

高次元 KAM トーラスの崩壊

早大理工 黒崎 暁

本稿では主に自由度 3 保存系の KAM トーラスと elliptic normal modes の残存/崩壊を大域的に調べた結果について報告する。思い切って計算を簡素化した。その妥当性は数値計算による傍証のみだが、下計算に使うには十分である。軽い計算なので、より重要な計算を行なうための初期値探しなどにも利用できると思う。

1 高次元 KAM の崩壊

次の 4 次元シンプレクティック写像を調べる。

$$\begin{aligned}
 y_1' &= y_1 + \frac{\epsilon}{2\pi} \sin(2\pi x_1) + \frac{0.3\epsilon}{2\pi} \sin(2\pi(x_1 + x_2)) \\
 x_1' &= x_1 + y_1' \\
 y_2' &= y_2 + \frac{\epsilon}{2\pi} \sin(2\pi x_2) + \frac{0.3\epsilon}{2\pi} \sin(2\pi(x_1 + x_2)) \\
 x_2' &= x_2 + y_2',
 \end{aligned} \tag{1}$$

これは自由度 3 の保存系 flow のポアンカレ断面に相当する。文献 [1] では自由度 3 で KAM トーラスの崩壊する順番と非線形摂動の性質の関係が調べられた。自由度 2 にあたる写像では KAM トーラスの強さは回転数のみで決まると信じられている。これを支持する数値結果も報告されているが、これは torus conjugation に出てくる小さい分母が 1 次元の有理近似のもので尽きるためである。自由度 3 では小さい分母に 1 次元と 2 次元の有理近似のもの両方が出てくるため、加える摂動によってより強いトーラスは変わってしまう。技術的にはコンジュゲイションの直接構成と収束周期点列の安定性による崩壊のチェックを用いた。

2 大域的な情報

位相空間の全域を考察する際に、いちいち周期点列を追跡したり、コンジュゲイションを構成するというのはバカバカしい。以降、特定のトーラスの近傍に限定して調べるのではなく、位相空間のより広い領域について調べることを考える。

図 1 はトーラスの崩壊直前、直後の典型的な運動を示す。変数 $y_1 (= x_1' - x_1)$ の長さ 2^{15} の時系列、そのパワースペクトルである。パワースペクトルは長さ 2^{15} のデータの FFT で図には連続した 8 本のデータからの平均を示した。

(近傍の KAM トーラスの崩壊直前) (a) が典型的な y_1 の時系列を示す。トーラス上の流れを反映して準周期性が図の模様となって現れている。(c) は y_1 のパワースペクトル $\langle S(f) \rangle$ を示す。低周波の成分はない。いずれも $\epsilon = 0.358$ の初期値 (後述)。

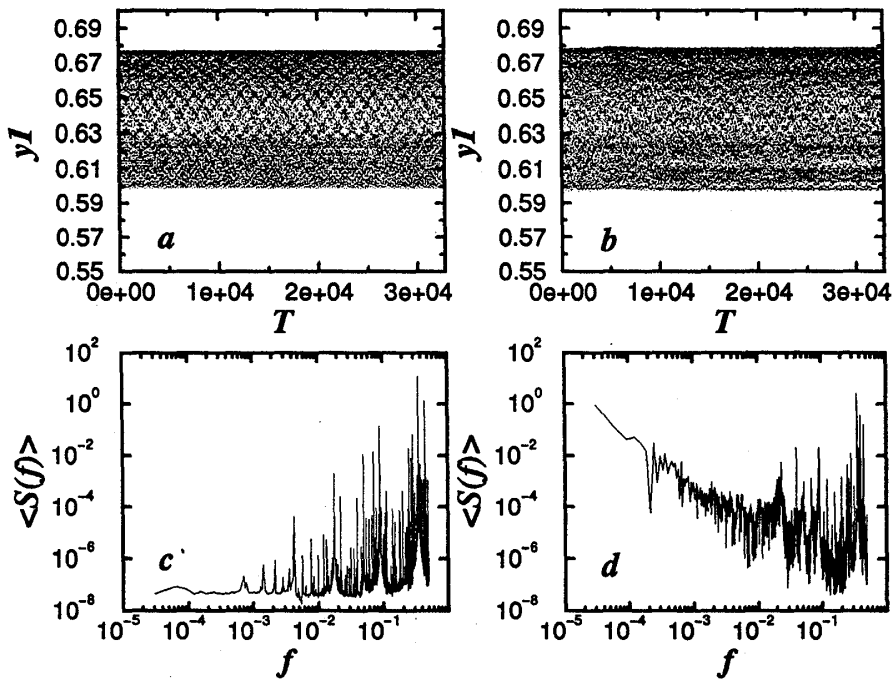


Figure 1: 典型的な時系列とそのパワースペクトル

(近傍の KAM トーラスの崩壊直後) (b) が典型的な y_1 の時系列を示す。準周期性はすでに見えない。(a) に比べて外形に 10^{-3} のゆがみが出てくる。この時間スケールでは一見定常にみえる。パワースペクトルは $f=0$ に小さいピークを持つ。(d) は (b) に対応するスペクトルで、これは $f=0$ のピークが比較的目立つ例である。 $\epsilon = 0.372$ 。

スペクトルの低周波成分に注目することでトーラスの残存していることをチェックすることを考える。写像 (1) で周期点列を用いた判定では、崩壊のしきい値の小数点 3 桁目は出なかった。典型的な運動が非線形摂動の強さに対してどのように分布するのかを調べ、スペクトルでの判定でも同程度の精度は期待できることが分かった。具体的には自由度 3 の last KAM の候補、回転数ベクトル (τ^{-2}, τ^{-1}) ($\tau = 2 \cos(2\pi/7)$) の KAM トーラスの周り、周期 1 4 2 9 の近似周期点の初期点を用いた。

注意しなければならないのは初期値によっては図 1 (a) に当たるものに長周期の構造が現れる場合である。これは摂動が非常に小さい場合の有理回転数でその周期が長い周期点の近傍のトーラスでみられる。時系列のがこの周期を含むだけ長くないと、本来定常であって (トーラスが残っている) もこのピークのすそを引っかけてしまう。

図 (2)(a) は $\epsilon = 0.2$ で、初期値空間にメッシュをきって KAM または ENM (後述) のトーラスが残存している点をプロットしている。 $x_1 = x_2 = 0$ に固定している。(a) の一点が位相空間の 2-torus 一つに対応している。計算を軽くするために手順を思い切って簡素化する。時系列

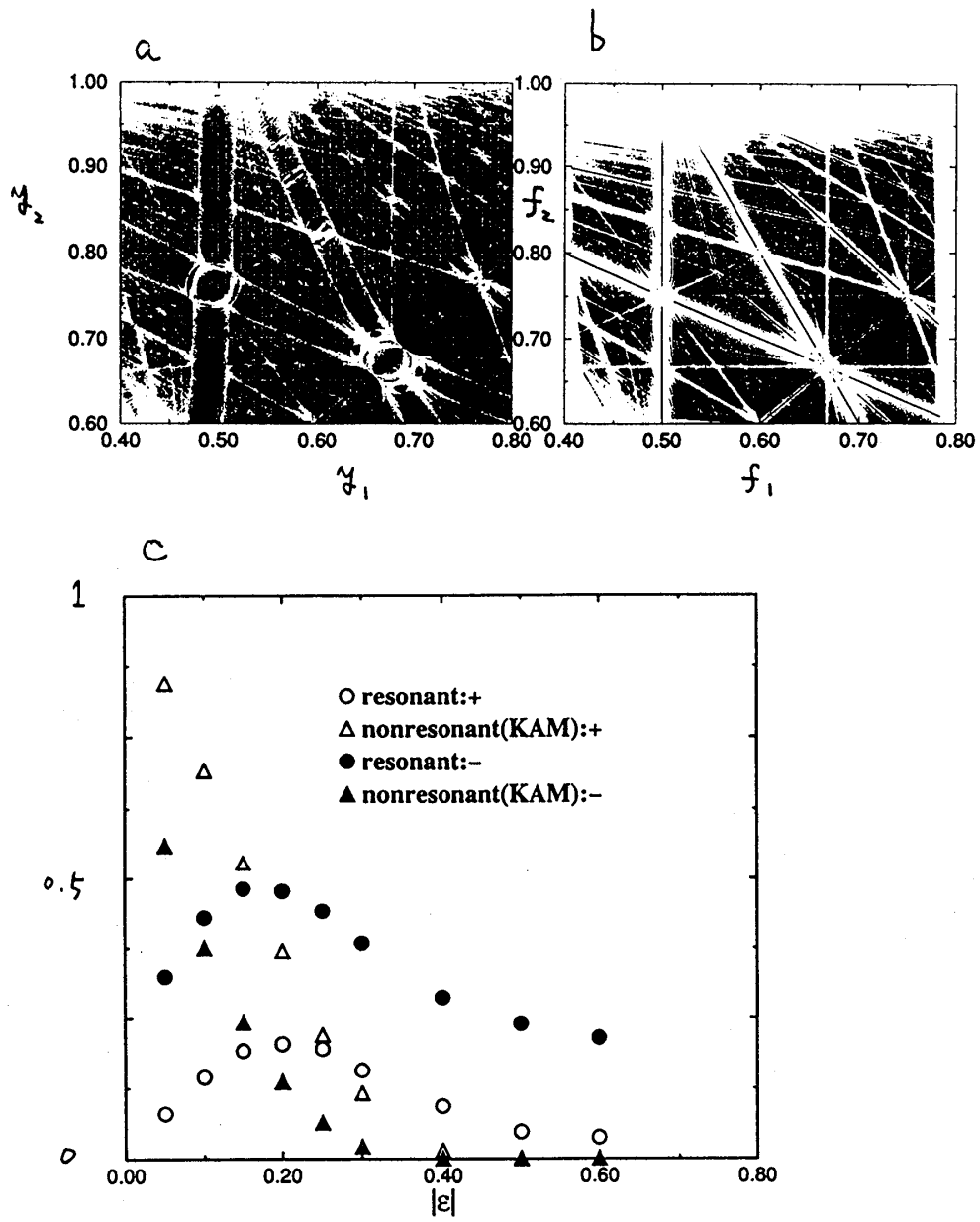


Figure 2: 残存 KAM トーラスと ENM。

は $2^{15} \times 2$ で揃え、計算するのはもっとも低周波の成分のみにし、閾値 10^{-5} より小さいものをプロットする。図(2)のスケール(オーダー1)ではこれで十分である。図(2)(b)は(a)で残った初期値について回転数ベクトルを $f_i = (x_i(2^{15}) - x_i(1))/2^{15} \pmod{1}$ (mod はとらない) で便宜的に計算したものである。写像(1)では $\epsilon = 0$ で y_i は回転数ベクトルの i 成分と一致する。いま ϵ は小さいのでこの対応はかなりよく残っている。(a)(b)の各点の対応は明かである。

(b)で白抜きになっているところは不安定帯を回転数の空間で見たものに対応する。中央に線が入っているものと入っていないものがある。(a)の $(y_1, y_2) = (0.5, 0.75)$ の付近の丸い一団の初期値が(b)の $(f_1, f_2) = (0.5, 0.75)$ の一点に潰れている。これらの初期値の集団は回転数 $(0.5, 0.75)$ の楕円型不動点の周りに共鳴で出来上がった 2-torus である。このトーラスがもつ $(0.5, 0.75)$ の不動点に対する回転数は(b)には現れない。(a)のほうで丸い一団の初期値から別の丸い一団の初期値へと伸びている四角い初期値の集合のほとんどは不動点とトーラスの直積から先と同じように高次共鳴で出来た 2-torus である。これらは(b)では直線となって現れる。このような中間次元も許すトーラスは elliptic normal modes (以後 ENM) と呼ばれ、一部数学者の興味を集めている。[2]

(c)は写像(1)で正負の両方の摂動の関数として、 $(x_1 = x_2 = 0)$ の平面上の初期値のうち、残存している ENM (resonant と書いてある) あるいは KAM の割合を示す。摂動の大きい領域での ENM の重要性は明かである。

3 今後の課題

不安定帯の縁のところの幾何を小さいスケールで詳しく調べることと、不安定帯の幅のスケール則。

References

- [1] K. Kurosaki and Y. Aizawa, Prog. Theor. Phys. **98** (1997), 783.
- [2] M. B. Sevryuk, preprint mp-arc 97-615.