ハミルトン力学系のトポロジカルな側面

鳴門教育大学　松岡　隆

ハミルトン力学系に対するトポロジカルな観点からの研究は，ポアンカレ以来多岐にわたって行われて来ているが，その中でも，最近大きく発展したものとして，面積を保存する２次元写像によって生成される離散力学系に関するトポロジカルな研究がある．この発展において中心的な役割を果たしたものは，“rotation vector” の概念であるが，この概念は，ポアンカレによって導入された‘回転数（rotation number）’を一般の曲面上の離散力学系にまで拡張したものであり，これによって個々の軌道の大域的な動きをベクトルとして捉えることができる．

ハミルトン系において面積保存写像が自然に現れるような例としては，例えば，次のような状況が考えられる．自由度３の完全可積分ハミルトン系は，３次元トーラスを不変集合として持つが，この上のflowのポアンカレ断面は，２次元トーラス T 上の回転となる．系に摂動を加えて変化させていけば，T 上の回転が徐々に変形していき，単なる回転ではないトーラス上の面積保存写像が現れる．また，自由度２のハミルトン系において，エネルギー曲面がある曲面 M と円周の直積となり，更に，その上の flow の断面として M 上の面積保存写像が現れる場合が理論上の可能性として考えられる．

本稿では，rotation vector の概念を中心に進められた最近の研究発展について，概括的な解説を行う．また，最後の節では，rotation vector の理論を周期軌道のねじれ数に対して応用する．

まず，１節で，最近の研究発展の基となった２つの古典的な結果について簡単に触れる．rotation number や rotation vector の概念を定義するためには，写像に対しその被覆空間へのリフト（持ち上げ）を取る操作が必要であるが，２節では，写像のリフトについて説明する．また，同時に，写像の不動点のトポロジカルな特徴付けを与える不動点指数についても解説しておく．以上の準備の下に，３節において，円環（アニュラス）上の離散力学系に対し軌道の回転数を定義し，４節でアニュラス上の系に関する現在までの研究による成果について解説する，５節では，トーラス上の力学系に対し，軌道のrotation vector を定義し，それに関する研究について解説する．６節では，一般の曲面に関する研究の進展について述べる．一般の曲面の場合においても，rotation vector は写像のリフトを用いて定義できるが，ここでは，より直観的な理解が得やすいホモロジーを用いた方法で定義を説明することにする．最後の７節では，６節での結果の一部を，周期軌道のねじれ数について応用してみた．

1．古典的な結果

ここでは，回転数に関連した２つの古典的な定理を紹介する．(回転数の定義は３節で与える.) f を円周 S^1 上の向きを保つ同相写像とする．γ を f によって生成される S^1 上の離散力学系の１つの軌道とする．γ の平均的な回転量 ω が存在するとき，この平均量 ω をγ の回転数と呼び，また，γ を ω-軌道と呼ぶ．ポアンカレは，S^1 上のすべての軌道に対し，その回転数が存在し，しかもその値は点の取り方に依らないことを示した．従って，この量は f の回転数（rotation number）と呼ばれる．下に述べた定理は回転数に関するポアンカレとダンジョアによる結果（[22]，[1] 参照）を１つの定理にまとめたものである．この定理は，円周上の力学系の定性的構造の本質的な部分が，写像の回転数という１つの実数のみによって決まってしまうことを示している．

定理１（Poincaré – Denjoy）　$f : S^1 \to S^1$ を向きを保つ同相写像，$\rho(f)$ を f の回転数とするとき，f が周期軌道をもつための必要十分条件は，$\rho(f)$ が有理数となることである．更に，

（１）$\rho(f)$ が既約有理数 p/q に等しいとき，任意の$x \in S^1$ は p/q-周期点であるか，または，p/q-周期点に漸近する．

（２）$\rho(f)$ が無理数で，かつ f がC^2級であれば，f は角度 $\rho(f)$ の回転と位相共役である．

円周と閉区間の直積空間を**アニュラス**（annulus）または円環と呼ぶ．軌道の回転数の概念は，アニュラス上の向きを保つ同相写像の場合でも，軌道の S^1 方向成分の回転数として定義される．ただし，今度の場合は，回転数はいつも定義されるとは限らず，また，その値は一般に軌道によって異なる．しかしながら，ポアンカレとバーコフは，回転数の概念が，アニュラス上のある種の力学系に対して重要な役割を果たすことを示した．$f : A \to A$ をアニュラス A 上の向きを保つ同相写像で，A の境界の２つの成分 $\partial_1 A, \partial_2 A$ をそれぞれ自分自身に移すものとするとき，$\partial_1 A, \partial_2 A$ への f の制限はそれぞれ円周上の向きを保つ同相写像となり，回転数が定まる．これらを ρ_1, ρ_2 と表す．

定理２（Poincaré – Birkhoff）

$f : A \to A$ をアニュラス A 上の向きを保つ同相写像で，次の性質をみたすものとする．

（１）面積を保存する．

（２）境界の成分 $\partial_1 A, \partial_2 A$ をそれぞれ自分自身に移す．

このとき，$\rho_1 < 0$, $\rho_2 > 0$ であれば（ツイスト条件），f は２個以上の不動点を持つ．更に，ρ_1 と ρ_2 の間にある任意の既約有理数p/q に対し，２個以上の p/q-周期軌道が存在する．

この定理が示すように，元々１次元系の概念であった回転数の概念を２次元系に拡張することによって，周期軌道の存在のための簡明な十分条件を得ることができる．面積保存力学系に関する最近の研究は，このポアンカレ – バーコフの定理を，可能な限り拡張し，精密化することを中心課題として発展してきた．これらの成果を，４節以降で具体的に説明していくが，その前に，回転数の厳密な定義を与えておこう．

2.写像のリフトと不動点指数

写像の回転数を定義するためには，アニュラスの被覆空間，および写像のリフト (lift) の概念について述べることが必要である．ここでは，なるべく直観的に説明したい．A の点を (θ, y) と表すことにする．ここに，$\theta \in S^1$，$0 \leq y \leq 1$ である．また，S^1 を単位区間 $[0,1]$ の両端をくっつけたものと見なし，θ を $0 \leq \theta \leq 1$ をみたす実数と考えることも許す．さて，例えば，f は A を図1 (a) に示したように移すものとする．この図中の c は，θ 成分が0である A 内の線分 $\{0\} \times [0,1] = \{(0,y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$ を表す．写像 f による線分 c の像 $f(c)$ は，右側の図で実線で示した．f の定義域と値域を，それぞれ曲線 c，$f(c)$ に沿って切り（図1 (b)），さらに，図1 (c) のようにこれらを真っ直ぐに伸ばす．こうして，写像を見やすくすることができたが，定義域と値域の集合が異なるため，写像の合成ができず，離散力学系として扱うことができなくなる．この不都合をなくすために，図形とその上の写像を無限個並べる（図1 (d)）．こうして出来る空間を $\tilde{A}$，写像を $\tilde{f} : \tilde{A} \to \tilde{A}$ とかくと，$\tilde{A}$ は実直線と区間の直積 $\mathbf{R} \times [0,1]$ となる．こうして，同じものが無限に重複するという短所はあるものの，真っ直ぐな空間上の力学系が出来上がり，軌道の様子がつかみやすくなる．こうしてできた写像 $\tilde{f}$ を，元の写像 f の**リフト**という．$\tilde{A}$ 上の点をそれに対応する A の点に移す写像を，**射影**といい，$pr : \tilde{A} \to A$ と書く．

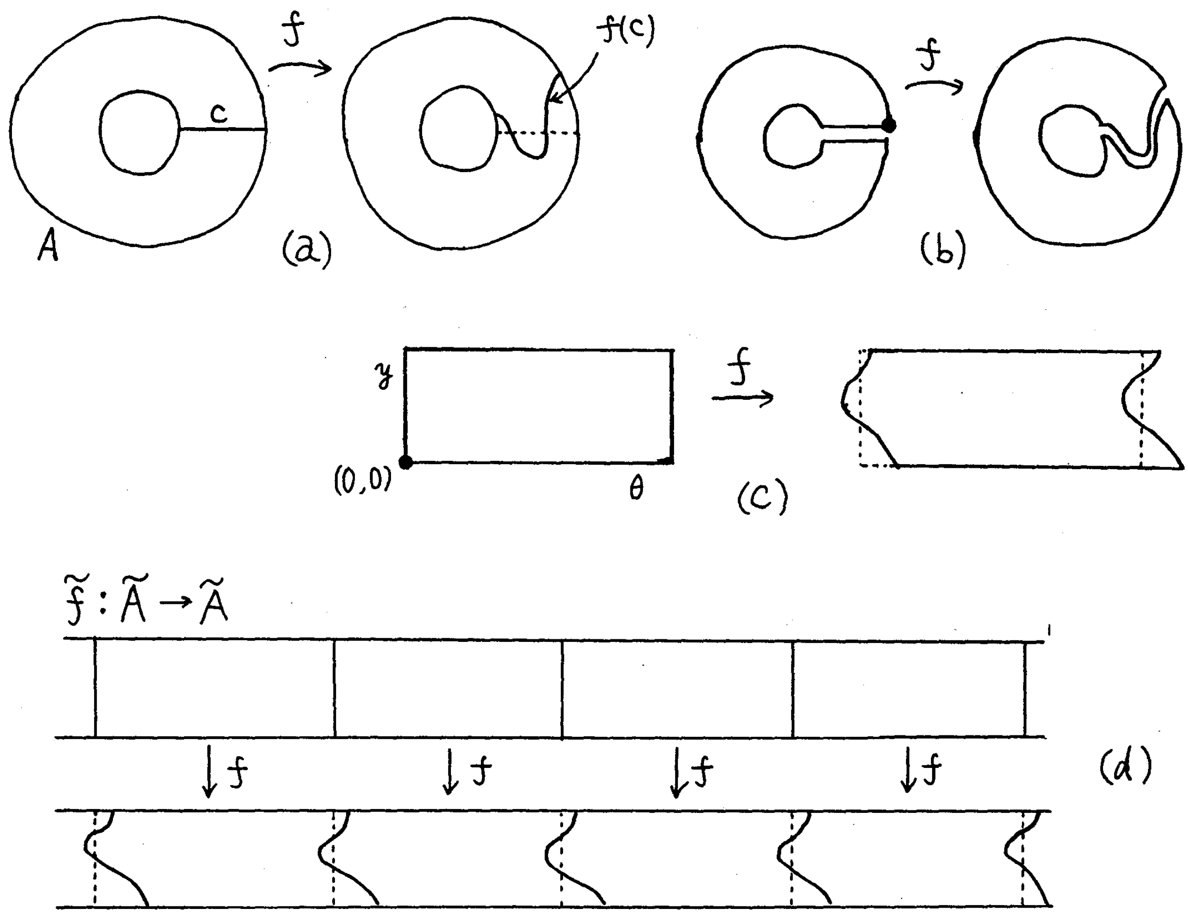

図1

さて，ここで，写像の不動点のトポロジカルな研究において必要不可欠な概念である不動点指数（fixed point index）について簡単に紹介する．$f : U \to \mathbf{R}^2$ を平面 $\mathbf{R}^2$ 内の開集合 U 上の連続写像，$x \in U$ を f の孤立不動点とする．不動点 x は孤立しているので，x を囲む十分小さい単純閉曲線 C 上に不動点は無い．従って，平面内の閉曲線 $\{f(z) - z \mid z \in C\}$ は原点を通過しない．この曲線の原点の周りの巻き数（winding number），すなわち原点の周りを回る回数は，C の選び方に依らずに決まるが，この回数を x の**不動点指数**といい，$\mathrm{ind}(x)$ と表す．

例. f の不動点 x での微分 $Df(x)$ の固有値を λ, μ（$|\lambda| \le |\mu|$）とする．f が面積保存であるとき，x は固有値の値により，次の５つのタイプに分類される（例えば，[14], p.31 参照）．

$0 < \lambda < 1 < \mu \quad (\mathrm{tr}A > 2)$	正則双曲型
$\lambda = \mu = 1 \quad (\mathrm{tr}A = 2)$	正則放物型
$\lvert\lambda\rvert = \lvert\mu\rvert = 1, \lambda, \mu$ は実数でない $(2 > \mathrm{tr}A > -2)$	楕円型
$\lambda = \mu = -1 \quad (\mathrm{tr}A = -2)$	逆放物型
$\mu < -1 < \lambda < 0 \quad (\mathrm{tr}A < -2)$	逆双曲型

x が楕円型および逆双曲型のときは $\mathrm{ind}(x) = 1$ であり，正則双曲型のときは $\mathrm{ind}(x) = -1$ であることは，不動点指数の定義よりすぐに分かる．x が放物型であるときには，不動点指数は一般に f の Taylor 展開の２次以降の項に依存するが，次の定理により，つねに１以下であることが分かる．

定理３（Simon, Nikishin, Pelikan-Slaminka[20]）
面積保存である同相写像の不動点 x に対し，$\mathrm{ind}(x) \le 1$ が成り立つ．

３．回転数の定義

$f : A \to A$ を境界の各成分と A の向きを保つ同相写像とし，f のリフト $\tilde{f} : \tilde{A} \to \tilde{A}$ を一つ選ぶ．$x \in A$ とする．$\tilde{A}$ の点 $\tilde{x}$ で，$pr(\tilde{x}) = x$ となるものを１つ選ぶ．このとき，極限値

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\theta_n - \theta_0}{n}$$

が存在するなら，この値を $\rho(x)$ と表し，x の**回転数**という（図２）．ここに，θ_n は写像 $\tilde{f}$ の n 回合成による $\tilde{x}$ の像 $\tilde{f}^n(\tilde{x})$ の θ-成分である．回転数 $\rho(x)$ は $\tilde{x} \in \tilde{A}$ の取り方によらずに決まるが，リフト $\tilde{f}$ を取り替えると整数分だけ変化する．

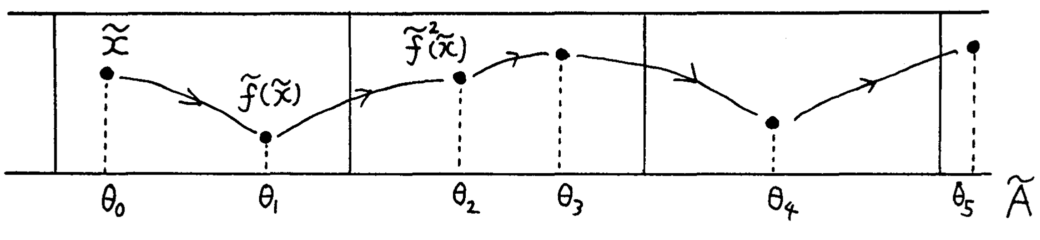

図２

注：$f:S^1\to S^1$ に対しても，同様に $\rho(x)$ が定義される．1節で既に述べたように，$\rho(x)$ は常に存在して値が一定となり，f の回転数と呼ばれる．

回転数全体の集合

$$\rho(f)=\{\rho(x)\mid x\in A,\ \rho(x)\text{ が存在 }\}$$

を f の **rotation set** という．rotation set は，別の方法によっても定義できる．まず，点 x に対し，

$$\rho_+(x)=\limsup_{n\to\infty}\frac{\theta_n-\theta_0}{n},\qquad \rho_-(x)=\liminf_{n\to\infty}\frac{\theta_n-\theta_0}{n},$$

とおき，更に $\bar\rho(x)=[\rho_-(x),\rho_+(x)]$ とおく．これは，数列 $\{(\theta_n-\theta_0)/n\}$ の集積点全体と一致する．この区間を x の rotation interval という．$\rho(x)$ は存在するとは限らないが，$\bar\rho(x)$ の方はつねに存在する．しかもこのとき，明らかに次が成り立つ．

$$\rho(x)\text{ が存在}\iff\rho_+(x)=\rho_-(x)\iff\bar\rho(x)\text{ が1点のみからなる.}$$

rotation set は，常に閉集合であり（Handel [11]），また，$\rho(f)=\bigcup_{x\in A}\bar\rho(x)$ が成り立つ（[2], [3] 参照）．

$f:A\to A$ が条件「θ を固定するとき，y をパラメータとする曲線 $f(\theta,y)$ の θ-成分は y について単調増加である」をみたすとき，monotone-twist と呼ばれる．$f:A\to A$ が monotone-twist であるとき，ρ_1, ρ_2 を境界成分での回転数（$\rho_1\le\rho_2$）とすれば，$\rho(f)$ が閉区間 $[\rho_1,\rho_2]$ に含まれることは自明であるが，実は Aubry–Mather 理論により，この逆も成り立つことが分かっており，結局 $\rho(f)=[\rho_1,\rho_2]$ となる（[3],[19] 参照）．

4．アニュラス上の面積保存写像

この節では，$f:A\to A$ を A 上の同相写像とし，つねに境界の各成分と向きを保つと仮定する．また，リフト $\tilde f:\tilde A\to\tilde A$ を一つ固定する．1節で紹介したポアンカレ-バーコフの定理は，境界での回転数 ρ_1,ρ_2 の間にあるすべての有理数は，周期軌道の回転数として実現されるということを主張するものであった．この主張は，仮定中の語句「境界の」を取り去っても成り立つことが Franks によって示されている．

定理4 (Franks [7])　f は面積保存とする．$\alpha,\beta\in\rho(f)$ とする．このとき，$\alpha\le\frac{p}{q}\le\beta$ となる任意の既約有理数 p/q に対し，p/q-周期軌道が2個以上存在する．更に，p/q-周期軌道が有限個しかないなら，そのうちの1個の不動点指数は1である．特に，

（1）$\dfrac{p}{q}\in\rho(f)\iff\dfrac{p}{q}$-周期軌道が存在.

（2）$\rho(f)$ はつねに閉区間である.

注：この定理は，「面積保存」より広い条件「任意の点 x が非遊走的」の下で証明されている．

さて，rotation set について，Boyland により大変面白い定理が得られている．γ を f の周期軌道とする．γ に対しその組みひも型が定義されるが（[18]，[4]，[2] 参照），組みひも型が

‘単純回転’であるとき，γ は**単調型**であるといわれる[18],[2]．f が monotone-twist である場合には，この定義はもっと簡単に説明できる．$\tilde{\gamma}$ を γ のリフトとする．つまり，$\tilde{\gamma}$ は射影 $pr:\tilde{A}\to A$ によって，γ の点に移される $\tilde{A}$ の点すべての集合である．このとき，$\tilde{\gamma}$ の異なる2点の θ-座標の大小関係が，$\tilde{f}$ によって移しても変わらないとき，γ が単調型である．Boyland は，‘非単調型軌道’が存在すれば，rotation interval のある部分区間を求めることができることを示した．p/q を既約有理数とする．次数 q のファレー(Farey)数列（分母が q 以下の既約有理数を大小の順に並べてできる数列）において，p/q の両隣の有理数を $a/b, c/d$ とする．つまり，分母が q 以下の既約有理数で p/q より小さく（大きく），しかも p/q に最も近いものを a/b (c/d) とする．このとき，閉区間 $[a/b, c/d]$ を p/q のファレイ区間といい，$FI(p/q)$ とかく．例えば $FI(2/5)=[1/3,1/2]$, $FI(1/3)=[0/1,1/2]$, $FI(3/7)=[2/5,1/2]$.

定理5 (Boyland [2]) 非単調 p/q-周期軌道が存在すれば，$\rho(f)\supset FI(\frac{p}{q})$ である．

この定理によって，不変曲線の非存在性に関する情報を得ることができる．例えば，f が 2/5-非単調型周期軌道を1つでも持てば，1/3 と 1/2 の間にある任意の有理数 p/q に対し，f は p/q-周期軌道をもつことが分かる．従って，このとき，$1/3<\omega<1/2$ をみたす任意の無理数 ω に対し，回転数が ω である不変閉曲線は存在しないことが分かる．(monotone-twist 写像の場合の不変曲線の非存在性については，[5] にも関連した結果がある．)

注：Boyland の定理においては，面積保存の仮定は必要ないことに注意.

5．トーラス上の面積保存写像

T を2次元トーラスとする．$f:T\to T$ を同相写像とする．前節では，アニュラス上の写像は境界の成分と向きを保つという条件を仮定した．この条件は，「f は恒等写像 id とイソトピック（即ち，id から f への連続変形 f_t $(0\le t\le 1)$ が存在する)」という条件と同値である．ここでも，トーラス上の写像 f は id とイソトピックと仮定する．トーラスの被覆空間 $\mathbf{R}^2$ を考える．f のリフト $\tilde{f}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ を一つ固定する．ベクトルの極限

$$\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{f}^n(\tilde{x})-\tilde{x}}{n}\in\mathbf{R}^2$$

が存在するとき，この極限値を x の **rotation vector** という．rotation vector が $\omega\in\mathbf{R}^2$ である軌道を ω–軌道という.

注：f が id とイソトピックという仮定は，$\rho(x)$ の定義に対し必要である．実際，一般の場合，$\rho(x)$ は $\tilde{x}$ の取り方に依存してしまい定義できない.

次に述べる定理は，前節のアニュラスに対する Franks の定理（定理4）のトーラス版である．ただし，アニュラスの場合は面積保存の条件が仮定されていたが，トーラスの場合，面積保存の仮定は全く必要無いという大きな相違点がある．また，今度は，2個以上の不動点の存在は保証されない．α,β,γ を $\rho(f)$ の3つの元とする．これらの元が張る凸包（convex hull）を $\mathrm{Conv}(\alpha,\beta,\gamma)$ と表す．集合の内点全体のなす部分集合をその集合の内部という.

定理6 (Franks [9], Llibre-MacKay [13])　α, β, γ を $\rho(f)$ の一次独立な元とする．このとき，凸集合 $\mathrm{Conv}(\alpha, \beta, \gamma)$ の内部に含まれる任意の有理数ベクトル $(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q})$ に対し，$(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q})$-周期軌道が存在する．

面積保存系の場合は，次の事実も成り立つ．

定理7 (Franks [8], Flucher [6]) $f : T \to T$ は面積 μ を保存し，$\int_M \rho(x) d\mu = 0$ であるとする．このとき，
（1）f の不動点は２個以上
（2）不動点が有限個なら，そのうちの１個は不動点指数が１．

注：f が可微分同相のときは，３個以上の不動点が存在することが知られている（有名なArnold 予想のトーラスの場合の解答）．(Conley-Zehnder, 1983)

6．一般の曲面上の面積保存写像

M をコンパクトな曲面とする．$H_1(M; \mathbf{R})$ を M の１次元$\mathbf{R}$-係数ホモロジー群とする．これは，$\mathbf{R}$ 上のベクトル空間である．例えば，$H_1(A; \mathbf{R})$，$H_1(T; \mathbf{R})$ は，それぞれ $\mathbf{R}$，$\mathbf{R}^2$ に同型である．$l(t)$ $(0 \le t \le 1)$ を M 内の閉曲線とするとき，$l(t)$ が定める１次元ホモロジー類を $[l] \in H_1(M; \mathbf{R})$ と表す．

さて，$f : M \to M$ を id とイソトピックな同相写像とする．x を M の任意の点とするとき，以下に述べるような方法で，各自然数 n に対し，閉曲線 $l_{n,x}(t)$ を対応させる．まず，M の基点 $*$ と，M 上のリーマン計量を任意に選ぶ．$x \in M$ に対し，基点 $*$ から x への測地線を選び，α_x とかく．f_t $(0 \le t \le 1)$ を id から f へのイソトピーとする．このとき，$l_{n,x}(t)$ を３つの道 α_x, $f_t^n(x)$, $\alpha_{f^n(x)}^{-1}$ をつないでできる閉曲線とする（図３）．

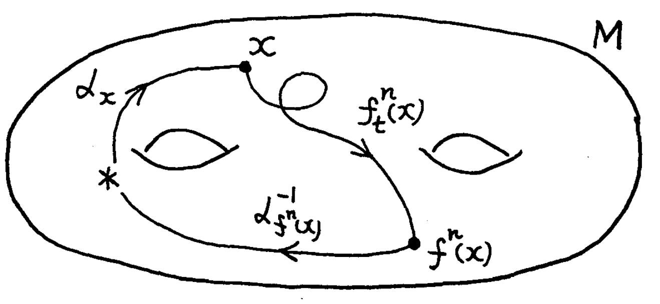

図３

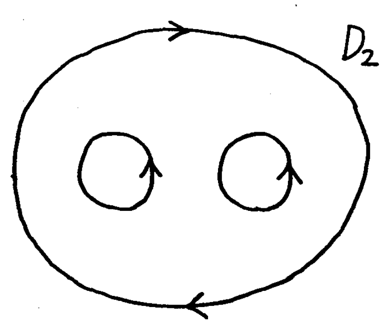

図４

曲線 $l_{n,x}(t)$ のホモロジー類 $[l_{n,x}]$ を用いた極限

$$\rho(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{[l_{n,x}]}{n} \in H_1(M; \mathbf{R})$$

を x の (homological) **rotation vector** という．また，$\rho(f) = \{\rho(x) \mid x \in M\}$ を f の **rotation set** と呼ぶ．これらの定義は，アニュラスやトーラスの場合，前に説明したリフトを用いたものと一致する．

b を M のBetti数（$H_1(M;\mathbf{R})$ の次元）とする．更に，$H_1(M;\mathbf{R})$ を $\mathbf{R}^b$ と同一視し，$\rho(x)\in\mathbf{R}^b$ と見なす．M が境界をもたないときは，種数（genus）を g とかくとき，$b=2g$ である．整数全体を $\mathbf{Z}$ とかく．定理6は次のように一般化される．

定理8 (Hayakawa [12], Pollicott-Sharp [21])
$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{b+1}$ を一次独立な $\rho(f)$ の元とする．次の条件（$*$）をみたすとする．
（$*$）「周期軌道で，そのrotation vector が凸包 $Conv(\alpha_1,\cdots,\alpha_{b+1})$ の内点であるものが存在する.」
このとき，$Conv(\alpha_1,\cdots,\alpha_{b+1})$ の内部に含まれる任意の既約有理数ベクトル $\dfrac{p}{q}$（q：自然数，$p\in\mathbf{Z}^b$）に対し，$\dfrac{p}{q}$-周期軌道が存在する．

注：この定理も面積保存の仮定は必要ない．条件（$*$）を取り去ることはできない．実際，Matsumoto [16] の中に,（$*$）がみたされないときの反例が挙げられている．

定理7は，次の様に一般化される．

定理9 (Franks [10]) $f:M\to M$ は面積 μを保存するとする．$-\rho_\mu(f)=\sum_i c_i\alpha_i$ とする．ここに，$\rho_\mu(f)=\int_M\rho(x)d\mu$，$\alpha_i\in\rho(f)$，$c_i\geq 0$．このとき，自明なホモトピー類をもつ不動点が2個以上存在する．もしそれらが有限個なら，そのうちの1個の不動点指数は1となる.（ここに，不動点 x のホモトピー類とは，閉曲線 $f_t(x)$ $(0\leq t\leq 1)$ のホモトピー類のことである.）

例．2つの穴があいた円板 D_2 において，f が境界の点を図4に示した向きに回転するとする．α_i $(i=1,2,3)$ を3つの境界成分が定める rotaion vector とする．このとき，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ によって2次元ベクトル空間$H_1(D_2;\mathbf{R})$ が張られるので，$-\rho_\mu(f)$ がどのようなベクトルであろうと，適当な $c_i\geq 0$ によって，定理9のような形に表される．よって，ホモトピー類が自明な不動点が2個以上存在することが分かる．

7．周期軌道のねじれ数への応用

ここでは，前節の定理9を，周期軌道のねじれ数の問題に応用する．M を平面 $\mathbf{R}^2$ 内に含まれるコンパクト曲面とする．$f:M\to M$ を向きを保つ C^1級同相写像とし，f は id にイソトピックであると仮定する.（M が円板の場合には，向きを保つ同相写像はつねに id にイソトピックであることが知られている（Alexnaderのトリック）.）このようなイソトピー f_t を一つ取る．

さて，x を f の不動点とするとき，x の**ねじれ数** (torsion number) が，パラメータ t が0から1まで経過する間に，イソトピー f_t の下で x の近傍の点がx の周りを何回転するかを表す回転量として定義される．すなわち，S^1 上の向きを保つ同相写像 $g_t:S^1\to S^1$ を $g_t(v)=\frac{Df_t(x)v}{|Df_t(x)v|}$ により定めるとき，g_1 の回転数 $\rho(g_1)$ がねじれ数である．ただし，$\rho(id)=0$ と正規化しておく．x のねじれ数を $\mathrm{tor}(x,f)$ と表す．写像のねじれ数に関してこれまでに

得られている結果を紹介しておく.

定理10 (Mather [15]) $f: A \to A$ を面積保存 monotone-twist 写像とする. x を f の不動点とし, I を x のエネルギー関数に関するモース指数とするとき,

$$\begin{array}{ll} \mathrm{tor}(x) = -I/2 & I: \text{偶数のとき} \\ -[\frac{I}{2}] - 1 \le \mathrm{tor}(x) \le -[\frac{I}{2}] & I: \text{奇数のとき.} \end{array}$$

定理11 (Matsuoka [17]) f を円板 D からそれ自身の中への向きを保つ同相写像とする. このとき, 各双曲的不動点 (saddle) のねじれ数は, 双曲的不動点以外の不動点全体のなす組みひも型 (braid type) によって一意的に決まる.

さて, 定理9のねじれ数の問題への応用例を1つ述べる. $f: D \to D$ を向きを保つ面積保存同相写像とし, $f_t: D \to D$ を id から f へのイソトピーとする. 不動点指数が1である f の不動点は x_1, x_2, x_3, x_4 の4個だけとし, 更に, これらはすべて楕円型, もしくは逆双曲型とする. また, これらはイソトピー f_t の下で図5に示されるように円板上を動くとする. このとき, 定理9を用いて, ねじれ数に関する次の不等式を示すことができる.

$$0 < \mathrm{tor}(x_i) < 2 \quad (i = 1, 2), \qquad -2 < \mathrm{tor}(x_i) < 0 \quad (i = 3, 4).$$

この例に示されるように, 面積保存写像の場合, 定理9を用いて, 定理11を双曲型以外の不動点にまで拡張できる可能性があると思われる.

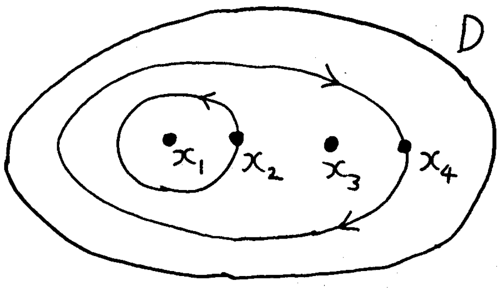

図5

参考文献

[1] 青木 統夫, 力学系・カオス – 非線形現象の幾何学的構成 – (1996), 共立出版.

[2] P. Boyland, Rotation sets and monotone periodic orbits for annulus homeomorphisms, Comment. Math. Helvetici **67** (1992), 203–213.

[3] P. Boyland, The rotation set as a dynamical invariant, in "*Twist Mappings and Their Applications*" (eds R. McGehee and K.R. Meyer), IMA Volumes in Math. and its Appl. Vol. 44 (1992), 73–86.

[4] P. Boyland, Topological methods in surface dynamics, Topology and its Appl. **58** (1994), 223-298.

[5] P. Boyland and G. Hall, Invariant circles and the order structure of periodic orbits in monotone twist maps, Topology **26** (1987), 21–35.

[6] M. Flucher, Fixed points of measure preserving torus homeomorphisms, Manuscripta math. **68** (1990), 271–293.

[7] J. Franks, Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem, Annals of Math. **128** (1988), 139–151.

[8] J. Franks, Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 8* (1988), 99–107.

[9] J. Franks, Realizing rotation vectors for torus homeomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc. **311** (1989), 107–115.

[10] J. Franks, Rotation vectors and fixed points of area preserving surface diffeomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 2637–2662.

[11] M. Handel, The rotation set of a homeomorphism of the annulus is closed, Commun. Math. Phys. **127** (1990), 339–349.

[12] E. Hayakawa, A sufficient condition for the existence of periodic points of homeomorphisms on surfaces, Tokyo J. Math. **18** (1995), 213–219.

[13] J. Llibre and R. S. MacKay, Rotation vectors and entropy for homeomorphisms of the torus isotopic to the identity, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **11** (1991),115–128.

[14] R. S. MacKay, *Renormalisation in Area-Preserving Maps*, Advanced Ser. in Nonlinear Dynamics Vol. 6 (1993), World Scientific.

[15] J. Mather, Amount of rotation about a point and the Morse index, Commun. Math. Phys. **94** (1984), 141–153.

[16] S. Matsumoto, Rotation sets of surface homeomorphisms, preprint.

[17] T. Matsuoka, Braid type and torsion number for fixed points of orientation-preserving embeddings on the disk, Math. Japonica **42** (1995), 25–34.

[18] 松岡 隆，組みひもの理論と力学系（講義ノート），物性研究 **67–1** (1996), 1–56.

[19] K. R. Meyer and G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Appl. Math. Sciences Vol. 90 (1991), Springer–Verlag.

[20] P. Pelikan and E. Slaminka, A bound for the fixed point index of area preserving homeomorphisms of two manifolds, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **7** (1987), 463–479.

[21] M. Pollicott and R. Sharp, Growth of periodic points and rotation vectors on surfaces, Topology **36** (1997), 765–774.

[22] J. A. Walsh, Rotation vectors for toral maps and flows: A tutorial, International J. of Bifurcation and Chaos **5** (1995), 321–348.