Aharonov-Bohm効果と量子カオス

大阪市立大学工学部　　川畑史郎

1 はじめに

最近の半導体デバイス分野における結晶成長及び微細加工技術の著しい進展に伴って、実際にミクロなスケールのビリヤードを作製することが可能となってきた。そのため、ビリヤード力学系の量子カオスの研究が注目を浴びてきている [1]。その理由としては、弱局在効果 [2] やコンダクタンス揺らぎ [3] などの量子干渉効果に起因する現象が、カオス系と可積分系とで異なる振る舞いをすることが半古典理論を用いて予言され、実験的に検証されたことが挙げられる。ここでは、リング状のトポロジーを持つビリヤードを扱う。このようなビリヤードの中心部分に磁束を印加したビリヤードは Aharonov-Bohm(AB) ビリヤードと呼ばれる。AB ビリヤードのコンダクタンスは、磁束の関数として周期的に振動する。これは、AB 効果と呼ばれるメゾスコピック系の中でも代表的な量子干渉効果である。AB 効果には、磁束量子$\phi_0(=h/e)$ の周期の AB 振動とその半分の周期$\phi_0/2$ の Altshuler-Aronov-Spivak(AAS) 振動が存在する。AAS 振動は、自己平均効果によって非対角な干渉項が打ち消し合う場合に現れ、そうで無い場合には AB 振動が現れる。(自己平均効果が十分に効くためには、系のサイズがフェルミ波長に比べて十分大きくなる必要がある。) 以下、半古典理論を用いて、AB 及び AAS 振動の解析的な表式を導出する。そして、$\hbar \to 0$ の極限でカオス的な場合 (Sinai ビリヤード) と規則的な場合 (ドーナツ型ビリヤード) とで、コンダクタンス振動の高調波成分の効き具合が大きく異なることを示そう。

2 Altshuler-Aronov-Spivak 振動

まず、$\phi_0/2$ 周期の AAS 振動について述べる。Landauer 公式により、コンダクタンスは

$$g = \frac{e^2}{\pi\hbar}\sum_{n,m=1}^{N_M}|t_{n,m}|^2 = \frac{e^2}{\pi\hbar}\left(N_M - \sum_{n,m=1}^{N_M}|r_{n,m}|^2\right) \tag{1}$$

で与えられる。ここで、n,m はリード線中のモードを表す。また、$t_{n,m}$、$r_{n,m}$、N_Mはそれぞれ透過振幅、反射振幅及び全モード数である。AAS 振動は、後方散乱された軌道同士の干渉効果により生じるので、反射振幅

$$r_{n,m} = \delta_{n,m} - i\hbar\sqrt{v_n v_m}\int dy \int dy' \psi_n^*(y')\psi_m(y)G(y',y,E_F) \tag{2}$$

のみについて考える。ここで、$v_m(v_n)$、$\psi_m(\psi_n)$ はリード線内の電子の横方向 (リードに垂直な方向) の速度及び波動関数で、G は遅延グリーン関数である。まず、グリーン関数を、半古典グリーン関数

$$G^{sc}(y',y,E) = \frac{2\pi}{(2\pi i\hbar)^{3/2}}\sum_{s(y,y')}\sqrt{D_s}\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_s(y',y,E) - i\frac{\pi}{2}\mu_s\right] \tag{3}$$

に置き換える。ここで、s は y から出発し y'へ出ていく古典軌道を表し、S_s は古典的作用、D_sは古典軌道の量子揺らぎに対する安定性を記述する行列式、μ_sは Maslov 指数である。式 (3) を式 (2) へ代入し、y と y'について鞍点近似を行うと、半古典反射振幅

$$r_{n,m} = -\frac{\sqrt{2\pi i\hbar}}{2W}\sum_{s(\bar{n},\bar{m})}\mathrm{sgn}(\bar{n})\mathrm{sgn}(\bar{m})\sqrt{\tilde{D}_s}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\tilde{S}_s(\bar{n},\bar{m};E) - i\frac{\pi}{2}\tilde{\mu}_s\right] \tag{4}$$

が得られる。ここで、W はリード線の幅で、$\bar{m} = \pm m$ である。また、式 (4) において、$\tilde{S}_s(\bar{n}, \bar{m}; E) = S_s(y_0', y_0; E) + \hbar\pi(\bar{m}y_0 - \bar{n}y_0')/W$ 、$\tilde{D}_s = (m_e v_F \cos\theta')^{-1} |(\partial y/\partial\theta')_\theta|$ 、$\tilde{\mu}_s = \mu_s + \Theta(-(\partial\theta/\partial y)_{y'}) + \Theta(-(\partial\theta'/\partial y')_\theta)$ (Θはステップ関数) である。古典的反射振幅に対する量子補正項は対角近似を用いて

$$\delta R_D = \frac{1}{2}\frac{\pi}{kW} \sum_{n;s\neq u} \sqrt{\tilde{A}_s \tilde{A}_u} \exp\left[ik\left(\tilde{L}_s - \tilde{L}_u\right) + i\pi\tilde{\nu}_{s,u}\right] \tag{5}$$

で与えられる。ここで、$\tilde{L}_s = \tilde{S}_s/k\hbar$ 、$\tilde{\nu}_{s,u} = (\tilde{\mu}_u - \tilde{\mu}_s)/2$ 、$\tilde{A}_s = (\hbar k/W)\,\tilde{D}_s$ である。次に、波数に関する平均をとると、量子補正には作用が等しい軌道同士の干渉項$\tilde{L}_s = \tilde{L}_u$、すなわち時間反転対称な関係にある軌道同士の干渉項のみが寄与することがわかる。今、磁場を中心の穴の部分にのみ印加しているので、結局作用の差は古典軌道の取り囲む面積$\Theta_s/2\pi \equiv \int_s \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}/B$ を用いて、$(S_s - S_u)/\hbar = 2\Theta_s B/\phi_0$ で与えられる。それにより量子補正項は、

$$\delta\mathcal{R}_D(\phi) \sim \int_{T_0}^{\infty} dT N(T) \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} P(\omega; T) \exp\left(4\pi i \frac{\phi}{\phi_0}\omega\right) \tag{6}$$

となる。$P(\omega;T)$ は、滞在時間が T と $T+dT$ の間にある巻き数ωの分布で、平均ゼロで分散が $\langle\omega^2\rangle = \alpha T/T_0$のガウス分布 ($T_0$は最も短い反射軌道の滞在時間) で与えられる。また、滞在時間はカオス系の場合指数関数分布 $N(T) \sim \exp(-\gamma T)$ 、可積分系の場合はべき分布 $N(T) \sim T^{-\beta}$ に従うことが知られている [2]。結局、式 (6) の積分及び和を実行すると最終的なカオス系の半古典コンダクタンスの表式として次式が得られる [4]:

$$\begin{aligned}\delta g(\phi) &= -\frac{e^2}{\pi\hbar}\frac{1}{4}\frac{\cosh\delta - 1}{\cosh\delta - \cos\left(4\pi\frac{\phi}{\phi_0}\right)} \\ &= -\frac{e^2}{\pi\hbar}\frac{1}{4}\frac{\cosh\delta - 1}{\sinh\delta}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\delta n)\cos\left(4\pi n\frac{\phi}{\phi_0}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{7}$$

ここで、$\delta \equiv \sqrt{2T_0\gamma/\alpha}$である。式 (7) を眺めると、$n = 1$ の項が$\phi_0/2$ を周期とする振動項で、$\phi = (\phi_0/2)N$ (N は整数) のときに最大の値をとる。また、$n \geq 2$ の項はその高次の振動項であり、中心の円を n 回転した後方散乱軌道同士の干渉項に対応するが、$n = 1$ の項に比べて指数関数的に寄与が小さい。従って、カオス系の場合は $n = 1$ の項のみがコンダクタンスに寄与することがわかる。

一方、規則系の場合は、

$$\delta g(\phi) \sim -\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} F\left(\beta - \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}; -\frac{n^2}{2\alpha}\right)\cos\left(4\pi n\frac{\phi}{\phi_0}\right)\right\} \tag{8}$$

となることがわかった [4]。ここで、F は合流型超幾何関数であり、n の大きな極限では $n^{-2\beta-1}$のようにべき的に振る舞う。従って、カオス系の場合とは対照的に、高調波成分がコンダクタンス振動に顕著に寄与するということが期待される。反射係数の高調波成分の寄与の差は、可積分系の方がカオス系に比べて中心のディスクを何度も回る軌道の数が多いことに起因する。

3 Aharonov-Bohm 振動

次に、AB 振動の半古典理論について述べる。はじめに述べたように、自己平均化が効かないような状況に置いては AB 振動が生じる。このような状況では、コンダクタンスの AB 振動は平均の結果消失するので、AB 振動を特徴付ける物理量である自己相関関数

$$C(\Delta B) \equiv \langle\delta g(B)\delta g(B + \Delta B)\rangle_B . \tag{9}$$

を計算する。前節と同様に、半古典グリーン関数を用いて計算をすると以下のようになる。

$$C(\Delta\phi)=\left(\frac{e^2}{\pi\hbar}\right)^2\frac{1}{4}\left\{e^{2\pi i\frac{\Delta\phi}{\phi_0}}\int_0^1 d\sin\theta\int_0^1 d\sin\theta'\sum_{s(\bar{\theta},\bar{\theta}')}\sum_{u\neq s}\tilde{A}_s\tilde{A}_u\exp\left[i\frac{\Delta\phi}{\phi_0}(w_u-w_s)\right]+c.c.\right\}. \tag{10}$$

また、巻き数はガウス分布に従い、滞在時間はカオス系の場合指数関数分布に従うと仮定すると、最終的な表式として次式が得られる [5]。

$$\begin{aligned} C(\Delta\phi) &= \left(\frac{e^2}{\pi\hbar}\right)^2\frac{1}{8}\cos\left(2\pi\frac{\Delta\phi}{\phi_0}\right)\left\{\frac{\cosh\delta-1}{\cosh\delta-\cos\left(2\pi\frac{\Delta\phi}{\phi_0}\right)}\right\}^2 \\ &= \left(\frac{e^2}{\pi\hbar}\right)^2\frac{1}{8}\left(\frac{\cosh\delta-1}{\sinh\delta}\right)^2\cos\left(2\pi\frac{\Delta\phi}{\phi_0}\right)\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\delta n}\cos\left(2\pi n\frac{\Delta\phi}{\phi_0}\right)\right\}^2. \end{aligned} \tag{11}$$

また、規則系の場合は、

$$C(\Delta\phi)=C(0)\cos\left(2\pi\frac{\Delta\phi}{\phi_0}\right)\left\{\frac{1+2\sum_{n=1}^{\infty}F\left(\beta-\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2};-\frac{n^2}{2\alpha}\right)\cos\left(2\pi n\frac{\Delta\phi}{\phi_0}\right)}{1+2\sum_{n=1}^{\infty}F\left(\beta-\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2};-\frac{n^2}{2\alpha}\right)}\right\}^2, \tag{12}$$

となることがわかった。どちらの場合も自己相関関数は、ϕ_0の関数として周期的に振動している。そして、カオス系と規則系の滞在時間分布の違いが、自己相関関数の高調波成分の違いとして反映されていることがわかる。

4 まとめ

バリスティックなABビリヤードにおけるAB効果と量子カオスの関係を概観してきた。ABビリヤードの磁気コンダクタンスには、AB振動とAAS振動が現れ、ビリヤード中を運動する古典粒子のカオス性の違いが高調波成分の寄与の度合いに顕著に反映されることが明らかとなった。このように、AB効果の中にカオスの痕跡を捕らえることが可能であるということは非常に興味深いことであり、今後実験的に検証されることが期待される。

参考文献

[1] メゾスコピック系の量子輸送と量子カオスに関する最近の Review としては、E. Akkermans, G. Montambaux, J.-L. Pichard and J. Zinn-Justin (eds.):*Mesoscopic Quantum Physics*, North Holland (1995) ; K. Nakamura (ed.): Special Issue on *Chaos and Quantum Transport in Mesoscopic Cosmos*: Chaos, Solitons and Fractals **8**, No. 7/8 (1997) など。

[2] H.U. Baranger, R.A. Jalabert, and A.D. Stone: Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 3876.

[3] R.A. Jalabert, H.U. Baranger, and A.D. Stone: Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 2442.

[4] S. Kawabata and K. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. **65** (1996) 3708 ; Chaos, Solitons and Fractals **8** (1997) 1085 ; Phys. Rev. B. **57** (1998) No.7 .

[5] S. Kawabata and K. Nakamura: in preparation.