}(b^1) \cap C^{-1}(c^2))$	17/160
$P(A^{-1}(a^1) \cap B^{-1}(b^2) \cap C^{-1}(c^1))$	20/160	$P(A^{-1}(a^2) \cap B^{-1}(b^2) \cap C^{-1}(c^1))$	10/160
$P(A^{-1}(a^1) \cap B^{-1}(b^2) \cap C^{-1}(c^2))$	28/160	$P(A^{-1}(a^2) \cap B^{-1}(b^2) \cap C^{-1}(c^2))$	38/160

このとき、$P(A^{-1}(a^1)) = 5/160 + 27/160 + 20/160 + 28/160 = 1/2$、$P(B^{-1}(b^1)) = 5/160 + 15/160 + 27/160 + 17/160 = 2/5$、$P(C^{-1}(c^1)) = 5/160 + 15/160 + 20/160 + 10/160 = 5/16$ となる。よって、$P(A^{-1}(a^1) \cap B^{-1}(b^1)) = 5/160 + 27/160 = 1/5 = P(A^{-1}(a^1))P(B^{-1}(b^1))$、$P(A^{-1}(a^1) \cap C^{-1}(c^1)) = 5/160 + 20/160 = 5/32 = P(A^{-1}(a^1))P(C^{-1}(c^1))$、$P(B^{-1}(b^1) \cap C^{-1}(c^1)) = 5/160 + 15/160 = 1/8$ となる。また、$P(A^{-1}(a^2) \cap B^{-1}(b^1)) = P(A^{-1}(a^2))P(B^{-1}(b^1))$ なども成立する。よって、この $(\mathbb{G}, P)$ は *CM1* を満足する。また、すべてのノードは親を持たないから、*CMC2* を自明に満足する。

しかし、$P((A^{-1}(a^1) \cap B^{-1}(b^1)) \cap C^{-1}(c^1)) = 5/160 \neq 1/16 = 1/5 \times 5/16 = P(A^{-1}(a^1) \cap B^{-1}(b^1))P(C^{-1}(c^1))$ であるから、*CMC1* は満足しない。

この例では、任意のノードが隣接するノードをもたないという特殊な場合を考えていた。つまり、任意の確率変数が他の確率変数と因果関係がない場合を考えていた。しかし、通常は任意の確率変数に対して、その確率変数と因果関係があるような確率変数が存在する場合を考えるだろう。そこで、次の定理では、任意のノードに対してそのノードに隣接するノードがある場合を考える。

定理 21. $(\mathbb{G}, P)$ の任意のノード V に対してあるノード V' が存在して V' は V に隣接しているとする。このとき、以下の条件は同値である。

1. $(\mathbb{G}, P)$ は *CMC* をみたす。
2. $(\mathbb{G}, P)$ は *CM1* かつ *CMC2* をみたす。

証明. 1 ⇒ 2 は命題 18 と定理 19 より成り立つ。そこで、2 ⇒ 1 を示す。$(\mathbb{G}, P)$ が CM1 かつ CMC2 をみたすとき、$(\mathbb{G}, P)$ の任意の親を持たないノード A に対して、$\mathrm{ND}(A) \neq \emptyset$ ならば $I_P(\{A\}, \mathrm{ND}(A))$ となることを帰納法を用いて示す。

$(\mathbb{G}, P)$ のノードの数が 1 であるときは自明。ノードの数が $k-1$（k は 2 以上の自然数）の CM1 かつ CMC2 を満足する $(\mathbb{G}, P)$ において、任意の親を持たないノード X に対して $I_P(\{X\}, \mathrm{ND}(X))$ と仮定する。

ノードの数が k の CM1 かつ CMC2 を満足する $(\mathbb{G}, P)$ を考える。$(\mathbb{G}, P)$ のノードの数は有限なので子孫を持たないノードが少なくとも一つ存在する。そのノードを D とする。$(\mathbb{G}, P)$ から D と「D とその親を結ぶエッジ」を取り除いたグラフを $(\mathbb{G}', P)$ とする。$(\mathbb{G}', P)$ も CM1 と CMC2 を満足する。

C を $(\mathbb{G}, P)$ における親をもたない任意のノードとする。このとき、C は $(\mathbb{G}', P)$ においても親をもたない。

$D \notin \mathrm{ND}(C)$ とする。このとき、$\mathrm{ND}(C) \neq \emptyset$ ならば $\mathrm{ND}(C)$ は $(\mathbb{G}', P)$ に属するので、帰納法の仮定より $I_P(\{C\}, \mathrm{ND}(C))$ となる。

$D \in \mathrm{ND}(C)$ とする。このとき、$\mathrm{Parents}(D) \not\subseteq \mathrm{ND}(C)$ とすると、あるノード E が存在して $E \in \mathrm{Parents}(D)$ かつ E が C の子孫となるので、D が C の子孫でないことに矛盾する。よって、$\mathrm{Parents}(D) \subseteq \mathrm{ND}(C)$ である。$\mathrm{ND}'(C) := \mathrm{ND}(C) \setminus \{D\}$、$\mathrm{ND}''(C) := \mathrm{ND}'(C) \setminus \mathrm{Parents}(D)$ とおく。仮定より任意のノードに対して隣接するノードが存在し、かつ D は子孫をもたないから、$\mathrm{Parents}(D) \neq \emptyset$ である。また、$\mathrm{Parents}(D) \subseteq \mathrm{ND}'(C)$ だから、$\mathrm{ND}'(C) \neq \emptyset$ である。D が子孫を持たないことから、$\{C\} \cup \mathrm{ND}''(C)$ は $\mathrm{ND}(D)$ の部分集合である。よって、CMC2 と命題 6 より $I_P(\{D\}, \{C\} \cup \mathrm{ND}''(C) \mid \mathrm{Parents}(D))$ である。命題 6 より $I_P(\{D\}, \{C\} \mid \mathrm{Parents}(D) \cup \mathrm{ND}''(C))$、つまり

$$I_P(\{D\}, \{C\} \mid \mathrm{ND}'(C)) \tag{6}$$

となる。一方、帰納法の仮定より $I_P(\{C\}, \mathrm{ND}'(C))$ となる。(6) 式と命題 6 より、$I_P(\{D\} \cup \mathrm{ND}'(C), \{C\})$、つまり $I_P(\mathrm{ND}(C), \{C\})$ となる。

□

命題 18 と定理 19 と定理 21 より、任意のノードに対して隣接するノードが存在する場合は以下の論理関係が成立する。

$$\mathrm{CMC} \Longleftrightarrow \mathrm{CMC1} \wedge \mathrm{CMC2} \Longleftrightarrow \mathrm{CM1} \wedge \mathrm{CMC2} \Longrightarrow \mathrm{CM1} \wedge \mathrm{CM2} \Longrightarrow \mathrm{CM} \tag{7}$$

以下の反例を見ればわかるように、任意のノードに対して隣接するノードが存在するような場合でも $\mathrm{CM1} \wedge \mathrm{CMC2} \Longleftarrow \mathrm{CM1} \wedge \mathrm{CM2}$ が成立するとは限らない。

反例 22. P を有限集合 Ω における確率、A、B、C、D を Ω 上の確率変数とする。A、B、C、D をノードとする $(\mathbb{G}, P)$ を考え、D は A、B、C の親であり、A、B、C は D 以外に隣接するノードを持たないとする。A の値を a^1, a^2、B の値を b^1, b^2、C の値を c^1, c^2、D の値を d^1, d^2 とする。確率は以下のようになっているとする。ただし、$i = 1, 2$ である。

$P(A^{-1}(a^1) \cap B^{-1}(b^1) \cap C^{-1}(c^1) \mid D^{-1}(d^i))$	5/160
$P(A^{-1}(a^1) \cap B^{-1}(b^1) \cap C^{-1}(c^2) \mid D^{-1}(d^i))$	27/160
$P(A^{-1}(a^1) \cap B^{-1}(b^2) \cap C^{-1}(c^1) \mid D^{-1}(d^i))$	20/160
$P(A^{-1}(a^1) \cap B^{-1}(b^2) \cap C^{-1}(c^2) \mid D^{-1}(d^i))$	28/160
$P(A^{-1}(a^2) \cap B^{-1}(b^1) \cap C^{-1}(c^1) \mid D^{-1}(d^i))$	15/160
$P(A^{-1}(a^2) \cap B^{-1}(b^1) \cap C^{-1}(c^2) \mid D^{-1}(d^i))$	17/160
$P(A^{-1}(a^2) \cap B^{-1}(b^2) \cap C^{-1}(c^1) \mid D^{-1}(d^i))$	10/160
$P(A^{-1}(a^2) \cap B^{-1}(b^2) \cap C^{-1}(c^2) \mid D^{-1}(d^i))$	38/160

このとき、反例 *20* と同様の計算から、この $(\mathbb{G}, P)$ は *CM2* を満足することがわかる。また、*CM1* の対偶を考えるとその前件は常に偽であるから、*CM1* を自明に満足する。

しかし、C の親は D であり、$ND(C) = \{A, B\}$ であるが、$P((A^{-1}(a^1) \cap B^{-1}(b^1)) \cap C^{-1}(c^1) \mid D^{-1}(d^1)) = 5/160 \neq 1/16 = 1/5 \times 5/16 = P(A^{-1}(a^1) \cap B^{-1}(b^1) \mid D^{-1}(d^1))P(C^{-1}(c^1) \mid D^{-1}(d^1))$ となるので、*CMC2* は満足しない。

4. おわりに

これまで述べた結果から、「CM1 が妥当であると仮定したとき、さらにどのような条件が正当化されれば、因果的マルコフ条件が正当化されるのか？」という 1 節で提起した問いに対する答えは次のようになる。CM1 と CM2 から因果的マルコフ条件は導かれない（反例 22 と (7)）ので、CM1 が妥当であると仮定したとき、さらに CM2 を正当化しても因果的マルコフ条件は正当化されない。しかし、任意のノードが隣接するノードをもつような

$(\mathbb{G}, P)$ において、「CM1 かつ CMC2」と CMC は同値なので（定理 21）、CM1 が妥当であると仮定したとき、さらに CMC2 を正当化すれば因果的マルコフ条件は正当化される。

註

[1] $P(B \mid A)$ は A のもとでの B の条件付確率をあらわすものとする。

[2] $P(A \mid C) = P(A \wedge C)/P(C) = (1/3650 \times 0.95 \times 0.99 + 1/3650 \times 0.05 \times 0.001)/(1/3650 \times 0.95 \times 0.99 + 1/3650 \times 0.05 \times 0.001 + (1-3650) \times 0.01 \times 0.99 + (1-3650) \times 0.99 \times 0.001) = 0.023121744$ となる。

[3] 定義は定義 12 とその下の部分を参照。

[4] この対応関係については、Neapolitan (2004, Theorem 1.4, Theorem 1.5) を参照。

[5] 因果の介入理論によれば、我々が確率変数 X に介入して確率変数 X の値を変化させたとき確率変数 Y の値が変化したとき、確率変数 X は確率変数 Y の原因である (Hausman & Woodward (1999), p.535)。モジュラリティとは、任意の確率変数 X に対して X に介入したとしても X とは無関係な因果関係は不変であるという要請である (Hausman & Woodward, 1999, p.545)。Cartwright (2007, pp.108-115) は Hausman & Woodward (1999) による因果的マルコフ条件を正当化する議論を批判的に検討している。

[6] Hausman & Woodward (1999) は p.522 で因果的マルコフ条件の正確な定義（本稿での定義 12 にあたる）を述べた後、p.523 でその定義を述べなおして（本稿での定義 13 にあたる）両者を同一の用語でよんでいる。

[7] CMC が CMC1 を含意するということの d 分離を用いた証明は次の通り。$(\mathbb{G}, P)$ が CMC をみたすとき、任意の排反なノードの集合 $\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ と任意のノード $A \in \mathbb{A}$ と $B \in \mathbb{B}$ に対して、「A と B を結ぶ任意の経路において頭頭ノードが存在する」もしくは「A と B を結ぶ経路が存在しない」とする。このとき、$\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ は空集合によって d 分離されている。Neapolitan (2004, Lemma 2.1) より、$I_P(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ である (cf. Williamson, 2005, Proposition 4.1)。

文献

Cartwright, N. (2007). *Hunting Causes and Using Them: Approaches in Philosophy and Economics*: Cambridge University Press.

Hausman, D.M & Woodward, J. (1999). ‘Independence, Invariance and the Causal Markov Condition,’ *The British Journal for the Philosophy of Science*, *50*, *4*, 521–583.

Neapolitan, R.E. (2004). *Learning Bayesian Networks*: Pearson Prentice Hall.

Steel, D. (2006). ‘Comment on Hausman and Woodward on the Causal Markov Condition,’ *The British Journal for the Philosophy of Science*, *57*, *1*, 219–231.

Williamson, J. (2005). *Bayesian Nets and Causality: Philosophical and Computational Foundations*: Oxford University Press.

〔京都大学大学院 PD・哲学／日本学術振興会特別研究員〕