哲学者のためのベイジアンネットワーク入門

大塚淳

1. 因果と確率をめぐる問題

確率と因果の関係は、ヒューム以来、哲学における躓きの石の一つとなってきた。因果関係と確率的相関は、分かちがたく結びついているように見える一方、その関係性が正確なところどのようなものなのかについて、未だ一致した見解はない。因果は確率的関係の一種に過ぎないのだろうか？それとも、因果には確率に回収されない何かがあるのだろうか？あるいは、そもそも両者の間の関係は本質的なものなのだろうか？

こうした問題は、単に哲学者の興味を引くだけではない。観測されたデータから、いかにして因果言明を導き出すかということは、統計学とそれを用いる諸科学分野における一大関心事である。観察から得られる統計的データは、いわば世界の因果的構造によって（時にゆがんで）映し出される「影」に過ぎない (Shipley, 2000, sec. 1.1)。科学者は、この影から、そのもとにある因果的構造をできるだけ正確に推論していかねばならない。図 1 は、科学者が直面するこの状況を示している。こう表すと、上述の目的は、「統計的データ」と「因果モデル」の間を行き来するための「橋」を架けることになぞらえることができよう。この架橋作業には、以下の三つの問題が含まれる：

（1）どのような仕方で因果モデルを立てればよいか？

（2）どのようなデータ・統計量が必要か？

（3）得られた統計的データと因果モデルの間の関係はどのようなものか？

本サーベイでは、この因果と確率との間の橋渡しとして近年有力視されている、ベイジアンネットワーク（以下ベイズネット）を用いた因果推論の手法 (cf. Pearl, 1988, 2000, Spirtes, Glymour and Scheines, 2000(初版は 1993)) を紹介したい。まず第二章でベイズネットの手法を概観し、続く第三章でその基にある一定の形而上学的想定をめぐる議論に光を当てることにする。

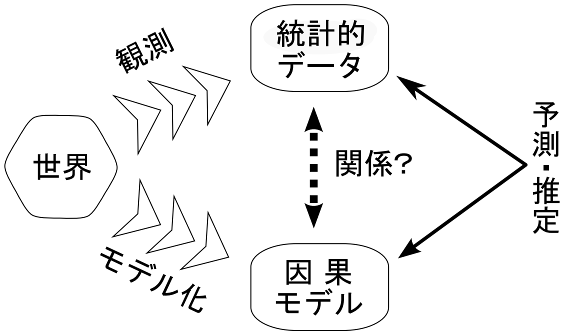

図 1: データと因果モデルの関係

ベイズネットは、確率論とグラフ理論に基づく公理的体系である。しかしその紹介を旨とする本稿では、各命題の証明には一切立ち入らない。また、用語の定義も、直観的な分かりやすさを重視し、あえて厳密には行っていない。これらの点に興味を持った読者は、適宜参考文献を参照するか、特に定義に関しては、本号に収録された北島氏の論文 (北島, 2008)

も合わせて参照されたい。

2. ベイジアンネットワークによる因果分析

統計的データと因果モデルを合わせて考えることの動機にはさまざまなものがあるが、ここでは次の二つの場面を考える。第一は、原因・結果の予測である。これは、一定の因果モデルを所与として、そのうちの特定要素の観測結果から、観測されていない要素の状態を予測するものである。第二には、因果的構造が未知であるような状況で、得られた統計的データのみから、そのデータの背後にある因果的構造を推定するようなケースである。以下では、このような課題に対して、ベイズネットがどのように答えるのか、そしてその際にどのような前提が立てられるのかを見ていきたい。

2.1 原因／結果の確率を予測する

ある病院に検査医として勤務することになったと想像してほしい。あなたの病院に設置されている肺ガン検査機器は、一定の精度で被験者が実際に肺ガンを患っているかどうかを検出できる。ここでは肺ガンの原因として、喫煙とアスベストを考えよう。ただし喫煙は、肺ガンだけでなく、さらに気管支炎の原因でもある。さてある日、一人の患者がガン検査で陽性を示したとき、ここからあなたはどのように推論するだろうか。おそらく、この患者には喫煙習慣があるのかもしれない、だとしたら気管支炎の可能性もある、あるいはアスベスト被害にあったのかもしれない、などど推論することだろう。そしてさらに、この患者は気管支炎も患っていることが判明したとしよう。このときあなたは、アスベスト被災の可能性は下がった、と考えるだろう。

しかし、これらの推論はあくまで質的なものである。実際にこうしたテストの前後で、各確率は正確にどれくらい上がった（下がった）のだろうか。つまり、検査結果を T、肺ガンを L、喫煙暦を S、気管支炎を B、アスベスト被害を A という確率変数で表し、それぞれの値 $t1, l1, s1, b1, a1$ で「有（陽性）」、$t2, l2, s2, b2, a2$ で「無（陰性）」を表すとすると、ガン検査陽性 $(t1)$ のもとでの各確率変数の値の条件付確率、例えば $P(B^{-1}(b1) \mid T^{-1}(t1))$ はどれくらいだろうか[1] 。そしてこれを導くためには、どのようなデータが必要なのだろうか。

原理的には、これは条件付確率の定義に従い、以下のように計算することができる：

$$P(b1 \mid t1) = \frac{P(b1, t1)}{P(t1)} = \frac{\sum_{l,s,a} P(t1, l, s, b1, a)}{\sum_{l,s,b,a} P(t1, l, s, b, a)}$$

しかしこれには複数の問題がある。第一に、この計算に必要とされるような同時確率分布が手に入ることは稀である（複数者を対象に、上記項目を一つずつ調べその割合をとるようなことは現実的ではない）。第二に、この方法では確率変数の数に伴い計算量が指数的に増加していく（上式の例では、それぞれ二つの値を持つ確率変数が k 個あるとすると、分母の項数は 2^{k-1} 個となる）。そして第三に、この方法は我々の直観に適っていない（検査結果

から気管支炎を予測するとき、アスベスト被災者の割合を考慮することはほとんどない)。

ベイズネットは、各確率変数間の関係を、グラフ的な因果モデルを用いて表すことによって、この問題を解決する。そのために必要なのは、次の二つである。まずは、それぞれが確率変数を表すノードの集合 $\mathbf{V}$ の間を、因果関係を表すエッジ $\mathbf{E}$ で結んだ DAG(Directed Acyclic Graph;非巡回有向グラフ)$\mathbb{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ である[2]。第二に、各確率変数のこのグラフ上で親(原因)にあたる確率変数のもとでの、条件付確率が必要になる。例えば、喫煙習慣のもとでの肺ガン率、ガン検査機器の検出力や偽陽性率などである。一般に、こうした条件付確率は、同時確率分布よりも容易に求まる。図 2 は、上例に基づきこれら二つを定めたものである。

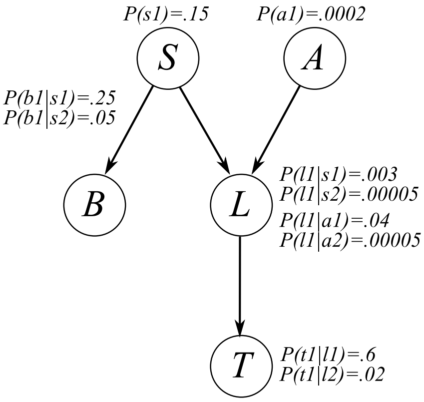

図 2: DAG の例

この二つ、すなわち因果関係を表す DAG と、原因のもとでの結果の条件付確率が、ベイズネットによる因果推論において必要となる因果モデルと統計量である。ではここから、両者の間にどのような関係が結論できるのだろうか。

まずこのように定めると、DAG $\mathbb{G}$ 上での親のもとでの子の条件付確率の積によって、同時確率分布を構成することができる。つまり、確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の値を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 、X_i の親である確率変数の集合 $\mathbf{PA}_i$ の値を $\mathbf{pa}_i$ とすると、

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_i^n P(x_i \mid \mathbf{pa}_i)$$

が成り立つ (cf. Neapolitan, 2004, Theorem 1.5)。

ベイズネットの手法の要は、因果モデル $\mathbb{G}$ とこうして導かれた同時確率分布 P の組 $(\mathbb{G}, P)$ が、マルコフ条件(*Markov Condition*)と呼ばれる以下の条件を満たす、ということにある。

マルコフ条件 DAG $\mathbb{G}$ と同時確率分布 P の組 $(\mathbb{G}, P)$ がマルコフ条件を満たす $\Longleftrightarrow$ 任意の確率変数 $X \in \mathbf{V}$ について、X の $\mathbb{G}$ 上の親すべてからなる集合 $\mathbf{PA}_X$ のもとで、$\{X\}$ はその非子孫の集合 $\mathbf{ND}_X$ から条件付独立となる(以下これを $I_p(\{X\}, \mathbf{ND}_X \mid \mathbf{PA}_X)$ と表す)

例えば上図 2 において、T の親は L、その非子孫は L, S, B, A である。よって図 2 の DAG とともにマルコフ条件を満たす確率分布では、$\{T\}$ と $\{L, S, B, A\}$ は $\{L\}$ のもとで独立となる。このマルコフ条件が、ベイズネットにおいて統計的データと因果モデルの間に成立する「橋」である。では、この橋は実際の原因・結果推論においてどのように用いられるのであろうか。

まず第一に、ここから、任意の確率変数間の間の独立関係を、煩雑な数値計算を経ずとも、単にグラフ上の位置関係だけから判断することが可能になる。マルコフ条件を満たす

$(\mathbb{G}, P)$ においては、$\mathbb{G}$ に含まれる二つのノード（集合）が別のノード（集合）で「分断」されるとき、対応する確率変数間に一定の独立関係がしかれることが分かっている。この分断関係を具体的に定めるのが、次の d 分離（*d-separation*）である。

d 分離 $\mathbb{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ を DAG、$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ を互いに排反な $\mathbf{V}$ の部分集合とする。$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が $\mathbf{C}$ によって d 分離されている（以下、$I_{\mathbb{G}}(\mathbf{A}, \mathbf{B} \mid \mathbf{C})$ と表記する）とは、すべての $X \in \mathbf{A}$ および $Y \in \mathbf{B}$ の間のすべての経路において、次のいずれかが成立していることである。

(1) 経路上にノード $Z \in \mathbf{C}$ があり、それが頭尾ノード[3] $(\cdots \to Z \to \cdots)$ である。

(2) 経路上にノード $Z \in \mathbf{C}$ があり、それが尾尾ノード $(\cdots \leftarrow Z \to \cdots)$ である。

(3) 経路上に頭頭ノード $Z(\cdots \leftarrow Z \to \cdots)$ があり、Z と Z の子孫が $\mathbf{C}$ に含まれない。

DAG $\mathbb{G}$ 上の d 分離は、$\mathbb{G}$ とともにマルコフ条件を満たす確率分布 P における確率変数間の（条件付）独立関係を含意する。つまり $(\mathbb{G}, P)$ がマルコフ条件を満たすとき、互いに排反な $\mathbf{V}$ の部分集合 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ について、

$$I_{\mathbb{G}}(\mathbf{A}, \mathbf{B} \mid \mathbf{C}) \Rightarrow I_P(\mathbf{A}, \mathbf{B} \mid \mathbf{C})$$

が成り立つ (cf. Neapolitan, 2004, sec. 2.1.2)。

このようにして、DAG $\mathbb{G}$ は、それとともにマルコフ条件を満たす確率分布 P 上での独立関係を示す、ある種の地図となっている[4]。図 2 を例にとると、気管支炎 B とガン検査 T は、喫煙 S というファクターによって d 分離される。したがって、ガン検診の結果と気管支炎の有無は、喫煙暦のもとでは独立となる。一方、気管支炎 B とアスベスト被災 A はそのままでは d 分離されているが、ガン検査 T のもとでは分離されない。これは、通常、気管支炎とアスベスト被災は独立であるが、しかしその人に肺ガンの疑いがあるときはそうとは限らない——例えば気管支炎は喫煙暦を示唆し、それによって今度は疑われているガンがアスベストに起因するという可能性が低くなる——という、我々の直観に一致している[5]。

表 1: 図 2 の DAG における d 分離の一例

d 分離関係	該当ルール（説明）
$I_{\mathbb{G}}(\{T\}\{A\} \mid \{L\})$	*rule 1* $(A \to L \to T$ かつ $L \in \{L\})$
$I_{\mathbb{G}}(\{B\}\{L\} \mid \{S\})$	*rule 2* $(B \leftarrow S \to L$ かつ $S \in \{S\})$
$I_{\mathbb{G}}(\{B, S\}\{A\} \mid \phi)$	*rule 3* $(S \to L \leftarrow A$ かつ $L, T \notin \phi)$
$\neg I_{\mathbb{G}}(\{B\}, \{A\} \mid \{T\})$	*rule 3* $(S \to L \leftarrow A$ かつ $T \in \{T\})$

マルコフ条件が架ける「橋」の第二の利点は、それによって、ある観察結果のもとでの各確率変数の値の確率を、より容易かつ直観的な仕方で求めることができる、ということである。既に述べたように、ガン検査結果のもとで被験者の喫煙の有無を考えるとき、我々はアスベスト被害などの情報まで考慮することはない。むしろ、その結果からガンの確率を考え、そしてそれに基づいてその一要因である喫煙の確率を考える、というように、因果関係を辿って一歩一歩計算していくのが普通である。確率分布 P とともにマルコフ条件

を満たす DAG $\mathbb{G}$ は、このような逐次的なアップデートの「道順」を教える。これは、観察されたノードの状態を基点として、その情報を DAG が示す経路に沿って伝えつつ、経路上の確率変数値の確率を逐一更新していくような、メッセージ伝播型のアルゴリズムによって実現される (cf. Pearl, 1988, chap.4)。これを用いることによって、任意の確率変数の観測結果に基づいて、他の確率変数の値の確率がどのように変化するかを、より少ない計算量で、効率的に行うことができるのである。

2.2 因果構造を統計的データから推論する

上述の議論においては、予測の基となる因果構造ははじめから与えられていた。しかしそれが未知のとき、単に統計的データのみから、因果構造を復元することは可能だろうか。ベイズネットは、この問題に対し一定の範囲内で答えを与える。

その基本的なアイデアは以下の通りである。観察から導かれる統計的データ、ここでは同時確率分布は、確率変数間の一定の（条件付）独立関係を含んでいる。仮に前述のガン検診のケースでサンプルが取れたとすると、そこには様々な相関／独立関係が現れているだろう（例えば、気管支炎とガン検査結果は弱く相関しているかもしれないが、喫煙暦で条件付ければ独立だろう）。ベイズネットでは、この独立関係が因果的な構造に起因するものと想定して、データの独立性をもっとも良く説明するような DAG を求めていくのである。

我々は前節で、d 分離の重要な性質を見た。すなわち、マルコフ条件を満たす $(\mathbb{G}, P)$ では、DAG $\mathbb{G}$ 上の d 分離関係は確率分布 P における独立関係を含意する。であれば逆に、P 上の従属関係は、グラフの形状に関する指針となるだろう。つまり：

$$\neg I_P(\mathbf{A}, \mathbf{B} \mid \mathbf{C}) \Rightarrow \neg I_{\mathbb{G}}(\mathbf{A}, \mathbf{B} \mid \mathbf{C})$$

因果構造推論アルゴリズムは、この関係を利用する[6]。つまり、$\mathbf{V}$ に含まれる確率変数 A, B をとってきて、それがいかなる $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{V}$ のもとでも P において条件付独立にならないのであれば、A と B は、その方向性はまだ不明だが、とにかく直接的な因果関係を持つと結論され、無向のリンクで結ばれる。これを各ノードの集合について調べることで、無向のリンクで結ばれた $\mathbf{V}$ のグラフができる。次の作業は、d 分離の諸条件を用いて、これらを方向付けていくことである。今グラフ上に経路 $A - C - B$ があり、A と B は隣接していないとしよう。このとき、A と B が C を含むノード集合のもとで条件付独立になるかどうかをチェックする。もしそうでない、つまり $\neg I_P(\mathbf{A}, \mathbf{B} \mid \mathbf{C})$ であれば、上記関係より、A と B は C によって d 分離されない。しかしそうだとすると、d 分離の条件 1 および 2 より、C は経路 $A - C - B$ 上で頭尾あるいは尾尾ノードではないことになる。つまりそれは条件 3 の頭頭ノードであり、よって $A \rightarrow C \leftarrow B$ と矢印を付けることができる。こうした手順を含む複数のテクニックを繰り返し適用することで、グラフ上の一部に関しては、因果の方向性を確定していくことができる。ただし、この仕方ですべてのリンクを方向付けることはできない。このア

ルゴリズムから分かるのはあくまで、有向エッジと無向のリンクが混在した部分的な DAG である。

しかしそれ以上に問題なのは、このままでは、こうしてできる部分的な有向グラフが、データを生み出した因果構造の過不足ないモデルとなっている保証はないということである。前述のマルコフ条件の性質を思い起こそう。DAG $\mathbb{G}$ における d 分離は、それとともにマルコフ条件を満たす分布 P の独立関係を含意する。例えば、ある二つのノードの間にエッジがなければ、両者は前述の条件 1 から 3 のいずれかによって d 分離されることになり、よって何らかの条件の下で独立となる。しかしマルコフ条件は、逆にエッジで直接結ばれた、d 分離されないノード間については、いかなる確率的関係も規定しない（それらは独立であっても従属であってもよい）。これが意味するのは、全ノード間が結ばれている DAG は、全確率変数間がどのような確率的関係であっても、つまりいかなる確率分布であろうとも、その分布とともにマルコフ条件を満たすということである。しかしそのような DAG は、因果モデルとしての役割をほとんど果たさないだろう。因果モデルというからには、エッジの不在によって直接的関係の不在を表すだけでなく、エッジの存在によってその存在をも表していてほしい。それを保証するのが、次の忠実性条件（*faithfulness condition*）である[7]。

忠実性条件 DAG $\mathbb{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ の $\mathbf{V}$ の同時確率分布を P とする。$(\mathbb{G}, P)$ が忠実性条件を満たすとは、$(\mathbb{G}, P)$ がマルコフ条件を満たし、かつ P が、マルコフ条件に基づいて $\mathbb{G}$ から帰結される以外の独立関係を含まないということである。すなわち：

$$I_{\mathbb{G}}(\mathbf{A}, \mathbf{B} \mid \mathbf{C}) \Leftrightarrow I_P(\mathbf{A}, \mathbf{B} \mid \mathbf{C})$$

我々は前節で、マルコフ条件を因果モデルと統計的データの間の橋になぞらえた。因果モデルから統計的データへと向かうためには、マルコフ条件という両者を媒介する橋が必要なのだった。しかし今度は逆に、統計的データから因果モデルへと向かうためには、それに加えさらにもう一本の橋、すなわちこの忠実性条件が必要となる。忠実性条件は、アルゴリズムの適用対象である統計的データの性質に関する注文である。つまりこの条件は、二つの確率変数が表す事象間に直接的な原因・結果の関係があるのであれば、その事実は統計的データにおける従属関係として反映されていなければならない、ということを要請している。この条件が満たされて初めて、上述のアルゴリズムの適用によって、統計的な「影」から、その基となった因果構造を、部分的にではあれ、導くことができるのである。

3. ベイジアンネットワークをめぐる哲学的議論

前章で概観したベイズネットの諸定理は、もともとは、確率変数間の独立関係をグラフを用いて表し、推論するという目的のために考案されてきたものである (Pearl, 1988, chap.3)。しかしこれを同時に世界の因果的構造に関するモデルとしてみなすとき、そこでは因果と

確率についての一定の形而上学的主張が前提されることになる。この前提は因果的マルコフ仮定（*Causal Markov Assumption*）といわれ、次のようにまとめられる：まず、我々が因果関係とみなす現象を、グラフ理論的構造（DAG）によってモデル化してみよ。他方、その因果関係の各項を確率変数とし、その確率分布を求めよ。すると、得られたグラフと確率分布の間には、一定の対応関係、すなわち因果的マルコフ条件[8]と忠実性条件が成立しているであろう———よって争点は、このような因果的ベイズネットの手法が、本当に実際の因果関係を正しくモデル化しているのかどうか、ということにある。因果的マルコフ条件と忠実性条件は、実際の因果関係において常に成り立つのだろうか、あるいは反例が存在するのだろうか？また、もしそれらが成り立つ（あるいは成り立たない）とすれば、それはなぜだろうか？こうした点に、因果の本性をめぐる哲学的な議論が控えているのである。

3.1 因果的マルコフ条件をめぐる議論

因果的マルコフ条件は、一般に共通原因原理として知られる条件 (Reichenbach, 1956) を強めたものである[9]。この原理は、二つの事象が相関しているなら、（1）どちらか一方が他方の原因であるか、（2）両者は共通の原因を持たなければならず、また後者の場合、その共通原因で条件付けることによって二事象の相関は解消される——共通原因は一方を他方から「スクリーン・オフ」する——ということを主張する。

したがって因果的マルコフ条件は、この共通原因原理に対する批判 (e.g. Salmon, 1984; Sober, 1988; Arntzenius, 1992) をそのまま引き受けることになる。批判の一つは、因果によらない相関の存在を主張する。イギリス国内のパンの値段とベネチアの水位は年々上がっており、その意味で両者は相関している。しかしだからといって我々は、両者を結ぶ因果関係があるとは考えないだろう (Sober, 1988)。これに対し Spirtes, Glymour & Scheines (2000, p.296) は、Sober の反例では何が変数であり何がその単位なのかが曖昧で、それによって混乱が生じていると反論する。もしパン価格と水位を変数と考え、それぞれの値で年毎のパン価格と水位を表すなら、確かに両変数は相関するかもしれない。しかしこの場合、各変数の値の間で因果的関係があることになる（昨年の水位は今年の水位に影響を与える）が、ベイズネットによる因果モデリングはもともとそうした変数内部（つまり一変数がとる値の間）で因果関係があるような系を対象としないので、これは反例にならない。一方、パン価格の差と水位の差をそれぞれ変数とするなら、両者（年毎の値上がり幅と水位の上昇幅）が相関すると考える理由はなくなるだろう[10]。

第二の批判は、スクリーン・オフに対する反例を主張する。この反例は、Salmon (1984) が双方向的フォーク（interactive fork）と呼ぶ構造を有している。次のような状況を想像していみよう。テレビのリモコン操作 (*C*) はテレビに映像が映し出されること (*V*) とテレビから音が出ること (*S*) の共通原因である (図 3a)。映像と音は一緒につくので、両者は相関している。しかしこのリモコンは時々、押しても利かないことがある。このとき、リモコ

ン操作は映像と音との相関をスクリーン・オフしない、つまり $P(V \mid S, C) = P(V \mid C)$ とはならない (Davis (1988); なお Salmon (1984); Cartwright (1999) も同様の反例を立てている)。このケースにおける問題は、リモコン操作が V と S から比較的「離れた」原因であるため、両者の適切な情報源になっていないということである (Spirtes et al., 2000, p.37)。状況をより詳細に見れば、両者のより直接的な共通原因であるような C'（例えばテレビ本体回路への通電）があって、そのもとでは V と S は条件付独立となると考えられる（図 3b）。ここから、Hausman & Woodward (1999) は、二つの事象が相関しており、そのどちらもが他方の原因ではないならば、その相関をスクリーン・オフするような共通の原因がどこかに存在する、という主張として因果的マルコフ条件を部分的に読み替えている。

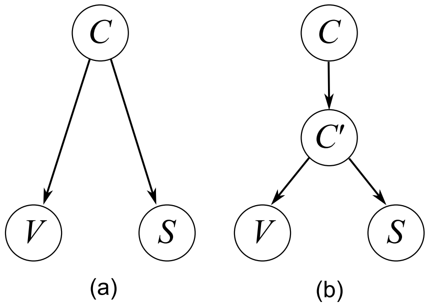

図 3: Interactive fork

このような前提から、ベイズネットを用いた因果関係のモデリングでは、互いが原因・結果の関係にない二つ以上の確率変数の相関が確認される場合、常に両者の共通原因が求められることになる。しかし、Cartwright (1999, chap.5) は、二つの理由からこのような態度を批判している。第一は実践的理由である。社会科学などでは、研究対象の因果関係の完全な見取り図が得られることはきわめて稀であり、二つの変数間の隠れた共通原因を探すのは、非常な労力を有するか、あるいは現実的に困難であることが多い。第二は形而上学的理由である。相関をスクリーン・オフする共通原因が必ず見つかるはずだという擁護者の主張は、一つの想定に過ぎず、これが現実の因果性に関し唯一の正しい考えであるという保証はない。例えば Lemmer (1996) は、一つの原因はその複数の結果に対し個別に影響力を行使しうるという想定をもとに、因果的マルコフ条件が成立しない（共通原因によって結果の相関が必ずしもスクリーン・オフされない）ような因果モデルを提案している。ここで問われているのは、因果性についての複数の異なった考え方である。このように、共通原因原理をめぐる論争は、因果的マルコフ条件というベイズネットによる因果分析の基礎をめぐる論争として、再び活発な議論の対象となっているのである。

3.2 忠実性条件をめぐる議論

忠実性条件は、因果的マルコフ条件よりも一層強い要求である。実際、忠実性条件が破られるようなケースは容易に想定できる。確率変数 X, Y, Z とデータから得られた確率分布 P 上で、$I_P(X, Y \mid Z)$ が成立しているとしよう。このとき、$I_{\mathbb{G}}(X, Y \mid Z)$ ではないような DAG、例えば図 4 はこの分布に対し忠実ではない。いま仮に、P を生み出した因果構造は、実際にこの非忠実な因果グラフにより表されるものだっ

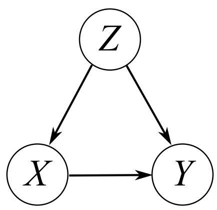

図 4:

たと仮定してみよう。これが意味するのは、Z が X と Y の原因である
のに加え、X も Y に対し因果的影響を与えるが、それぞれの影響関係がちょうど相殺され、データ上では $X \to Y$ への直接の影響が見えなくなっている、ということである。これは上図 4 の因果関係が、

$$\begin{aligned} X &= \alpha Z + u_1 \\ Y &= \beta Z + \gamma X + u_2 \end{aligned}$$

という回帰式でそれぞれ表される（ただし u_1, u_2 は誤差項）とすると、各係数がちょうど $\beta = -\alpha\gamma$ という関係を保つような特異的状況に相当する。一方、もし P が忠実な因果モデルから生み出されているなら、$X \to Y$ の矢印は削除されることになり、この場合 $I_P(X, Y \mid Z)$ は α と β の値の取り方に関わらず成立する。

ここから、忠実性が破られるのは、ノード間の因果的影響の度合いが釣り合うことで独立関係が生じているときだ、ということが理解される。一方、確率変数間の独立関係のすべてが、因果的影響の度合いではなく、むしろその構造（因果関係の有無）によって生み出されたものであるならば、忠実性は保証される (Pearl, 2000)。直感的には、忠実性が破られるようにパラメータが釣り合うケースは、可能性はゼロではないにしても少なそうだと思われる[11]。しかしこれはもちろん、そのような事態が絶対に生じないということを保証するものではない。そしてベイズネットによる因果分析の是非をめぐっては、その点が争われるのである (cf. Cartwright, 1999; Pearl, 2000)。

3.3 因果とは何か

我々はこれまで、「因果」概念を所与のものとして議論を進めてきた。しかしそもそも、因果とは何なのだろうか。ベイズネットによる因果分析は、必ずしも因果に関して特定の定義を要請するものではない (Spirtes et al., 2000; Spirtes, Glymour & Scheines, 2004)。しかし、そこでは一般に介入的 (*interventionist*) な因果概念が採られることが多い (Hausman & Woodward, 1999; Woodward, 2000; Spirtes et al., 2000; Pearl, 2000)。それによれば、X が Y の原因であるのは、何らかの（人為的・自然的）な介入によって、X の状態を変化させることによって、Y の状態を変化させることができるようなときである。ただし、介入は介入対象である因果的な系 $\mathbf{V}$ に対して外的でなければならない。つまり、I_X を $X \in \mathbf{V}$ に対する介入とすると、I_X は（1）$\mathbf{V}$ のどの変数の結果でもなく、（2）I_X は X を経ない仕方で $\mathbf{V}$ 中の変数に因果的影響を及ぼさず、（3）$\mathbf{V}$ 中の変数と共通の原因を有していてはならない。

Hausman & Woodward (1999, sec.7) は、こうした介入主義的な因果概念をもとに、因果的マルコフ条件の正当化を試みている。彼らはまず、介入可能な因果的系の条件として、モジュール性（*modularity*）を挙げる。モジュール性とは、直感的にいえば、介入によって系内の任意の変数 X を個別的に——系の他の部分の関係を損なうことなく——変更すること

ができるという条件である。Hausman らの目論見は、さらに因果的作用の決定性（各要素の状態はその原因から一意的に決まる）などの複数の条件を認めれば、このモジュール性と因果的マルコフ条件が同値となる――つまり系内の要素を個別的に変更できると見なすことは、その系において因果的マルコフ条件が成立すると見なすことに他ならない――ということを示すことにある。しかし Hausman と Woodward が定義する因果的マルコフ条件は、一般的な因果的マルコフ条件より弱いものであり、その意味でこの結果には制限が加えられている (Steel, 2006; 北島, 2008)。また、モジュール性を初めとしたこの議論の前提、ならびに論証自体の妥当性を疑う議論も提出されている (Cartwright, 2007, chap.8)。

しかしながら、ベイズネット的な因果分析において介入的因果概念が採られる主な理由は、上記のような形而上学的正当化を行うためというよりも、むしろグラフ的な因果分析の方法論的な利点を強調するためである。それはつまり、上述した一連のテクニックに基づけば、介入をグラフ上での操作として捉えることによって、実際に介入を行わずとも、単に観察データのみからその結果を評価することが可能になるという点である。介入という概念は、因果が持つ反事実条件的性格を強調している。というのもそれが意味するのは、「もし仮に原因にあたる事象を変化させたならば、結果にあたる事象も違っていただろう」ということだからだ。因果グラフにおいてこうした介入は、介入要因を表す新たな独立したノードを設け、そのノードから介入対象であるノードにエッジを加えることによって表される。よってこの介入後のグラフにおける確率分布を、介入前のグラフと確率データから導くことができれば、我々は介入の効果を確率分布の変化として評価することができる。Spirtes et al. (2000, sec. 3.7.2) は、彼らが操作定理（*Manipulation Theorem*）と呼ぶ定理によって、この具体的な方法を示している。これによれば、介入後の同時確率分布は、直接介入を受けたノードの介入後グラフの親のもとでの条件付確率と、それ以外のノードの介入前グラフの親のもとでの条件付確率を全て掛け合わせたものに等しい。この定理が意味するのは、もし実際の因果的構造が既知で、介入の直接的な影響が条件付確率の形で分かっているなら、そうした介入を実際に行わずとも、非介入時のデータから介入の効果を予測できる、ということである。そして実際 Spirtes et al. (2000, chap.7) は、この定理に基づき、様々な条件の下で、観察データから介入の結果を予測する方法を示している。

従来、因果的関係を評価するためには、無作為化実験を行うのが通例であった。しかしよく指摘されるように、疫学や経済学をはじめ多くの社会科学分野では、無作為化実験は倫理的にもコスト的にも実行が困難である。Spirtes et al. (2000) の試みは、こうした問題点を踏まえ、実際の実験を経ずとも、単に観測データ（及び対象となる因果的関係についての若干の理解）のみから、実験（介入）の効果を見積もることを目指しているという点で、大きな意義を持っているといえるだろう[12]。

4. 結び

以上で見てきたように、ベイズネットは、因果推論ツールとしての実践的な側面を持つ一方で、因果に関する一定の形而上学的主張としての側面も有している。ここから、両者の間に興味深い関係が生じる。すなわち、その形而上学的前提をめぐる議論は、この手法を実際に因果推論に用いることの是非に関わり、また逆に、実践的ツールとしての成功（あるいは失敗）は、その土台となっている因果と確率に関する考え方の確からしさに影響を与える。このような仕方で、ベイズネットは、因果と確率という古くからの哲学的問題に、新たな活力を吹き込んでいるのである。

註

[1] 以下、煩雑さを避けるため、確率変数が特定の値をとるときにはその値のみを表記する。つまり $P(T^{-1}(t1))$ を単に $P(t1)$ と表記する。確率変数等の定義については北島 (2008, 定義 3) を参照。

[2] DAG で用いられるグラフ理論上の用語については、北島 (2008, 定義 7-11) を参照。

[3] 一つの経路を構成する三つの連続したノード A, B, C について、B が A, C の一方の親でありもう片方の子である (e.g. $A \to B \to C$) とき B を「頭尾ノード」、双方の親である ($A \leftarrow B \to C$) とき「尾尾ノード」、双方の子である ($A \to B \leftarrow C$) とき「頭頭ノード」と呼ぶことにする。

[4] 例えば Pearl (1988, p.92) は、これを独立（independency）を表す $I-map$ と呼んでいる。

[5] ただし後述するように、確率変数間が d 分離されないということから、両者の従属性を結論することはできない。それが可能なのは忠実性条件を満たす分布においてのみである

[6] このようなアルゴリズムには、Verma と Pearl による *IC* および IC^* アルゴリズム (cf. Pearl, 2000, sec. 2.6)、また Spirtes et al. (2000, sec. 5.4.2) による *PC* アルゴリズムがある

[7] 忠実性は Spirtes et al. (2000) の用語である。(Pearl, 2000, sec. 2.4) は同じ条件を、安定性（stability）と呼んでいる。

[8] 因果関係のモデルとしての DAG $\mathbb{G}$ と確率分布 P がマルコフ条件を満たすとき、$(\mathbb{G}, P)$ は因果的マルコフ条件（*Causal Markov Condition*）を満たす、といわれる。

[9] 因果的マルコフ条件が共通原因原理を含意することについては、Williamson (2005, p.52, Proposition 4.1) を参照。

[10] これを受けてさらに Sober (2001) は、進化論的な仮想事例を引きながら、共通の原因（共通祖先段階）がなくとも変化量（発生速度）の相関が生じていると考えられるようなケースを主張している。

[11] 線形モデルでは、モデルのパラメータ（n 個の線形係数と k 個の誤差変数の分散）は $n+k$ 次元ベクトルで表せ、よって可能なパラメータの取り方は $n+k$ 次元実数空間を構成する。Spirtes et al. (2000, theorem 3.2) は、忠実性条件を破るようなパラメータベクトルの集合は、この実数空間上でルベーグ測度ゼロとなると示すことで、こうした直感を支持している。

[12] 同様に Pearl (2000) も、確率変数 X への介入を、$do(X = x)$ という処置によって表し、変化後のグラフに応じて各変数の確率分布を計算しなおすという仕方で、因果の反事実条件的な性格をモデル化・計量化する方法を示している。

文献

Arntzenius, F. (1992). ‘The Common Cause Principle,’ *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association, 1992*, 227–237.

Cartwright, N. (1999). *The Dappled World*: Cambridge University Press New York.

——— (2007). *Hunting Causes and Using Them: Approaches in Philosophy and Economics*: Cambridge University Press.

Davis, W.A. (1988). ‘Probabilistic Theories of Causation,’ in Fetzer, J. (Ed.), *Probability and Causality*: Reidel, 133–160.

Hausman, D.M. & Woodward, J. (1999). ‘Independence, Invariance and the Causal Markov Condition,’ *The British Journal for the Philosophy of Science*, *50*, 521-583.

北島雄一郎 (2008). 「ベイジアンネットワーク、共通原因、そして因果的マルコフ条件」,『哲学論叢』, 第 35 巻.

Lemmer, J.F. (1996). ‘The causal Markov condition, fact or artifact?,’ *ACM SIGART Bulletin*, *7*, *3*, 3–16.

Neapolitan, R. E. (2004). *Learning Bayesian Networks*: Pearson Prentice Hall Upper Saddle River.

Pearl, J. (1988). *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*: Morgan Kaufmann.

——— (2000). *Causality: Models, Reasoning, and Inference*: Cambridge University Press.

Reichenbach, H. (1956). *The Direction of Time*: University of California Press.

Salmon, W. C. (1984). *Scientific Explanation and the Causal Structure of the World*: Princeton University Press.

Shipley, B. (2000). *Cause and Correlation in Biology: A User’s Guide to Path Analysis, Structural Equations and Causal Inference*: Cambridge University Press.

Sober, E. (1988). ‘The Principle of the Common Cause,’ in Fetzer, J. (Ed.), *Probability and Causality*: Reidel, 211–28.

——— (2001). ‘Venetian Sea Levels, British Bread Prices, and the Principle of the Common Cause,’ *The British Journal for the Philosophy of Science*, *52*, *2*, 331–346.

Spirtes, P., Glymour, C., & Scheines, R. (2000). *Causation, Prediction, and Search*: Bradford Books, 2nd edition, 565.

——— (2004). ‘Reply to Humphreys and Freedman’s Review of Causation, Prediction, and Search,’ *The British Journal for the Philosophy of Science*, *48*, 555-568.

Steel, D. (2006). ‘Comment on Hausman & Woodward on the Causal Markov Condition,’ *The British Journal for the Philosophy of Science*, *57*, 219-231.

Williamson, J. (2005). *Bayesian Nets and Causality: Philosophical and Computational Foundations*: Oxford University Press.

Woodward, J. (2000). ‘Explanation and Invariance in the Special Sciences,’ *The British Journal for the Philosophy of Science*, *51*, 197.

〔インディアナ大学・科学史科学哲学〕