ノン・ツイスト写像のカオスへの遷移機構

早大理工　篠原 晋、相澤 洋二

1. はじめに

ノン・ツイスト写像とはツイスト条件（非退化条件）を破る保測写像のことをいう。Poincaré-Birkhoff の定理や KAM の定理など、ハミルトン系のカオスへの遷移のシナリオを与える基本的な定理の多くはツイスト条件を仮定しているため、ノン・ツイスト写像には適用できない [1]。したがって、ノン・ツイスト写像のカオスへの遷移は、標準写像などのツイスト条件を満たす写像のものとは大きく異なる。

これまでの研究によって、ノン・ツイスト写像では、摂動に対して非常に頑丈な KAM 曲線が存在することや、カオスへの遷移の相図がフラクタル的な singular な構造を持つことなど興味深い性質が分かってきた。

2. Quadratic twist map

ノン・ツイスト写像の最も簡単な例である quadratic twist map(QTM) を考える。

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n - K\sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + f_\mu(I_{n+1}) \qquad \pmod{2\pi} \end{cases} \tag{1}$$

$$f(I) = 2\pi\mu - I^2$$

ここで、K は摂動パラメータ、μ はツイスト関数 $f(I)$ の極値を調節するパラメータである。θ 座標を 2π 周期としていることと、変換 $(K, I) \mapsto (-K, -I)$ のもとで T が不変であることから、$\mu \in [-0.5, 0.5)$, $K \in [0, \infty]$ の場合を考えれば十分である。

この写像では、$I = 0$ でツイスト関数 $f(I)$ が極値を持つため、次のツイスト条件が満たされていない。

$$\frac{df}{dI} \neq 0 \quad \text{for } {}^\forall I \tag{2}$$

可積分 $(K = 0)$ の時、θ 軸 $(I \equiv 0)$ は、ツイスト条件を破る不変曲線に相当する。このような不変曲線は shearless 曲線と呼ばれる [4,5]。Shearless 曲線も、他の KAM 曲線と同様に、回転数が無理数の場合は、非可積分摂動を加えてもある程度存在し続け、ある臨界パラメータ値で崩壊する。

また、この写像には対称性があり、次の変換 S のもとで不変である (i.e., $TS = ST$)。

$$S : \begin{cases} I' = -I \\ \theta' = \theta - \pi \quad \pmod{2\pi} \end{cases} \tag{3}$$

この対称性から、shearless 曲線が相空間に 1 本だけ存在する場合[1]、次の 4 つの座標を通ることが示せる [6,7]。

$$x_1^\pm = \begin{bmatrix} I_1^\pm \\ \theta_1^\pm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm K/2 \\ \pm\pi/2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

[1] K の値によっては複数本存在する場合がある [7]。

$$x_2^\pm = \begin{bmatrix} I_2^\pm \\ \theta_2^\pm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi(\mu \pm 1/2) \end{bmatrix} \tag{5}$$

3. リコネクション

QTMではツイスト関数が二次関数なので、 shearless曲線の両側には回転数の等しいアイランド・チェインが1つずつ存在する。この対になったアイランド・チェインはtwin-chainsと呼ばれ、それらのセパラトリクスは、ある臨界パラメータ値で結合することが知られている。この現象はHowardとHohsにより、リコネクションと名付けられた [2]。後に見るように、 twin-chainsのリコネクションはカオスへの遷移に大きな影響を与える。

図1(a)(b)に、それぞれ周期1と周期2のtwin-chainsのリコネクション時の相空間を示した。QTMでは先の対称性により、奇数周期のtwin-chainsは、図1(a)の様にアイランドの位相がずれた状態で結合し、偶数周期の場合は図1(b)の様にアイランドの位相が揃った状態で結合する。偶数周期のtwin-chainsの場合、リコネクションの起こる臨界パラメータ値(リコネクション閾値)は、厳密に求めることが出来る。一方、奇数周期の場合は、平均化ハミルトニアンを用いて近似的に求める方法、数値的に求める方法がある [2-7]。

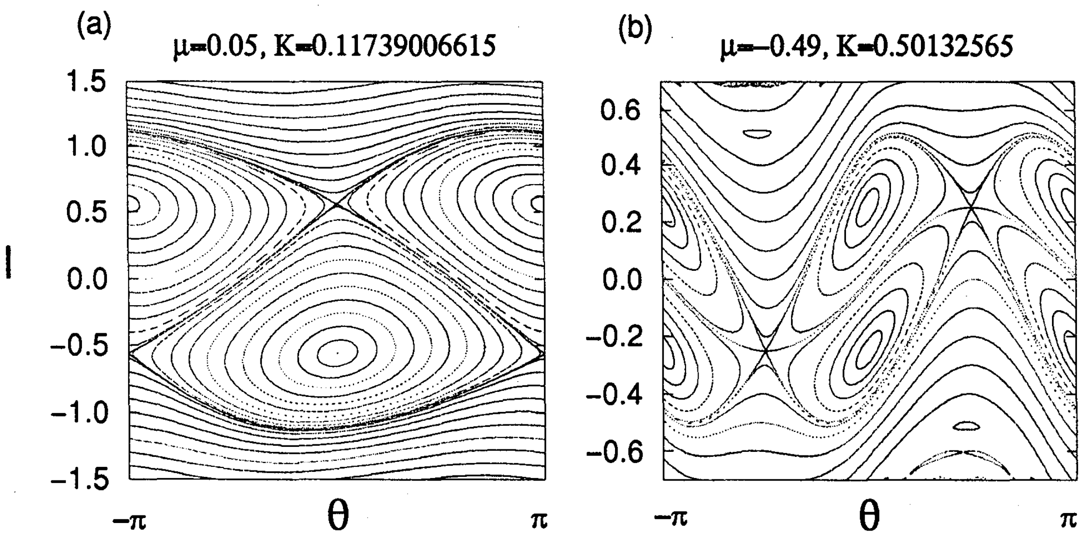

図1. QTMの相空間 (a) 周期1のtwin-chainsのリコネクション、(b) 周期2のtwin-chainsのリコネクション

4. カオスへの遷移

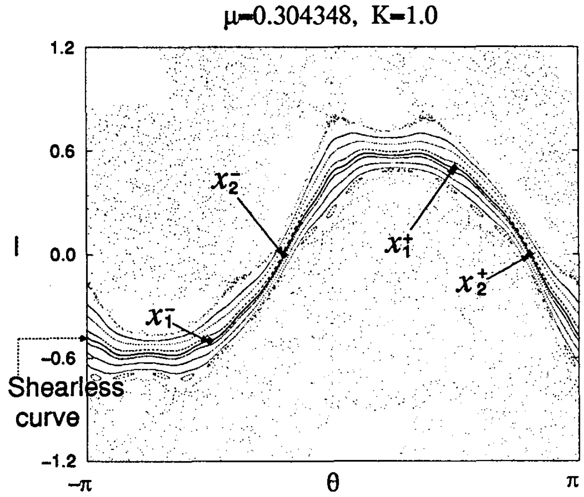

図 2. 頑丈な KAM 曲線

摂動を強くした時の相空間を図 2 に示した。このように、shearless 曲線およびその近くにある KAM 曲線は摂動に対して非常に頑丈である。そこで、式 (4)、(5) で与えられる点 x_1^+, x_2^+ のトラジェクトリが有界領域に留まっているかどうかを調べることにより、相空間が大域的にカオスになる臨界パラメータ値を知ることが出来る。これを数値的に調べた結果を図 3 に示した。図 3 の灰色領域のパラメータ値では、x_1^+、x_2^+ を初期点とするトラジェクトリが両方とも有界領域に留まることを表し、白色領域のパラメータ値では、どちらか一方、あるいは両方のトラジェクトリが非有界であることを表す。灰色領域と白色領域の境界が、大域的にカオスになる、すなわち last KAM の崩壊する臨界パラメータ値を表すことから、この相図を breakup diagram と呼ぶ。

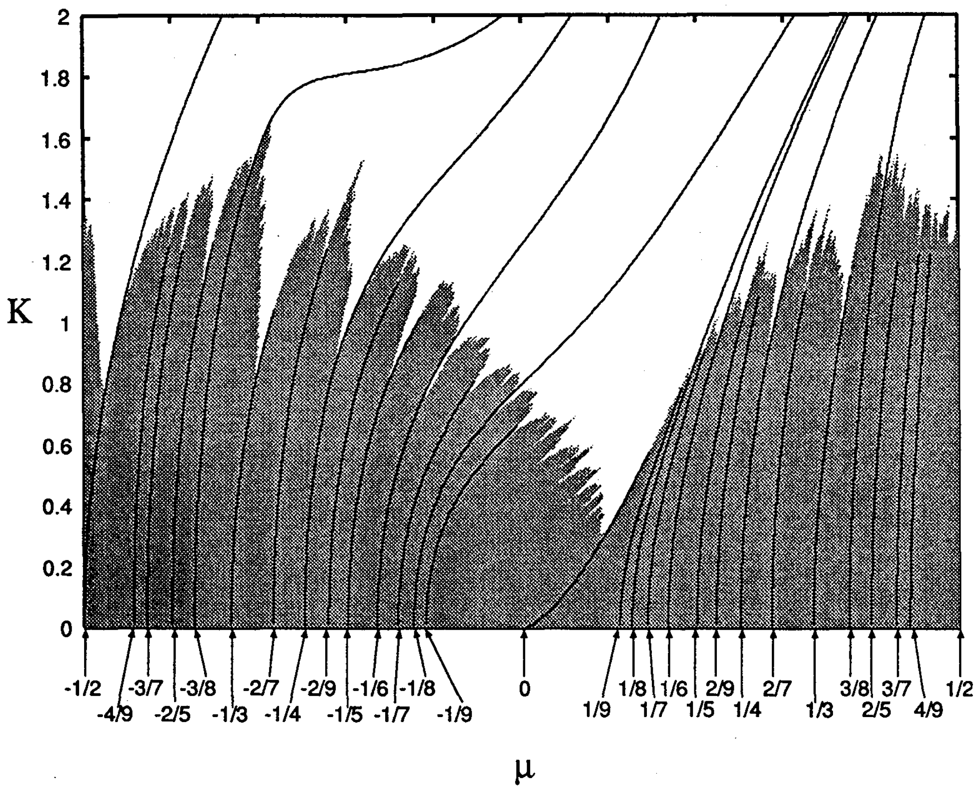

図 3. Breakup diagram とリコネクション閾値

図 3 には μ 軸と有理数 P/Q で交わる曲線が多数描かれているが、これらは回転数 P/Q の twin-chains のリコネクション閾値である。Breakup diagram は無数の singular な構造を持つが、そ

れらは全てリコネクション閾値と対応していることが分かる。

5. まとめと展望

ノン・ツイスト写像 QTM において、大域的なカオスへの遷移が起こる臨界パラメータ値を表す相図 breakup diagram を数値的に得た。Breakup diagram は、twin-chains のリコネクションが、カオスへの遷移に強く影響していることを示すものであった。リコネクション現象を考慮した不変曲線崩壊の理論の構築は今後の課題である。

Breakup diagram からは、カオスへの遷移が起こる際 last KAM がどのような回転数を持っているかという情報までは分からない。図 4(a)(b) は、カオスへと遷移する臨界パラメータ値での相空間である。図 4(a) は shearless 曲線の回転数が golden mean $(\sqrt{5}-1)/2$ の場合で、図 4(b) は silver mean $\sqrt{2}-1$ の場合である。これらの場合、shearless 曲線が上下のカオス成分の境界になっていることから、last KAM は shearless 曲線であると考えられる。一方、リコネクション閾値に沿って摂動 K を増していった場合、shearless 曲線は $K \neq 0$ で twin-chains へと変わるため、明らかに last KAM は shearless 曲線ではない。そこで、shearless 曲線の回転数が一定になるように摂動を増した場合、あるいは、リコネクション閾値に沿って摂動を増した場合、どのような順序で KAM 曲線が崩壊し、どの回転数の KAM 曲線が last KAM になるのかといった、カオスへの遷移の普遍的なシナリオを与えることも今後の課題である。

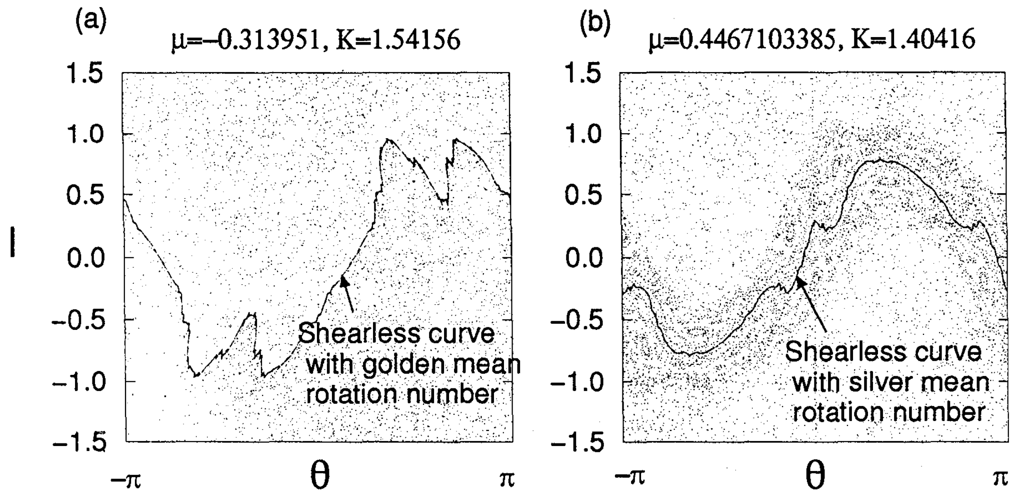

図 4. 臨界パラメータ値での相空間

参考文献

[1] J. Moser, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. -phys. **K1**.,11a,No.1(1962), 1.
[2] J.E. Howard and S.M. Hohs, Phys. Rev. **A29** (1984), 418.
[3] J.E. Howard and J. Humpherys, Physica **D80** (1995), 256.
[4] D. del-Castillo-Negrete, J.M. Greene and P.J. Morrison, Physica **D91** (1996), 1.
[5] D. del-Castillo-Negrete, J.M. Greene and P.J. Morrison, Physica **D100**(1997), 311.
[6] S.Shinohara and Y.Aizawa, Prog.Theor.Phys. **97** (1997), 379.
[7] S.Shinohara and Y.Aizawa (in preparation)