

# 追加学習の漸近論的解析

池田 和司

金沢大学 工学部 電気・情報工学科

kazushi@t.kanazawa-u.ac.jp

## 1 はじめに

神経回路網などの学習機械に例題を与えて学習をさせた後、再び追加の例題を与えて学習させる追加学習では、新たに与えられた例題だけを学習させると過去に学習した入出力関係が損なわれる。しかし過去に記憶した例題をすべて用いるのは学習にかかるコストが大きく現実的ではない。

効率的に追加学習をするための研究は数多く行われてきており、既存の入出力や境界線を維持するための例題の選択や例題の追加に伴うユニットを追加と削減などの方法が提案されている [2, 5]。また、ランダムなパターンを機械に提示し、その入出力関係を新例題とともに学習させる手法も研究されている [4]。

しかし、いずれも既に学習した機械の信頼性などが考慮されておらず、問題の本質を明らかにして問題を解決しているとはいいがたい。そこで本論文ではパラメータ推定の視点から追加学習の問題を定式化し、疑似例題を用いる学習法について学習機械の性能を最適にする方法を提案する。また、他の追加学習法についても検討する。

## 2 パラメータ推定と追加学習

例題がランダムに与えられることを仮定し、学習とは真の機械のパラメータを推定することだと考えれば、追加学習の問題は次のように表現できる。すなわち、“ランダムに選ばれた  $t_1$  個の例題から推定されたパラメータ  $\theta_1$  と新たに  $t_2$  個の例題が与えられた時、推定パラメータ  $\theta_2$  をどのように決定すればよいのか”という問題である。最も極端な二つの推定法は、 $\theta_1$  をそのまま  $\theta_2$  とする方法と、新たな  $t_2$  個の例題だけから  $\theta_2$  を推定する方法である。もちろん、この両者よりもよい推定方法が存在することが期待される。

$t_1$  個のパラメータから推定されたパラメータ  $\theta_1$  を

どのように利用すればよいか追加学習のポイントである。学習により、与えられた例題に対して最適なパラメータが得られる場合には、 $\theta_1$  を初期値として  $t_2$  個の例題を利用した推定を行う方法は  $t_2$  個の例題だけを利用した推定と同じである。そこで、パラメータ  $\theta_1$  を持った機械により現在の機械の状態を反映した例題 (疑似例題と呼ぶ) を作り、新たに与えられた  $t_2$  個の例題とともに学習する方法を採用する。この方法により既存の情報が学習後のパラメータに反映されることは滝川ら [4] によって示されている。そこでまず、“ $t_1$  個の例題により推定されたパラメータを持った機械で  $t_3$  個の疑似例題を生成し、新たに与えられた  $t_2$  個の例題とともにパラメータを推定する。この時、推定パラメータ  $\theta_2$  の分散を最小にする  $t_3$  はいくつか”という問題を考えることにする。

## 3 例題数と推定パラメータの分布

本論文では、例題数  $t_1, t_2$  はいずれも十分に大きいとし、漸近論の手法を用いる。ある損失関数  $d(x, \theta, \theta')$  が定められているとする。例えば

$$d(x, \theta, \theta') = [y(x, \theta) - y(x, \theta')]^2$$

などである。パラメータ  $\theta_0$  を持つ真の機械から確率分布  $p(x)$  に従って独立に  $t$  個の例題  $\{x_i\}$  が与えられた時、学習により損失

$$D(\theta, \theta_0) = \frac{1}{t} \sum_i d(x_i, \theta, \theta_0)$$

を最小にするパラメータが求められると仮定する。この時、推定パラメータ  $\hat{\theta}$  が漸近的に正規分布

$$N\left(\theta_0, \frac{1}{t} Q^{-1} G Q^{-1}\right) \quad (1)$$

に従うことが統計的漸近理論によって明らかにされている [3]。

## 4 疑似例題数の最適化

$t_1$  個の例題から推定されたパラメータ  $\theta_1$  の分布は第3節の結果により,  $N\left(\theta_0, \frac{1}{t_1}V\right)$  である. 但し,  $V = Q^{-1}GQ^{-1}$  である. パラメータ  $\theta_1$  を持つ機械により作成した  $t_3$  個の疑似例題を用いて推定されるパラメータ  $\theta_2$  は

$$\theta_2 = \arg \min_{\theta} \frac{1}{t_2 + t_3} \left[ \sum_{i=1}^{t_2} d(x_i, \theta, \theta_0) + \sum_{j=1}^{t_3} d(x_j, \theta, \theta_1) \right] \quad (2)$$

と定義される.  $\theta_r = \frac{t_2}{t_2 + t_3}\theta_0 + \frac{t_3}{t_2 + t_3}\theta_1$  と定義すると近似的に

$$\theta_2 = \arg \min_{\theta} \frac{1}{t_2 + t_3} \sum_{k=1}^{t_2+t_3} d(x_k, \theta, \theta_r) \quad (3)$$

が成り立つ. よって第3節の結果により,  $\theta_2$  の分布は  $N\left(\theta_r, \frac{1}{t_2 + t_3}V(\theta_r)\right)$  である. ここで  $\theta_r$  は

$$\theta_r \sim N\left(\theta_0, \frac{1}{t_1} \left(\frac{t_3}{t_2 + t_3}\right)^2 V(\theta_0)\right)$$

であるので, 高次の項を無視して  $V(\theta_r) = V$  とすれば,  $\theta_2$  の推定は  $\theta_1$  の推定とは独立なので

$$\theta_2 \sim N\left(\theta_0, \left[\frac{1}{t_1} \left(\frac{t_3}{t_2 + t_3}\right)^2 + \frac{1}{t_2 + t_3}\right] V\right) \quad (4)$$

となる. よって分散を最小にする  $t_3$  は

$$\frac{1}{t_1} \left(\frac{t_3}{t_2 + t_3}\right)^2 + \frac{1}{t_2 + t_3} \quad (5)$$

を最小にする  $t_3$  であり, 最適な疑似例題数  $t_3$  は

$$\begin{aligned} t_1 < 2t_2 \text{ の時} & \quad t_3 = \frac{t_1 t_2}{2t_2 - t_1} \\ t_1 \geq 2t_2 \text{ の時} & \quad t_3 = \infty \end{aligned}$$

であることがわかる. ここで  $t_3 = \infty$  は, 新たに与えられた  $t_2$  個の例題を用いずに  $\theta_1$  をそのまま推定パラメータとして用いることと同じであり, 追加例題が比較的少ない場合には追加例題を全く利用しないのがよいことを示している.

## 5 その他の追加学習法

追加学習の方法は疑似例題を用いる方法だけではないので, 他の追加学習法についても考察及び解析を行った.

まず, Cross-Validation の応用した手法, すなわち,  $\theta_1$  を持つ機械を使って  $\theta_2$  の学習を途中で停止する方法を考える. Cross-Validation の漸近的性質は [1] で明らかにされており, 最適な学習停止を行った場合でも, 得られる推定パラメータ  $\theta_2$  は  $t_2$  個の例題だけで学習した場合のパラメータに比べほとんど良くならないことが示されている.

次に, 新しい例題だけを用いて  $\theta_2$  を推定し,  $\theta_1$  との重心  $\theta_3$  を推定パラメータとする方法について考える.  $\theta_1$  の分布は  $N\left(\theta_0, \frac{1}{t_1}V\right)$  であり,  $\theta_2$  の分布は  $N\left(\theta_0, \frac{1}{t_2}V\right)$  であることから,  $\theta_3$  をその重心  $\frac{t_1}{t_1+t_2}\theta_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2}\theta_2$  とするとその分布は  $N\left(\theta_0, \frac{1}{t_1+t_2}V\right)$  となる. これは  $t_1+t_2$  個のすべての例題を用いて学習した場合の分布と一致しているので, 漸近論による1次近似の範囲内では, 最適な追加学習法であると言える.

## 6 まとめ

本論文では, 神経回路網などの学習機械で問題となっている追加学習について, 疑似例題を用いる学習方法をパラメータ推定の視点から定式化し, 最適な疑似例題数を求めた. 追加例題の数が比較的少ない ( $t_2 \leq t_1/2$ ) 場合には追加例題は用いないのがよいというのは興味深い結論である. また, 漸近論による1次近似の範囲内では, 重心を推定パラメータとする手法により, 全例題を用いた場合と同じ精度で推定ができることが示された. 現実問題においては追加例題はそれほど多くない場合が多いので, 追加例題が少ない場合の理論を構築することが今後の課題である.

## 参考文献

- [1] Amari, S., Murata, N. and Müller, K.-R., NIPS, Vol. 8 (1993), 176-182.
- [2] Jutten, C. and Chentouf, R., *Neural Processing Letters*, Vol. 2 (1995), 1-4.
- [3] Murata, N., Yoshizawa, S. and Amari, S., *IEEE Trans. NN*, Vol. 5 (1994), 865-872.
- [4] 蟻川貴康, 中山謙二, 池田和司, 信学技法, NC 96-2, 1996.
- [5] 山川宏 他, 信学技法, NC 92-99, 1993.