
修士論文 (1997年度)

量子系の準位統計理論と Anderson 転移*

日本大学大学院理工学研究科物理学専攻 坂元 啓紀†

目次

1 はじめに	2
2 エネルギー準位間のゆらぎの性質	3
2.1 いろいろな統計量の定義	3
2.2 ランダム数列、Poisson 統計	6
3 ランダム行列理論、Wigner-Dyson 統計	7
3.1 Gauss 型直交・ユニタリ・シンプレクティック集団	9
3.2 準位相関関数	11
3.2.1 平均エネルギー準位密度	11
3.2.2 2-準位相関関数	14
3.3 複雑な量子系が示すエネルギー準位の統計的性質	18
4 ランダム行列理論の普遍的な 2-準位長距離相関関数	21
4.1 汎関数方程式の方法による 2-準位長距離相関関数の普遍性	23
4.2 レプリカ法による Green 関数の計算	26
4.2.1 Gauss 型直交集団	27
4.2.2 Gauss 型ユニタリ集団	30
4.2.3 Gauss 型シンプレクティック集団	32
4.2.4 3 体連結 Green 関数	34
4.3 ダイアグラム展開法による Green 関数の計算	35
4.3.1 Gauss 型直交集団	35
4.3.2 Gauss 型ユニタリ集団	38
4.3.3 Gauss 型シンプレクティック集団	40
4.3.4 3 体連結 Green 関数	42
4.4 「超対称性」の方法とレプリカ法の違い	45
4.5 計算結果、この章までのまとめ	45
5 不規則電子系 (Anderson 転移) が示すエネルギー準位の統計的性質	46
5.1 Anderson 局在、Anderson 転移	46
5.2 2次元の非局在-局在転移と Anderson 転移点直上での準位統計	48
5.3 J. T. Chalker らの結果	50
6 まとめ、今後の課題	54
7 謝辞	54

*この小論は日本大学に提出した修士論文に加筆・修正をしたものである。

†e-mail: yossi@phys.cst.nihon-u.ac.jp

A Σ^2 統計量の導出	55
B Δ_3 統計量の導出	56
C 最近接準位間隔分布 $P(s)$ (Wigner 分布) の導出	58

1 はじめに

系の物理的な性質は波動関数の振る舞いがわかれば理解できると考えられる。しかし、(時間に依らない) Schrödinger 方程式を解き、波動関数を求めることができるのはごく限られた場合だけで、エネルギー準位についても同様である。そこで、系で観測された個々のエネルギー準位の性質を調べることをあきらめて、観測されたエネルギー準位の統計的な性質を調べることにより、系の物理的な性質を読みとろうというのが量子準位統計である。特に複雑な量子系で観測されるエネルギー準位の統計的な性質を調べる理論として導入されたのがランダム行列理論である。

ランダム行列理論は約 45 年前、E. P. Wigner により、複雑な量子系の示すエネルギー準位の統計的性質を記述する道具として導入された [1]。初期の頃は、特に重い原子核中で見られる中性子共鳴のように、多くの自由度が強く結合している系の複雑なスペクトルの統計的な性質を評価するために用いられ、盛んに研究がなされていた [2, 3]。以来ランダム行列理論は量子カオスや結晶構造の乱れた電気伝導体、QCD のカイラル対称性の破れ [4]、2 次元量子重力理論などさまざまな分野にも適用され、さまざまな物理現象を再現している [5]。その際重要になる量は 2-準位クラスター関数と呼ばれる量で、多くの統計量 (物理量) はこれにより記述される。この 2-準位クラスター関数はランダム系のハミルトニアン行列に対して 1 つのパラメーター調整をただけの非常に簡単な Gauss 型の確率分布から導かれる。Gauss 型の確率分布から導かれた 2-準位クラスター関数が、なぜ多くの物理現象を再現するのか? その理由は明らかにされていない。

以上のことを理論的に明らかにする一つの研究方法として、ランダム行列理論自身の数学的な研究が行われている。そのきっかけとなったのが E. Brézin らの仕事 [6] である。彼らは非 Gauss 型の確率分布から計算した 2-準位クラスター関数が、唯一つのパラメーター調整だけで Gauss 型の確率分布から計算されたものと一致するということを数学的に証明した。したがって、ランダム行列理論自体の数学的な研究を通して少なくとも Gauss 型の理論がより広いモデルを記述できることがわかる。実際の物理系のある種の観測を再現するという事実から、この普遍類が非常に広いことが想像できる。また彼らはもう一種類の 2-準位クラスター関数 (これを 2-準位長距離相関関数と呼ぶ) についてもその関数形が普遍的であることを示した。2-準位長距離相関関数は 2-準位クラスター関数に比べて具体的な計算がしやすいため、様々な行列集団に対してランダム行列理論が持つある普遍性を見ることができる。以来、彼らを始めとしてさまざまな行列集団に対する 2-準位長距離相関関数の普遍性が、多くの研究者によって様々な方法で示されている [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]。

本論文ではランダム行列理論自身の数学的な研究により、ランダム行列理論が示す準位相関の普遍性の理解を目指す。まず、第 2 章、第 3 章でいろいろな統計量の定義やランダム行列理論に関する必要な知識を与える。そして第 4 章でランダム行列理論の準位長距離相関関数について、Gauss 型の確率分布からレプリカ法とダイアグラム展開を用いて計算を行い、それらの結果が様々な方法で非 Gauss 型の確率分布から得られた結果と一致することを確認する。この第 4 章が本論文の中心となる。そして第 5 章ではこれからの課題として最近の準位統計に関する話題、特に Anderson 転移点上での準位統計について現在までに知られている結果を簡単にまとめる。この Anderson 転移点上での準位統計はランダム行列理論のものとは異なる振る舞いを示すことが数値計算等でわかっており、非常に興味深い。最後の第 6 章で全体のまとめをする。

2 エネルギー準位間のゆらぎの性質

ある与えられたポテンシャルの中を運動する粒子の定常状態は時間に依らない **Schrödinger** 方程式の解によって記述される。**Schrödinger** 方程式を解きエネルギー準位がきちんと求まるものは調和振動子や水素原子など幾何学的対称性がある（系の自由度分に相当するだけの保存量が存在する）ごく限られた場合だけで、ほとんどの場合エネルギー準位をきちんと求めることはできない。そこで、エネルギー準位がきちんと求まる場合も含めてエネルギー準位の統計的性質を調べるという方法をとる。これが量子系の準位統計（または量子準位統計）と呼ばれるもので、本論文の中心となるテーマである。

この章ではエネルギー準位の統計性を測る基本的な統計量の導入を行い、エネルギー準位列を単なるランダム数列と見なしたとき、導入した統計量がどのように与えられるかを述べる。また、複雑な量子系（非可積分系）が示すエネルギー準位の統計的性質については第3章で議論する。

2.1 いろいろな統計量の定義

d 次元での **Schrödinger** 方程式

$$\begin{aligned} H\psi(\mathbf{r}) &= E\psi(\mathbf{r}), \\ H &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

を解くことにより得られるエネルギー準位の列

$$E_1, E_2, \dots, E_N, \quad (2.1)$$

に対し、各エネルギー準位が微小区間 $[E_j, E_j + dE_j]$ にある結合確率分布は

$$P_N(E_1, \dots, E_N) dE_1 \cdots dE_N, \quad (2.2)$$

で与えられるとする。このとき n -準位相関関数を次のように定義する。

$$R_n(E_1, \dots, E_n) = \frac{N!}{(N-n)!} \int P_N(E_1, \dots, E_N) dE_{n+1} \cdots dE_N. \quad (2.3)$$

この $R_n(E_1, \dots, E_n)$ から低次の相関関数の積で表される項を引き去って得られる n -準位連結相関関数（ n -準位クラスター関数）を次のように表す。

$$Y_n(E_1, \dots, E_n) = \sum_G (-1)^{n-m} (m-1)! \prod_{j=1}^m R_{G_j}(E_t, \text{ with } t \text{ in } G_j). \quad (2.4)$$

ここで G は指標 $[1, 2, \dots, n]$ の m 個の部分群 $[G_1, G_2, \dots, G_m]$ への任意の分割を表す。たとえば 1-準位クラスター関数、2-準位クラスター関数、3-準位クラスター関数は

$$Y_1(E_1) = R_1(E_1), \quad (2.5)$$

$$Y_2(E_1, E_2) = -R_2(E_1, E_2) + R_1(E_1)R_1(E_2), \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} Y_3(E_1, E_2, E_3) &= R_3(E_1, E_2, E_3) \\ &\quad - [R_1(E_1)R_2(E_2, E_3) + R_1(E_2)R_2(E_3, E_1) + R_1(E_3)R_2(E_1, E_2)] \\ &\quad + 2R_1(E_1)R_1(E_2)R_1(E_3), \end{aligned} \quad (2.7)$$

のように表される。またエネルギー準位数と準位密度を次のように表す。

$$N(E) = \sum_{i=1}^N \theta(E - E_i) = \text{Tr} \theta(E - H) = \langle N(E) \rangle + N_{fl}(E), \quad (2.8)$$

$$\hat{\rho}(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \sum_{i=1}^N \delta(E - E_i) = \text{Tr} \delta(E - H), \quad (2.9)$$

$$\langle \cdots \rangle = \int dE_1 \cdots dE_N (\cdots) P_N(E_1, \dots, E_N). \quad (2.10)$$

ここで $\theta(E)$ は階段関数、 $\langle N(E) \rangle$ 、 $N_{fl}(E)$ はそれぞれ $N(E)$ のなめらかな部分、ゆらぎの部分である。生のエネルギー準位列 (2.1) に対し、 $\langle N(E) \rangle$ に対する準位密度 (平均準位密度)

$$\langle \hat{\rho}(E) \rangle = \frac{d \langle N(E) \rangle}{dE},$$

が 1 になるようにエネルギー準位の列 (2.1) を

$$E_i \longrightarrow x_i = N_{av}(E_i), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

のように変換し (これをアンフォールディング写像という)、もう一つのエネルギー準位列

$$x_1, x_2, \dots, x_N, \quad (2.11)$$

に置き換えることにする (図 2.1)。この操作により、あらためて準位数と準位密度は

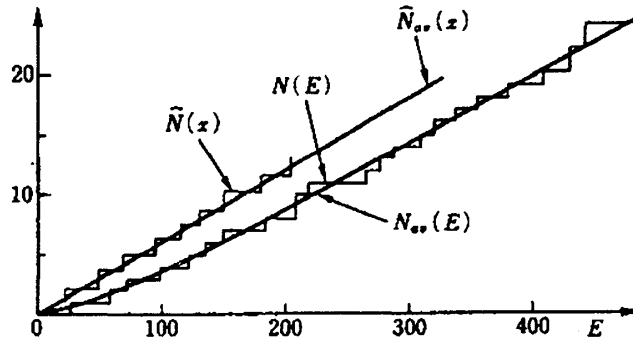


図 2.1: アンフォールディング写像の図式説明。参考文献 [8] から引用。

$$N(x) = \langle N(x) \rangle + N_{fl}(x) = x + N_{fl}(x), \quad (2.12)$$

$$\hat{\rho}(x) = \langle \hat{\rho}(x) \rangle + \hat{\rho}_{fl}(x) = 1 + \frac{dN_{fl}(x)}{dx}, \quad (2.13)$$

と表され、平均エネルギー準位数及び平均準位密度はそれぞれ $\langle N(x) \rangle = x$ 、 $\langle \hat{\rho}(x) \rangle = 1$ と簡単化されたことになる。また、 n -準位相関関数は

$$R_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = R_n(E_1, \dots, E_n) dE_1 \cdots dE_n, \quad (2.14)$$

つまり、

$$R_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{R_n(E_1, \dots, E_n)}{\prod_{i=1}^n R_1(E_i)}, \quad (2.15)$$

と表される。 n -準位クラスター関数は

$$Y_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = Y_n(E_1, \dots, E_n) dE_1 \cdots dE_n, \quad (2.16)$$

$$Y_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{Y_n(E_1, \dots, E_n)}{\prod_{i=1}^n Y_1(E_i)}, \quad (2.17)$$

となる。たとえば、1-準位クラスター関数、2-準位クラスター関数、3-準位クラスター関数は

$$Y_1(x_1) = R_1(x_1) = 1, \quad (2.18)$$

$$Y_2(x_1, x_2) = -R_2(x_1, x_2) + R_1(x_1)R_1(x_2), \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} Y_3(x_1, x_2, x_3) &= R_3(x_1, x_2, x_3) \\ &\quad - [R_1(x_1)R_2(x_2, x_3) + R_1(x_2)R_2(x_3, x_1) + R_1(x_3)R_2(x_1, x_2)] \\ &\quad + 2R_1(x_1)R_1(x_2)R_1(x_3), \end{aligned} \quad (2.20)$$

のように表される。

簡単化されたエネルギー準位 (2.11) の統計性を測るいろいろな統計量を導入する。いまエネルギー空間の一様性を仮定すると、2-準位クラスター関数 $Y_2(x_1, x_2)$ は差 $x = |x_1 - x_2|$ の関数として表される。多くの統計量はこの2-準位クラスター関数 $Y_2(x)$ によって記述される。また *Spectral form factor* と呼ばれる2-準位クラスター関数の Fourier 変換は

$$K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_2(x) e^{i2\pi tx} dx, \quad (2.21)$$

のように表され、これもエネルギー準位の統計性を測る上で重要な量である。

一定区間 $[0, L]$ の中に含まれるエネルギー準位の個数 $n(L)$ を次のように表す。

$$n(L) = \sum_{i=1}^N \int_0^L \delta(x - x_i) dx. \quad (2.22)$$

任意の関数 $f(x_1, \dots, x_N)$ に対する平均を

$$\langle f(x_1, \dots, x_N) \rangle = \int dx_1 \cdots dx_N f(x_1, \dots, x_N) P_N(x_1, \dots, x_N), \quad (2.23)$$

によって定義すると $n(L)$ の平均と二乗ゆらぎ (分散) は

$$\langle n(L) \rangle = L, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^2(L) &\equiv \langle (n(L) - L)^2 \rangle = L - 2 \int_0^L (L - r) Y_2(r) dr, \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{\sin^2 \pi Lt}{(\pi t)^2} [1 - K(t)] dt, \end{aligned} \quad (2.25)$$

となる (詳しい導出は付録 A を参照)。この二乗ゆらぎのことを Σ^2 統計量といい、 $n(L)$ のゆらぎの性質を特徴づける量である。また $n(L)$ の三乗ゆらぎ (*skewness* といい $\gamma_1(L)$ と表す)、四乗ゆらぎ (*excess* といい $\gamma_2(L)$ と表す) は

$$\begin{aligned} \gamma_1(L) \cdot \Sigma^3(L) &\equiv \langle (n(L) - L)^3 \rangle, \\ &= \hat{R}_3(L) - 3(L-1)\Sigma^2(L) - L(L-1)(L-2), \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2(L) \cdot \Sigma^4(L) &\equiv \langle (n(L) - L)^4 \rangle - 3\Sigma^4(L), \\
&= \hat{R}_4(L) - (4L - 6) \cdot \gamma_1(L) \cdot \Sigma^3(L) - 3\Sigma^4(L) \\
&\quad - (6L^2 - 18L + 11) \cdot \Sigma^2(L) - L(L - 1)(L - 2)(L - 3), \quad (2.27)
\end{aligned}$$

で表され、これらも $n(L)$ のゆらぎの性質を特徴づける量である。

つぎに (2.12) 式の準位数 $N(x)$ を区間 $[\alpha, \alpha + L] (L \gg 1)$ 内で $Ax + B$ と直線近似したとき、 $N(x)$ の二乗ゆらぎを次のように定義する。

$$\begin{aligned}
\Delta_3(L) &\equiv \left\langle \min_{A,B} \frac{1}{L} \int_{\alpha}^{\alpha+L} [N(x) - Ax - B]^2 dx \right\rangle, \\
&= \left\langle \min_{A,B} \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [N(x) - Ax - B]^2 dx \right\rangle; \quad \alpha = -\frac{L}{2}. \quad (2.28)
\end{aligned}$$

これは $Y_2(x)$ と $\Sigma^2(r)$ を用いて

$$\begin{aligned}
\Delta_3(L) &= \frac{2}{L^4} \int_0^L (L^3 - 2L^2r + r^3) \Sigma^2(r) dr, \\
&= \frac{L}{15} - \frac{1}{15L^4} \int_0^L (L - r)^3 (2L^2 - 9Lr - 3r^3) Y_2(r) dr, \quad (2.29)
\end{aligned}$$

と表される (詳しい導出は付録 B を参照)。この二乗ゆらぎのことを Δ_3 統計量といい、 $N(x)$ のゆらぎの性質を特徴づける量である。

最後に最近接準位間隔分布と呼ばれる統計量を導入する。最近接準位間隔分布とはある一つのエネルギー準位が $x = x_0$ にあったとして x_0 から s だけ離れたところに次のエネルギー準位 x_1 が存在する確率を変数 s の分布関数として与えようというものである。この最近接準位間隔分布 $P(s)$ は確率分布関数 $P_N(x_1, \dots, x_N)$ に対し、

$$\begin{aligned}
P(s) &= \frac{d^2}{ds^2} \int_{out} \cdots \int_{out} P_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_N, \quad (2.30) \\
\int_{out} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \right),
\end{aligned}$$

のような積分を実行することにより与えられる。

2.2 ランダム数列、Poisson 統計

エネルギー準位相関がない準位列、すなわちエネルギー準位列を単なるランダム数列と見なしたとき、その統計性は Poisson 統計に従うという。例えば円形のビリヤードや正方形のビリヤードの中を運動する電子のエネルギー準位列など、幾何学的対称性がある量子系 (これを可積分系と呼ぶ) が示すエネルギー準位の統計的性質はこれに相当する。この節ではエネルギー準位の統計性が Poisson 統計に従うとき、前節で導入した統計量がどのように与えられるかを述べる。

まずはエネルギー準位列を最大限ランダムにする結合確率分布関数 $P_N(E_1, \dots, E_N)$ を得るために Shannon の情報量エントロピー

$$S[P] = \int P_N(E_1, \dots, E_N) \ln P_N(E_1, \dots, E_N) dE_1 \cdots dE_N, \quad (2.31)$$

を用いる。いま、各エネルギー準位 $E_j (j = 1, \dots, N)$ の平均と二乗平均を

$$\langle E_j \rangle = \int E_j P_N(E_1, \dots, E_N) dE_1 \cdots dE_N = 0, \quad (2.32)$$

$$\langle E_j^2 \rangle = \int E_j^2 P_N(E_1, \dots, E_N) dE_1 \cdots dE_N = 2v^2, \quad (2.33)$$

と固定する。この条件の下で情報量エントロピー $S[P]$ が最小になるとき、エネルギー準位列をランダムにする結合確率分布関数 $P_N(E_1, \dots, E_N)$ が得られる。情報量エントロピーが最小になる条件は次の式で与えられる。

$$\delta \left\{ S[P] + \lambda_1 \sum_{j=1}^N \langle E_j \rangle - \lambda_2 \sum_{j=1}^N (2v^2 - \langle E_j^2 \rangle) \right\} = 0 \quad (2.34)$$

ここで λ_1 と λ_2 は Lagrange 未定乗数である。この条件式から

$$P_N(E_1, \dots, E_N) = \left[\frac{1}{4\pi v^2} \right]^{\frac{N}{2}} \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{E_i^2}{4v^2}\right), \quad (2.35)$$

が得られる。すなわちエネルギー準位列の各準位は互いに独立に Gauss 分布している。これより n -準位相関関数、 n -準位クラスター関数および *Spectral form factor* は次のようになる。

$$\begin{aligned} R_1(E_1) &= Y_1(E_1) = \left[\frac{1}{4\pi v^2} \right] \exp\left(-\frac{E_1^2}{4v^2}\right), \\ R_n(E_1, \dots, E_n) &= R_1(E_1) \cdots R_1(E_n), \\ Y_n(E_1, \dots, E_n) &= 0; \quad n \geq 2, \\ K(t) &= 0. \end{aligned}$$

アンフォールディングされた n -準位相関関数、 n -準位クラスター関数および *Spectral form factor* は

$$R_1(x_1) = Y_1(x_1) = 1, \quad (2.36)$$

$$R_n(x_1, \dots, x_n) = 1, \quad (2.37)$$

$$Y_n(x_1, \dots, x_n) = 0; \quad n \geq 2, \quad (2.38)$$

$$K(t) = 0. \quad (2.39)$$

となる。したがって (2.36)、(2.37)、(2.38) より Σ^2 統計量、 $\gamma_1(L)$ 、 $\gamma_2(L)$ 、 Δ_3 統計量、最近接間隔分布 $P(s)$ は次のようになる。

$$\begin{cases} \Sigma^2(L) = L, & \gamma_1(L) = L^{-1/2}, & \gamma_2(L) = 1/L, \\ \Delta_3(L) = L/15, & P(s) = e^{-s}, \end{cases} \quad (2.40)$$

最近接準位間隔分布 $P(s)$ を見るとよくわかるように、 $s = 0$ で $P(s) \neq 0$ である。すなわち、系の幾何学的対称性から生ずるエネルギー縮退の効果を再現している。エネルギー準位列が単なるランダム数列であると複雑な量子系が示すエネルギー準位反発の効果を再現しない。ではそれを再現するためにはエネルギー準位をどのように見なせばよいのか？

3 ランダム行列理論、Wigner-Dyson 統計

可積分な量子系ではその幾何学的な対称性から生ずるエネルギー準位の縮退があるのに対し、幾何学的対称性がない複雑な量子系ではエネルギー準位は縮退せず、互いに遠ざけあう効果が働く（これを準位反発という）。このような効果を再現できるエネルギー準位列の模型、ハミルトニアンの模型を考えたい。そこで導入されるのがランダム行列理論である [2, 3, 7, 8]。

複雑な量子系で観測されるエネルギー準位に適当な統計的処置をして得られる統計量の関数形が、平均準位間隔を 1 と置くことにより、普遍的になる場合がある。いま、図 3.1 のような 3 つ

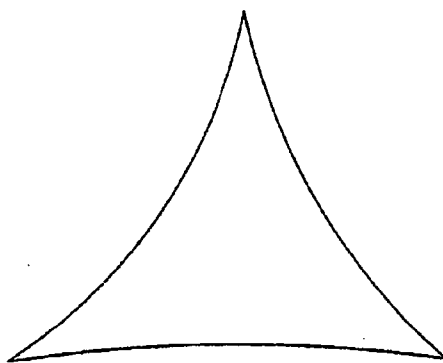


図 3.1: 3つの円弧で囲まれた散乱ビリヤード台。参考文献 [9] から引用。

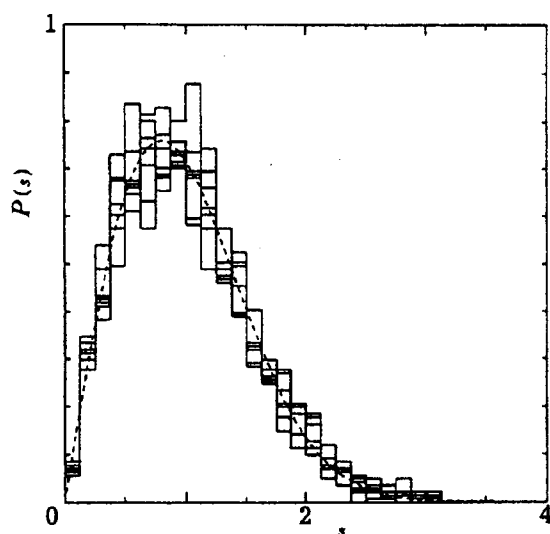


図 3.2: 散乱ビリヤード系におけるエネルギー準位の最近接間隔分布。参考文献 [9] から引用。

の円弧で囲まれたビリヤード（これを散乱ビリヤードという）を例にとり、ビリヤード内 D では（古典的に）自由粒子として運動し、境界 ∂D では入射角と反射角が等しいという反射の法則に従う力学系を考えることにする。この散乱ビリヤードは領域 D 内での自由粒子の運動が古典的に十分カオスになることが知られている系で [10]、この古典力学系のビリヤード問題に対応する量子力学系の研究は、境界 ∂D に剛体の壁があり領域 D 内では自由運動する粒子の定常状態を調べることである。それは時間に依存しない Schrödinger 方程式、

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(\mathbf{r}) &= 0, & \mathbf{r} \text{ in } D, \\ \psi(\mathbf{r}) &= 0, & \mathbf{r} \text{ on } \partial D, \end{aligned}$$

によって記述される。ここで m は粒子の質量、 $\hbar$ は Planck 定数、 E は粒子のエネルギー固有値、 $\psi(\mathbf{r})$ は E に対応する固有状態の波動関数である。散乱ビリヤード系のエネルギー準位を数値的に求め、最近接準位間隔分布を計算すると図 3.2 のようになる。図 3.2 は、カオスの強さを制御する

パラメーターである壁の曲率を 7 通り変化させたときの最近接準位間隔分布の図である。壁の曲率を 7 通りも変化させて計算したにもかかわらず、その分布の仕方は一通り（普遍的）であることがわかる。図の中に描かれている点線は、ランダム行列理論から計算される関数で、その普遍性をよく再現している。この最近接準位間隔分布をはじめとしてさまざまな統計量の普遍的な振る舞いはランダム行列理論から計算される関数により再現される。そのうち特に重要なのが 2-準位クラスター関数である。

この章ではまずランダム行列理論とは何かを説明し、ランダム行列に対する確率分布から、平均エネルギー準位密度、2-準位クラスター関数の具体的な計算方法を記す。また計算された 2-準位クラスター関数からさまざまな統計量がどのように与えられるかを述べ、実際の量子系での観測量との比較を行う。そして次章ではなぜ、ランダム行列理論から計算される関数が実際の物理系で観測される固有値の統計性と一致するかについて考えてみることにする。

3.1 Gauss 型直交・ユニタリ・シンプレクティック集団

量子力学において、系のハミルトニアンは $H_{nm} \equiv \langle n | H | m \rangle$ を行列要素とする行列として表される。複雑な量子系のハミルトニアンを表現するためにその行列要素がランダムであるとしたものをランダム行列という。複雑な量子系の示すエネルギー準位列をランダム行列の固有値と見なし、その統計的性質を記述するのがランダム行列理論である。エネルギー準位列をこのように見なしたとき、その統計性は Wigner-Dyson 統計に従うという。

ランダム行列（次数は N とする）は時間反転と回転に関する不変性の有無により次の 3 つの行列集団に分類される。

1. （回転不変性の有無に関係なく時間反転に不変な整数スピン系、又は、時間反転と回転に不変な半奇数スピン系）

$$H^T = H, (N \times N \text{ 実対称行列}), H = H^{(0)}.$$

2. （時間反転対称性が破れている場合（磁場がかかっている系））

$$H^\dagger = H, (N \times N \text{ エルミート行列}), H = H^{(0)} + iH^{(1)}.$$

3. （時間反転に不変であるが回転不変性がない半奇数スピン系）

$$H^\dagger = H^T = -H, (2N \times 2N \text{ シンプレクティック行列}),$$

$$H = H^{(0)} \otimes I_2 + i \sum_{k=1}^3 H^{(k)} \otimes \sigma^k$$

$$H^{(0)}: N \times N \text{ 実対称行列}, \quad H^{(k)}: N \times N \text{ 実反対称行列}, \quad (k = 1, 2, 3),$$

$$I_2: 2 \times 2 \text{ 単位行列}, \quad \sigma^k: \text{Pauli 行列} \quad (k = 1, 2, 3).$$

$N \times N$ 実対称行列の全体、 $N \times N$ エルミート行列の全体、 $2N \times 2N$ シンプレクティック行列の全体はそれぞれ群をつくり $O(N)$ 、 $U(N)$ および $Sp(N)$ であらわされる。ランダム行列集団の独立な変数は $N + \beta N(N-1)/2$ 個あり、 β は $O(N)$ 、 $U(N)$ 、 $Sp(N)$ に対応して 1、2、4 である。これら 3 種類のランダム行列のエネルギー準位が示す統計的性質はランダム行列に対する結合確率分布から記述される。

ランダム行列の行列要素に対し、各行列要素 $H_{ij} (1 \leq i, j \leq N)$ が微小区間 $[H_{ij}, H_{ij} + dH_{ij}]$ にある結合確率分布を

$$P(H)dH = P(\{H_{ij}\}) \prod_{1 \leq i, j \leq N} dH_{ij}, \quad (3.1)$$

とする。(3.1) はそれぞれ $O(N)$ 、 $U(N)$ 、 $Sp(N)$ に対し不変に保たなければならない。また、任意の関数 $f(H)$ に対する平均を

$$\langle f(H) \rangle = \int f(H) P(H) dH, \quad (3.2)$$

によって定義する。ここでランダム行列の行列要素を最大限ランダムにする結合確率分布関数 $P(\{H_{ij}\})$ を得るために 2.2 節で導入した Shannon の情報量エントロピー

$$S[P] = \int P(H) \ln P(H) dH, \quad (3.3)$$

をふたたび導入する [11]。この情報量エントロピーが

$$\langle H_{ij} \rangle = 0, \quad (3.4)$$

$$\langle H_{ij}^* H_{ij} \rangle = (1 + \delta_{ij}) v^2, \quad (3.5)$$

の条件の下で最小になるとき、ランダム行列の行列要素を最大限ランダムにする結合確率分布関数 $P(H)$ が得られる。情報量エントロピーが最小になる条件は次の式で与えられる。

$$\delta \left\{ S[P] + \lambda_1 \sum_{1 \leq i, j \leq N} \langle H_{ij} \rangle - \lambda_2 \sum_{1 \leq i, j \leq N} \left((1 + \delta_{ij}) v^2 - \langle H_{ij}^* H_{ij} \rangle \right) \right\} = 0. \quad (3.6)$$

ここで λ_1 と λ_2 は Lagrange 未定乗数である。この条件式から

$$\begin{aligned} P(\{H_{ij}\}) &= \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{1}{4v^2} \sum_{1 \leq i, j \leq N} H_{ij}^* H_{ij} \right), \\ P(H) &= \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{1}{4v^2} \text{Tr} H^2 \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$Z = (\sqrt{4\pi v^2})^{\{N + \beta N(N-1)/2\}}, \quad (\beta = 1, 2, 4).$$

が得られる。すなわち、各準位が互いに独立に Gauss 分布するのではなく、各行列要素が互いに独立に Gauss 分布する。この結合確率分布関数に従う行列集団を Gauss 型集団といい、上で述べた 3 つの行列集団に対しそれぞれ Gauss 型直交集団 (GOE)、Gauss 型ユニタリ集団 (GUE)、Gauss 型シンプレクティック集団 (GSE) とよぶ。これを固有値表示すると次のようになる。

$$\begin{aligned} P(H) dH &= P_N(E_1, \dots, E_N) dE_1 \cdots dE_N, \\ &= \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{1}{4v^2} \sum_{i=1}^N E_i^2 \right) \prod_{1 \leq i < j \leq N} |E_i - E_j|^\beta dE_1 \cdots dE_N, \\ &= \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{1}{4v^2} \sum_{i=1}^N E_i^2 + \beta \sum_{1 \leq i < j \leq N} \ln |E_i - E_j| \right) dE_1 \cdots dE_N, \end{aligned} \quad (3.8)$$

($\beta = 1, 2, 4$).

Wigner-Dyson 統計における結合確率分布 (3.8) と Poisson 統計における結合確率分布 (2.35) の大きな違いは、(3.8) の場合、各準位が互いに独立に Gauss 分布しておらず、 $\ln$ 型の 2 体の相互作用が付け加わっていることである。これが結果的にエネルギー準位の反発をひき起こす。それはとくに最近接準位間隔分布がどのようなようになるかを調べることによりわかる (詳しくは最後の節で述べる)。

3.2 準位相関関数

2.1節で述べたように、エネルギー準位の統計性を測る多くの統計量は 2-準位クラスター関数 $Y_2(x)$ によって記述される。そこで、この節ではランダム行列に対する結合確率分布 (3.7) 式から平均エネルギー準位密度と 2-準位クラスター関数の計算をおこなう。2-準位クラスター関数が計算できる方法は数少ない。この節ではそれが計算できる一つの方法として Green 関数を可換数と反可換数の両方を用いて表す「超対称性」の方法を紹介する [12, 13, 14, 15, 16]。Green 関数を計算する方法で、これ以外に知られている方法としてレプリカ法による計算がある。しかし、レプリカ法を用いるとその計算の技術上、正しい解を得られないことが示されている [17]。なぜ計算できないかは 4.4節で述べることにする。この節で紹介される「超対称性」の方法で用いられる超行列式や超トレース、超行列の Gauss 積分などは参考文献 [12, 14, 16] のはじめの章にわかりやすく解説されているのでそちらの方を参照されたい。ここでは特に参考文献 [12] にしたがって説明していくことにする。

3.2.1 平均エネルギー準位密度

3つの Gauss 型集団のうち、Gauss 型ユニタリ集団を考えることにする。

$$P(H)dH = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{N}{2} \text{Tr} H^2\right) \prod_{k=1}^N dH_{kk} \prod_{l < m} d(\text{Re} H_{lm}) d(\text{Im} H_{lm}). \quad (3.9)$$

任意の関数 $f(H)$ の平均を (3.2) 式によって定義すると、任意のエルミート行列 $u(u_{ij} = u_{ji}^*)$ に対してつぎの式が成り立つ。

$$\left\langle \exp\left(\pm i \sum_{ij} H_{ij} u_{ij}\right) \right\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2N} \sum_{ij} u_{ij}^* u_{ij}\right). \quad (3.10)$$

1 体 Green 関数を導入する。ある適当な基底 $\langle i |, i = 1, 2, \dots, N$ をもちいてレゾルベント演算子 $(E - H)^{-1}$ の行列要素はつぎのように表される。

$$G_{ij}^{\pm}(E) = \left(\frac{1}{(E \pm i\epsilon)I_N - H} \right)_{ij} \equiv \sum_{k=1}^N \frac{\langle i | \psi_k \rangle \langle \psi_k | j \rangle}{E - E_k \pm i\epsilon}. \quad (3.11)$$

ここで $|\psi_k\rangle$ 、 E_k はそれぞれランダムエルミート行列 H の固有状態、固有値で、 I_N は $N \times N$ 単位行列である。我々が求めるべき平均エネルギー準位密度

$$\langle \hat{\rho}(E) \rangle \equiv \rho(E) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \delta(E - H) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta(E - E_k) \right\rangle, \quad (3.12)$$

は 1 体 Green 関数を用いてつぎのように表される。

$$\rho(E) = \frac{1}{\pi N} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N \text{Im} \left\langle \frac{1}{E - E_k - i\epsilon} \right\rangle \Big|_{\epsilon \rightarrow 0} = \frac{1}{\pi N} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \sum_{i=1}^N \langle G_{ii}^-(E) \rangle. \quad (3.13)$$

1 体 Green 関数 $G_{ij}^-(E)$ を N 個の可換数からなるベクトルを用いて表わすとつぎのようになる。

$$G_{ij}^-(E) = \frac{i \int \prod_{k=1}^N \frac{d^2 s_k}{\pi} s_i^* s_j \exp \left\{ -i \mathbf{S}^\dagger ((E - i\epsilon)I_N - H) \mathbf{S} \right\}}{\int \prod_{k=1}^N \frac{d^2 s_k}{\pi} \exp \left\{ -i \mathbf{S}^\dagger ((E - i\epsilon)I_N - H) \mathbf{S} \right\}}, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{S}^\dagger = (s_1^*, \dots, s_N^*), \quad d^2 s_k = d(\text{Re} s_k) d(\text{Im} s_k)$$

この 1 体 Green 関数に対し、平均操作 $\langle \dots \rangle$ を行うのは難しい。そこで、

$$\begin{aligned} & \left[\int \prod_{k=1}^N \frac{d^2 s_k}{\pi} \exp \left\{ -i \mathbf{S}^\dagger ((E - i\epsilon) I_N - H) \mathbf{S} \right\} \right]^{-1} \\ &= \int \prod_{k=1}^N d^2 \chi_k \exp \left\{ -i \chi^\dagger ((E - i\epsilon) I_N - H) \chi \right\}, \\ & \chi^\dagger = (\chi_1^*, \dots, \chi_N^*), \quad d^2 \chi_k = d\chi_k^* d\chi_k, \\ & \chi_1^*, \dots, \chi_N^*: \text{反可換数 (Grassmann 数)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

であることを用いて、1 体 Green 関数をつぎのようにあらわす。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{(E - i\epsilon) I_N - H} \right)_{ij} = i \int [d\Phi] s_i^* s_j \exp \left(-i \Phi^\dagger \hat{V} \Phi \right), \\ &= i \int [d\Phi] s_i^* s_j \exp \left\{ -i(E - i\epsilon)(\mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} + \chi^\dagger \chi) + i \sum_{ij} H_{ij} (s_i^* s_j + \chi_i^* \chi_j) \right\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ \chi \end{pmatrix}, \quad [d\Phi] = \prod_{k=1}^N \frac{d^2 s_k}{\pi} \prod_{k=1}^N d^2 \chi_k, \\ \hat{V} &= \begin{pmatrix} (E - i\epsilon) I_N - H & 0 \\ 0 & (E - i\epsilon) I_N - H \end{pmatrix}: 2N \times 2N \text{ 超行列.} \end{aligned}$$

上式について $u_{ij} = s_i^* s_j + \chi_i^* \chi_j = u_{ji}^*$ と選び、(3.2) 式で定義される平均をとる。その際 (3.10) 式を用いると

$$\begin{aligned} \langle G_{ii}^-(E) \rangle &= i \int [d\Phi] s_i^* s_i \exp \left\{ -i(E - i\epsilon)(\mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} + \chi^\dagger \chi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2N} \sum_{ij} (s_i^* s_j + \chi_i^* \chi_j)(s_j^* s_i + \chi_j^* \chi_i) \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

が得られる。

ここで 2×2 超行列 $\hat{A}$ と 2 成分超ベクトル ϕ_i を次のように定義する。

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{bb} & A_{bf} \\ A_{fb} & A_{ff} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} & \chi^\dagger \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^\dagger \chi & -\chi^\dagger \chi \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

$$\phi_i = \begin{pmatrix} s_i \equiv \phi_i^{(b)} \\ \chi_i \equiv \phi_i^{(f)} \end{pmatrix}, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.19)$$

超行列 $\hat{A}$ は

$$A_{pq} = \sum_i \phi_i^{(p)} \phi_i^{(q)}, \quad (p, q = b, f) \quad (3.20)$$

によって ϕ_i と関係づけられる。

(3.17) 式において

$$\sum_{ij} (s_i^* s_j + \chi_i^* \chi_j)(s_j^* s_i + \chi_j^* \chi_i) = \text{Str} \hat{A}^2, \quad (3.21)$$

であることは容易に確かめられる。ここで超トレース Str は

$$\begin{aligned}\text{Str} \hat{F} &\equiv \text{Tr} \hat{a} - \text{Tr} \hat{b}, \\ \hat{F} : \Phi &\rightarrow \hat{F} \Phi \equiv \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{\sigma} \\ \hat{\rho} & \hat{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ \chi \end{pmatrix}, \\ \hat{a}, \hat{b} &: \text{可換数からなる行列}, \\ \hat{\sigma}, \hat{\rho} &: \text{反可換数からなる行列}\end{aligned}$$

で定義される。さらに $\exp \left\{ -(1/2N) \text{Str} \hat{A}^2 \right\}$ に対して Hubbard-Stratonovich 変換を行う。

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2N} \text{Str} \hat{A}^2 \right\} = \int d\hat{Q} \exp \left\{ -\frac{N}{2} \text{Str} \hat{Q}^2 + i \text{Str} \hat{Q} \hat{A} \right\}, \quad (3.22)$$

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} z_1 & \rho^* \\ \rho & iz_2 \end{pmatrix}.$$

(3.22) 式において $\text{Str} \hat{Q} \hat{A}$ は、

$$\text{Str} \hat{Q} \hat{A} = \Phi^\dagger \begin{pmatrix} z_1 I_N & \rho^* I_N \\ \rho I_N & iz_2 I_N \end{pmatrix} \Phi = \Phi^\dagger \hat{Q} \otimes I_N \Phi. \quad (3.23)$$

で表される。(3.22)、(3.23) を (3.17) 式に代入し、 Φ 積分を行うと、平均化された 1 体 Green 関数は次の形にあらわされる。

$$\langle G_{ii}^-(E) \rangle = \int d\hat{Q} \left([(E - i\epsilon)I_2 - \hat{Q}]^{-1} \right)_{bb} \exp(-N\mathcal{L}(\hat{Q})), \quad (3.24)$$

$$\mathcal{L}(\hat{Q}) = \text{Str} \left[\frac{1}{2} \hat{Q}^2 + \ln(E_- I_2 - \hat{Q}) \right], \quad (3.25)$$

$$E_- \equiv E - i\epsilon.$$

最後に (3.24) 式の $\hat{Q}$ 積分を鞍点法で近似的に評価する。鞍点方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\hat{Q})}{\partial \hat{Q}} = \hat{Q} - \frac{1}{E_- I_2 - \hat{Q}} = 0, \quad (3.26)$$

である。これを解くと

$$\hat{Q}_s = \frac{1}{2} E_- I_2 + \frac{1}{2} \sqrt{E_-^2 - 4} \begin{pmatrix} \sigma_b & 0 \\ 0 & \sigma_f \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

が得られる。ここで $\sigma_b, \sigma_f = \pm 1$ である。次に $\hat{Q} = \hat{Q}_s + \delta \hat{Q}$ として (3.24) 式に代入し、 $\delta \hat{Q}$ の 2 次まで展開すると次のようになる。

$$\langle G_{ii}^-(E) \rangle = \frac{1}{2} \left(E_- + \sigma_b \sqrt{E_-^2 - 4} \right) \exp(-N\mathcal{L}(\hat{Q}_s)) \int d(\delta \hat{Q}) e^{-N\delta^2 \mathcal{L}(\hat{Q}=\hat{Q}_s)}, \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}\delta^2 \mathcal{L}(\hat{Q}_s) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{E_-^2 - 2 + E_- \sigma_b \sqrt{E_-^2 - 4}}{4} \right) (\delta z_1)^2 \\ &+ \left(\frac{1}{2} - \frac{E_-^2 - 2 + E_- \sigma_f \sqrt{E_-^2 - 4}}{4} \right) (\delta z_2)^2 \\ &+ \left(1 - \frac{E_-^2 + (E_-^2 - 4) \sigma_b \sigma_f + E_- (\sigma_b + \sigma_f) \sqrt{E_-^2 - 4}}{4} \right) (\delta \rho^*)(\delta \rho). \quad (3.29)\end{aligned}$$

(3.28) 式の積分に寄与するのは $\sigma_b = \sigma_f = \pm 1$ のときのみである。このとき、

$$\mathcal{L}(\hat{Q}_s) = 0, \quad \int d(\delta\hat{Q}) \exp(-N\delta^2\mathcal{L}(\hat{Q}_s)) = 1. \quad (3.30)$$

である。(3.30) 式より平均化された 1 体 Green 関数は

$$\langle G_{ii}^-(E) \rangle = \frac{1}{2} \left(E_- + \sqrt{E_-^2 - 4} \right), \quad (3.31)$$

になる。(3.13) 式より、エネルギー準位密度は

$$\beta = 2: \rho(E) = \begin{cases} 0 & |E| > 2 \\ \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - E^2} & |E| < 2 \end{cases}. \quad (3.32)$$

となる。

また、Gauss 型直交集団、Gauss 型シンプレクティック集団に対して、平均化されたエネルギー準位密度は次のようになる。

$$\beta = 1: \rho(E) = \begin{cases} 0 & |E| > \sqrt{2} \\ \frac{1}{\pi} \sqrt{2 - E^2} & |E| < \sqrt{2} \end{cases}, \quad (3.33)$$

$$\beta = 4: \rho(E) = \begin{cases} 0 & |E| > 2 \\ \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - E^2} & |E| < 2 \end{cases}. \quad (3.34)$$

これらの分布は「Wigner の半円則」とよばれる。

3.2.2 2-準位相関関数

ここでも Gauss 型ユニタリ集団を考える (3.9)。2-準位クラスター関数を次のように定義する。

$$\begin{aligned} Y_2(\bar{E}; r) &= - \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \delta(E_1 - H) \frac{1}{N} \text{Tr} \delta(E_2 - H) \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \delta(E_1 - H) \right\rangle \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \delta(E_2 - H) \right\rangle. \\ \bar{E} &= \frac{1}{2}(E_1 + E_2), \quad r = E_1 - E_2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

2 体 Green 関数を導入する。

$$K_{ij}(\sigma_1, \sigma_2) \equiv \langle G_{ii}(E_1 + i\sigma_1\epsilon) G_{jj}(E_2 + i\sigma_2\epsilon) \rangle, \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} G_{ii}(E + i\sigma\epsilon) &= \sigma^{N+1} i \int [d\Phi] s_i^* s_i \\ &\quad \times \exp \left\{ i\sigma \mathbf{S}^\dagger (E + i\sigma\epsilon) \mathbf{S} - i\chi^\dagger (E + i\sigma\epsilon) \chi \right\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$K(\sigma_1, \sigma_2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N^2} \sum_{ij} \{ K_{ij}(\sigma_1, \sigma_2) - \langle G_{ii}(E_1 + i\sigma_1\epsilon) \rangle \langle G_{jj}(E_2 + i\sigma_2\epsilon) \rangle \}. \quad (3.38)$$

ここで $\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1$ である。上式を用いると $Y_2(\bar{E}, r)$ は次のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} Y_2(\bar{E}, r) &= -\frac{1}{4\pi^2} [K(1, -1) + K(-1, 1) - K(-1, -1) - K(1, 1)] \\ &\quad \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{2\pi^2} \text{Re} K(-1, 1). \end{aligned} \quad (3.39)$$

したがって、ここでは $K_{ij}(\sigma_1, \sigma_2)$ を計算することが目的となる。 $K_{ij}(\sigma_1, \sigma_2)$ は $2N$ 個の可換数と $2N$ 個の反可換数 (Grassmann 数) からなる超ベクトル Ψ を用いて次のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad [d\Psi] = [d\Phi_1][d\Phi_2], \\ K_{ij}(\sigma_1, \sigma_2) &= -(\sigma_1\sigma_2)^{N+1} \int [d\Psi] s_i^*(1) s_i(1) s_j^*(2) s_j(2) \\ &\quad \times \exp \left\{ i\bar{E}\Psi^\dagger \hat{L}_\sigma \otimes I_N \Psi + \Psi^\dagger \hat{\delta}_\sigma \otimes I_N \Psi - \frac{1}{2N} \text{Str} \hat{A}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\hat{L}_\sigma = \text{diag}(\sigma_1, -1, \sigma_2, -1),$$

$$\hat{\delta}_\sigma = \text{diag}(-\epsilon + (ir\sigma_1/2), \epsilon\sigma_1 - (ir/2), -\epsilon - (ir\sigma_2/2), \epsilon\sigma_2 + (ir/2))$$

$$= -\epsilon \begin{pmatrix} \sigma_1 I_2 & \\ & \sigma_2 I_2 \end{pmatrix} + \frac{ir}{2} \hat{\Lambda} \hat{L},$$

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}.$$

(3.40) 式において

$$\langle \exp [-i\Psi^\dagger \hat{L}_\sigma \otimes H \Psi] \rangle = \exp \left(-\frac{1}{2N^2} \text{Str} \hat{A}^2 \right) \quad (3.41)$$

であることを用いた。また $\hat{A}$ は 4×4 超行列で、

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{bb} & A_{bf} \\ A_{fb} & A_{ff} \end{pmatrix},$$

$$A_{pq}^{mn} = (\hat{L}_\sigma^{1/2})_{pp}^{mm} \sum_{i=1}^N (\Psi_i)_m^p (\Psi_i^\dagger)_n^q (\hat{L}_\sigma^{1/2})_{qq}^{nn},$$

$$\Psi_i = \begin{pmatrix} \Psi_i(1) \\ \Psi_i(2) \end{pmatrix}; \quad i = 1, \dots, N;$$

$$\Psi_i(m) = \begin{pmatrix} s_i(m) \\ \chi_i(m) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (\Psi_i)_m^b \\ (\Psi_i)_m^f \end{pmatrix}; \quad m = 1, 2.$$

で表される。

(3.39) 式より $\sigma_1 = -\sigma_2 = 1$ の場合を計算する。

$$\begin{aligned} K_{ij}(1, -1) &= -(-1)^{N+1} \int [d\Psi] s_i^*(1) s_i(1) s_j^*(2) s_j(2) \\ &\quad \times \exp \left\{ -(\epsilon - \frac{ir}{2}) \text{Str} \hat{A} \hat{\Lambda} - i\bar{E} \sum_{i=1}^N \Psi_i^\dagger \hat{L} \Psi_i - \frac{1}{2N} \text{Str} \hat{A}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\hat{L} = \text{diag}(1, 1, -1, 1),$$

$$A_{bb} = \begin{pmatrix} A_{bb}^{11} & A_{bb}^{12} \\ A_{bb}^{21} & A_{bb}^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1^\dagger \mathbf{S}_1 & i\mathbf{S}_2^\dagger \mathbf{S}_1 \\ i\mathbf{S}_1^\dagger \mathbf{S}_2 & -\mathbf{S}_2^\dagger \mathbf{S}_2 \end{pmatrix},$$

$$A_{ff} = \begin{pmatrix} A_{ff}^{11} & A_{ff}^{12} \\ A_{ff}^{21} & A_{ff}^{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \chi_1^\dagger \chi_1 & \chi_2^\dagger \chi_1 \\ \chi_1^\dagger \chi_2 & \chi_2^\dagger \chi_2 \end{pmatrix}.$$

上式に対して次の Hubbard-Stratonovich 変換をおこなう。

$$\begin{aligned}
& \exp \left\{ -\frac{1}{2N} \text{Str} \hat{A}^2 - \epsilon \text{Str} \hat{A} \hat{\Lambda} \right\} \\
&= \int d\hat{R} \exp \left\{ -\frac{N}{2} \text{Str} \hat{R}^2 + \text{Str} \hat{R} \hat{\Lambda} - iN\epsilon \text{Str} \hat{R} \hat{\Lambda} \right\}. \quad (3.43) \\
&\hat{R} = \hat{T}^{-1} \hat{P} \hat{T}, \quad d\hat{R} = \mathcal{F}[\hat{P}] [d\hat{P}] d\mu(\hat{T}), \\
&\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{P}_1 - i\gamma I_2 & 0 \\ 0 & \hat{P}_2 + i\gamma I_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_m = \begin{pmatrix} p_m & \eta_m^* \\ \eta_m & iq_m \end{pmatrix}; \quad m = 1, 2 \\
&p_m, q_m \in \mathbf{R}, \quad \eta_m, \eta_m^* \in \text{Grassmannian}.
\end{aligned}$$

これを (3.42) 式に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
K_{ij}(1, -1) &= -(-1)^{N+1} \int d\hat{R} \exp \left\{ -\frac{N}{2} \text{Str} \hat{R}^2 - i\epsilon N \text{Str} \hat{R} \hat{\Lambda} \right\} \\
&\quad \times \int [d\Phi] s_i(1) s_i^*(1) s_j(2) s_j^*(2) \\
&\quad \times \exp \left\{ -i\Phi^\dagger \hat{L}^{1/2} \left(\bar{E} I_4 - \hat{R} - \frac{1}{2} r \hat{\Lambda} \right) \hat{L}^{1/2} \Phi \right\}. \quad (3.44) \\
\Phi^\dagger &= (S_1^\dagger, S_2^\dagger, \chi_1^\dagger, \chi_2^\dagger), \quad [d\Phi] = \prod_{m=1}^2 \prod_{k=1}^N \frac{d^2 s_k(m)}{\pi} \prod_{k=1}^N d^2 \chi_k(m)
\end{aligned}$$

これを Φ について積分すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
K_{ij}(1, -1) &= \int d\mu(\hat{T}) \int [d\hat{P}] \mathcal{F}[\hat{P}] \text{Preexp}(\hat{T}, \hat{P}) \exp \left\{ -N \mathcal{L}[\hat{P}] \right\}. \quad (3.45) \\
\mathcal{L}[\hat{P}] &= \text{Str} \left[\frac{1}{2} \hat{P}^2 + \ln(\bar{E} I_4 - \hat{P}) \right], \\
\text{Preexp}(\hat{T}, \hat{P}) &= [g_{bb}^{11}(\hat{R}) g_{bb}^{22}(\hat{R}) + \delta_{ij} g_{bb}^{12}(\hat{R}) g_{bb}^{21}(\hat{R})] \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{i\tilde{\epsilon}}{N} \text{Str} \hat{R} \hat{\Lambda} - \frac{\tilde{r}}{2N} \text{Str} (\bar{E} I_4 - \hat{R})^{-1} \hat{\Lambda} \right\}, \\
g(\hat{R}) &= \hat{L}^{-1/2} \left(\bar{E} I_4 - \hat{R} - \frac{1}{2} r \hat{\Lambda} \right)^{-1} \hat{L}^{-1/2}, \\
\tilde{\epsilon} &\equiv \epsilon N \ll 1, \quad \tilde{r} \equiv N r \sim 1.
\end{aligned}$$

この $\hat{P}$ 積分を鞍点法で近似的に評価する。鞍点方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{L}[\hat{P}]}{\partial \hat{P}} = \hat{P} - \frac{1}{\bar{E} I_4 - \hat{P}} = 0, \quad (3.46)$$

である。これを解くと、

$$\hat{P}_s = \frac{1}{2} \bar{E} I_4 - i\pi \rho(\bar{E}) \hat{\Lambda}, \quad (3.47)$$

が得られる。つぎに $\hat{P} = \hat{P}_s + \delta \hat{P}$ として (3.45) に代入し、 $\delta \hat{P}$ の 2 次まで展開すると、

$$\begin{aligned}
K_{ij}(1, -1) &= \int d\mu(\hat{Q}) \text{Preexp}(\hat{Q}, \hat{P}_s) \\
&\quad \times \exp \left(-N \mathcal{L}[\hat{P}_s] \right) \int [d(\delta \hat{P})] \mathcal{F}[\hat{P}_s] \exp \left(-N \delta^2 \mathcal{L}[\hat{P} = \hat{P}_s] \right), \quad (3.48)
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\hat{P}_s] &= 0, \quad \int [d(\delta\hat{P})] \exp(-N\delta^2 \mathcal{L}[\hat{P} = \hat{P}_s]) = 1, \quad \mathcal{F}[\hat{P}_s] = 1, \\
\text{Preexp}(\hat{Q}, \hat{P}_s) &= \left\{ \left(\frac{1}{2} \bar{E} - \pi\rho(\bar{E}) Q_{bb}^{11} \right) \left(\frac{1}{2} \bar{E} - \pi\rho(\bar{E}) Q_{bb}^{22} \right) + \delta_{ij} (\pi\rho(\bar{E}))^2 Q_{bb}^{12} Q_{bb}^{21} \right\} \\
&\quad \times \exp \left[- \left(i\bar{\epsilon} + \frac{\bar{r}}{2} \right) \pi\rho(\bar{E}) \text{Str} \hat{Q} \hat{\Lambda} \right], \\
\hat{Q} &\equiv -i\hat{T}^{-1} \hat{\Lambda} \hat{T} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}, \\
Q_{11} &= \begin{pmatrix} -i[\lambda_1 - \alpha^* \alpha (\lambda_1 - \lambda_2)] & i\alpha^* (\lambda_1 - \lambda_2) \\ i\alpha (\lambda_1 - \lambda_2) & -i[\lambda_2 - \alpha^* \alpha (\lambda_1 - \lambda_2)] \end{pmatrix}, \\
Q_{22} &= \begin{pmatrix} i[\lambda_1 - \beta^* \beta (\lambda_2 - \lambda_1)] & -\beta^* (\lambda_2 - \lambda_1) \\ -\beta (\lambda_2 - \lambda_1) & i[\lambda_2 - \beta^* \beta (\lambda_2 - \lambda_1)] \end{pmatrix}, \\
Q_{12} &= u^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & i\mu_2^* \end{pmatrix} v; \quad Q_{21} = v^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1^* & 0 \\ 0 & i\mu_2 \end{pmatrix} u, \\
\lambda_1 &= \cosh 2\theta_b; \quad \lambda_2 = \cos 2\theta_f; \quad \mu_1 = e^{i\phi_b} \sinh 2\theta_b; \quad \mu_2 = e^{i\phi_f} \sin 2\theta_f, \\
0 &< \theta_b < \infty; \quad 0 < \theta_f, \phi_b, \phi_f < 2\pi, \\
u &= \exp \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^* \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}; \quad v = \exp \begin{pmatrix} 0 & -i\beta^* \\ i\beta & 0 \end{pmatrix}. \quad \alpha, \alpha^*, \beta, \beta^* \in \text{Grassmann} \\
d\mu[\hat{Q}] &= \frac{d\lambda_1 d\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} d\alpha^* d\beta^* d\alpha d\beta.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

より、 $K_{ij}(1, -1)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
K_{i \neq j}(1, -1) &= \int d\alpha^* d\beta^* d\alpha d\beta \int_1^\infty d\lambda_1 \int_{-1}^1 \frac{d\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2} \bar{E} + i\pi\rho(\bar{E})\lambda_1 - i\pi\rho(\bar{E})(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha^* \alpha \right] \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2} \bar{E} + i\pi\rho(\bar{E})\lambda_2 - i\pi\rho(\bar{E})(\lambda_1 - \lambda_2)\beta^* \beta \right] \\
&\quad \times \exp [(-2\bar{\epsilon} + i\bar{r})\pi\rho(\bar{E})(\lambda_1 - \lambda_2)], \\
&= (\pi\rho(\bar{E}))^2 \int_1^\infty d\lambda_1 \int_{-1}^1 d\lambda_2 \exp \{ (-2\bar{\epsilon} + i\bar{r})\pi\rho(\bar{E})(\lambda_1 - \lambda_2) \}, \\
&\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2i}{\bar{r}^2} e^{i\pi\rho(\bar{E})\bar{r}} \sin[\pi\rho(\bar{E})\bar{r}].
\end{aligned} \tag{3.50}$$

ここで、 $i = j$ の項の寄与は無視した。上式を (3.39) 式に代入すると

$$Y_2(\bar{E}, r) = \left(\frac{\sin N\pi\rho(\bar{E})r}{N\pi r} \right)^2, \tag{3.51}$$

が得られる。またアンフォールディングされた 2-準位クラスター関数は

$$\beta = 2: \quad Y_2(x) = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2, \quad x = N\rho(\bar{E})r, \tag{3.52}$$

となる。

Gauss 型直交集団、Gauss 型シンプレクティック集団に対して、アンフォールディングされた 2-準位クラスター関数は次のように表される。

$$\beta = 1: \quad Y_2(x) = [s(x)]^2 + \left(\int_x^\infty s(t) dt \right) \left(\frac{d}{dx} s(x) \right). \quad (3.53)$$

$$\beta = 4: \quad Y_2(x) = [s(2x)]^2 + \left(\frac{d}{dx} s(2x) \right) \left(\int_0^x s(2t) dt \right). \quad (3.54)$$

$$s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}. \quad (3.55)$$

以下、断りのない限り 2-準位クラスター関数を「2-準位短距離相関関数」と呼ぶことにする。この 2-準位短距離相関関数が計算できる方法は数少なく、ここで紹介した「超対称性」の方法のほかには直交多項式の方法 [3] と Kazakov の方法 [27] の二通りしかない。

3.3 複雑な量子系が示すエネルギー準位の統計的性質

次にアンフォールディングされた n -準位クラスター関数がどのように与えられるか結果だけ述べることにし、それと (3.53)、(3.52)、(3.54) などのアンフォールディングされた 2-準位短距離相関関数から得られる統計量、*Spectral form factor*、 Σ^2 統計量、 Δ_3 統計量、最近接準位間隔分布がどのように与えられるかを述べる。

アンフォールディングされた n -準位クラスター関数は

$$Y_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \text{Tr} \sum_P [\sigma(x_{12}) \sigma(x_{23}) \cdots \sigma(x_{n1})]. \quad (3.56)$$

$$\sum_P; 1, 2, \dots, n \text{ から作られる } (n-1)! \text{ 個の巡回置換についての和}$$

$$x_{ij} = x_i - x_j,$$

で与えられる。ここで $\sigma(x)$ は 2×2 行列で、直交行列集団 ($\beta = 1$)、ユニタリ行列集団 ($\beta = 2$)、シンプレクティック行列集団 ($\beta = 4$) についてそれぞれ次のようになる。

$$\beta = 1: \quad \sigma(x) = \begin{pmatrix} s(x) & Ds(x) \\ Js(x) & s(x) \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

$$\beta = 2: \quad \sigma(x) = \begin{pmatrix} s(x) & 0 \\ 0 & s(x) \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

$$\beta = 4: \quad \sigma(x) = \begin{pmatrix} s(2x) & Ds(2x) \\ Is(2x) & s(2x) \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

$$s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}, \quad Ds(x) = \frac{\partial}{\partial x} s(x),$$

$$Is(x) = \int_0^x s(t) dt, \quad Js(x) = Is(x) - \epsilon(x).$$

$$\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{1}{2}, & x < 0 \end{cases}.$$

この $Y_n(x_1, \dots, x_n)$ はスケールされた $x_{ij} (1 < i, j < n, i \neq j)$ のみの関数であらわされ、これ以外のパラメーターには依存していない。したがって、これから計算されるいろいろな統計量もスケール

ルされた x_{ij} のみの関数であらわされることがわかる。以下ではこの n -準位クラスター関数、特に 2-準位短距離相関関数を用いてあらわされる *Spectral form factor*、 Σ^2 統計量、 Δ_3 統計量、がどのように与えられるかを述べる（結果のみを記す）。

Spectral form factor: $K(t)$

$$\beta = 1: \quad K(t) = \begin{cases} 1 - 2|t| + |t|\ln(2|t| + 1) & |t| < 1 \\ -1 + |t|\ln\left(\frac{2|t| + 1}{2|t| - 1}\right) & |t| > 1 \end{cases} \quad (3.60)$$

$$\beta = 2: \quad K(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases} \quad (3.61)$$

$$\beta = 4: \quad K(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|t| + \frac{1}{4}|t|\ln|1 - |t|| & |t| < 2 \\ 0 & |t| > 2 \end{cases} \quad (3.62)$$

Σ^2 統計量: $\Sigma^2(L)$

$$\beta = 1: \quad \Sigma^2(L) \stackrel{L \gg 1}{\sim} \frac{2}{\pi^2} [\ln(2\pi L) + \gamma + 1 - \frac{\pi^2}{8}] + O(L^{-1}). \quad (3.63)$$

$$\beta = 2: \quad \Sigma^2(L) \stackrel{L \gg 1}{\sim} \frac{1}{\pi^2} [\ln(2\pi L) + \gamma + 1] + O(L^{-1}). \quad (3.64)$$

$$\beta = 4: \quad \Sigma^2(L) \stackrel{L \gg 1}{\sim} \frac{1}{2\pi^2} [\ln(4\pi L) + \gamma + 1 - \frac{\pi^2}{8}] + O(L^{-1}). \quad (3.65)$$

Δ_3 統計量: $\Delta_3(L)$

$$\beta = 1: \quad \Delta_3(L) \stackrel{L \gg 1}{\sim} \frac{1}{\pi^2} [\ln(2\pi L) + \gamma - \frac{5}{4} - \frac{\pi^2}{8}] + O(L^{-1}). \quad (3.66)$$

$$\beta = 2: \quad \Delta_3(L) \stackrel{L \gg 1}{\sim} \frac{1}{2\pi^2} [\ln(2\pi L) + \gamma - \frac{5}{4}] + O(L^{-1}). \quad (3.67)$$

$$\beta = 4: \quad \Delta_3(L) \stackrel{L \gg 1}{\sim} \frac{1}{4\pi^2} [\ln(4\pi L) + \gamma - \frac{5}{4} - \frac{\pi^2}{8}] + O(L^{-1}). \quad (3.68)$$

図 3.4、図 3.5 はそれぞれスタジアムビリヤード系 (図 3.3) における Σ^2 統計量、 Δ_3 統計量の図である。これを見るとわかるようにランダム行列理論から求めた分布関数は実際の物理系で観測さ

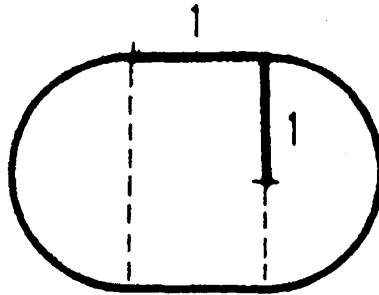


図 3.3: スタジアム・ビリヤード。参考文献 [3] から引用。

れる量を再現していることがわかる。

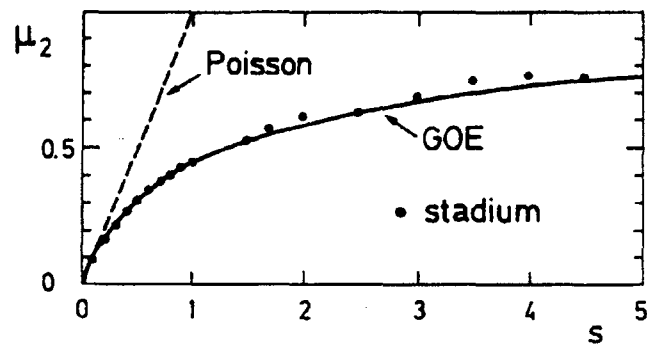


図 3.4: スタジアム・ビリヤード系における Σ^2 統計量。●は数値計算による結果。参考文献 [3] から引用。

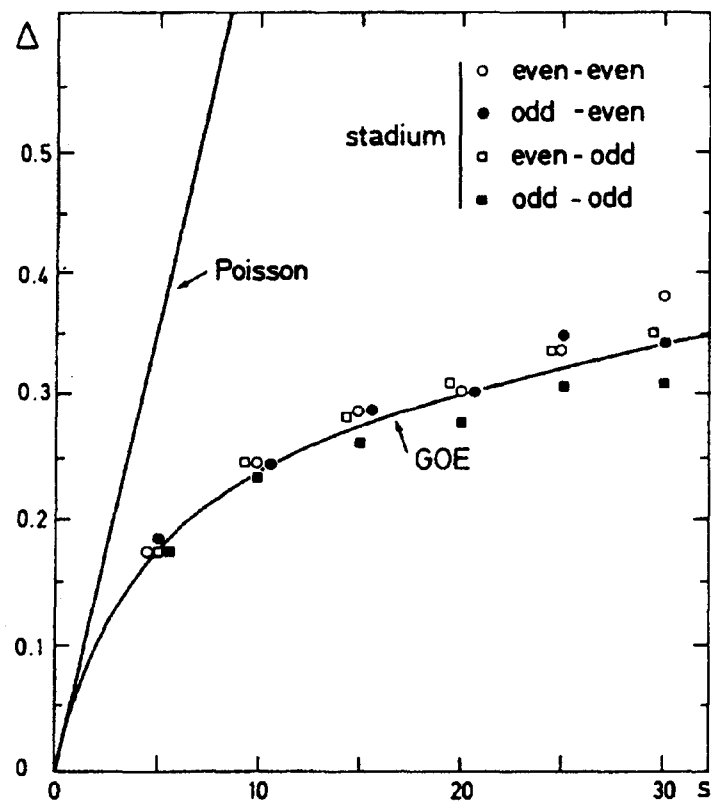


図 3.5: スタジアム・ビリヤード系における Δ_3 統計量。○、●、□、■は数値計算による結果。参考文献 [3] から引用。

最後に最近接準位間隔分布について議論する。結合確率分布 (3.8) 式に対して (2.30) 式の多重積分を行い、最近接準位間隔分布を導くことは数学的にかなり難しく、現在においてもきちんとした解は得られていない。しかし $N = 2$ についての考察は行われており、つぎのようになる [2]。

$$\beta = 1: P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right). \quad (3.69)$$

$$\beta = 2: P(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} s^2\right). \quad (3.70)$$

$$\beta = 4: P(s) = \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^4 \exp\left(-\frac{64}{9\pi} s^2\right). \quad (3.71)$$

これらの分布を **Wigner 分布** (**Wigner 予想**) という (これらの式の導出については付録 C を参照)。この **Wigner 分布** (3.69)、(3.70)、(3.71) は確かに $s = 0$ で $P(s) = 0$ となり、複雑な量子系が示すエネルギー準位の反発を再現している。またその普遍性を再現している (この章の前書きで紹介した図 3.2 を参照)。**Wigner 分布** は $N = 2$ での結果であるが、 $s \ll 1$ 、 $N \gg 1$ で数値的によく一致することがわかっている [18, 7]。表 3.1 は参考文献 [7] からの引用で、**Wigner 分布** が $s \ll 1$

β	$N = 2$	$N \rightarrow \infty$	$\frac{N \rightarrow \infty}{N = 2}$
1	$\frac{\pi}{2} s$	$\frac{\pi^2}{6} s$	1.047...
2	$\frac{32}{\pi^2} s^2$	$\frac{\pi^2}{3} s^2$	1.015...
4	$\frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^4$	$\frac{16\pi^4}{135} s^4$	0.995...

表 3.1: 参考文献 [7] から引用。最近接準位間隔分布 $P(s)$ が小さい s について、 $N = 2$ の場合と $N \rightarrow \infty$ の場合ではほぼ一致している。

で $N \gg 1$ のものとはほぼ一致しているのがわかる。また最近 E. Brezin & S. Hikami により、この章で説明したランダム行列とは少し異なる、ある拡張されたランダム行列から $s \ll 1$ で普遍的であることが示されている [19]。したがって、**Wigner 分布** は実際の複雑な量子系を特徴づける分布の条件を満たしているといえる。

4 ランダム行列理論の普遍的な 2-準位長距離相関関数

さきほどから述べているようにエネルギー準位の統計性を測る基本的な量は 2-準位短距離相関関数である。複雑な量子系の場合、2-準位短距離相関関数は **Gauss 型集団** という一つのパラメーター調整をただけの非常に簡単な確率分布から導かれる。この 2-準位短距離相関関数から記述されるさまざまな統計量は、現実の量子系で測定されたエネルギー準位に適当な統計処理をおこなって得られた比較すべき統計量を再現する。ランダム行列理論から得られる固有値の統計性がこのような実際の物理系で観測される固有値の統計性と一致する理由は、明らかにされていない。

量子準位統計以外の分野でも現象の記述に次数の大きい複雑な行列があらわれるとき、それをランダム行列に置き換えることにより、その現象の特性を再現する場合がある。例えば近年では、メゾスコピック系で見られるコンダクタンスの普遍的なゆらぎ、QCD のカイラル対称性の破れ [4]、2次元量子重力理論など広い範囲に適用され、盛んに研究が行われている [5]。観測されたエネルギー準位の密度分布にはさまざまな分布があり、Gauss 型集団から導いたエネルギー準位密度は「Wigner 分布」という一通りの分布しか再現せず、観測とは全く一致しない。それにもかかわらず、Gauss 型の確率分布関数から導かれる 2-準位短距離相関関数から計算される量は、いろいろな現象の特性を再現する。この理由は明らかにされていない。

以上のことを理論的に明らかにするその一つの研究方法として、ランダム行列理論自身の数学的研究による理解が行われている。E. Brézin らは Gauss 型ではなく非 Gauss 型の確率分布

$$P(H)dH = \frac{1}{Z} e^{-N \text{Tr} V(H)} dH, \quad (4.1)$$

$$V(H) = \sum_{k=1}^P \frac{g_k}{2k} H^{2k}, \quad (4.2)$$

H : $N \times N$ エルミート行列,

から、エネルギー準位密度が次のようになることを導いた [20]。

$$\rho(E) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P}(E) \sqrt{a^2 - E^2}, \quad (4.3)$$

$$\mathcal{P}(E) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^P g_k \sum_{n=0}^{k-1} \binom{2n}{n} \left(\frac{a^2}{4} \right)^n E^{2k-2n-2}, \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^P g_k \binom{2k}{k} \left(\frac{a^2}{4} \right)^k = 1. \quad (4.5)$$

ここで、 a 、 $-a$ はエネルギー準位密度の端点である。この結果からエネルギー準位密度はたくさんのパラメーターにあらわに依っており、この立場でエネルギー準位密度には普遍性がないことを確認することができる。

また最近になり、E. Brézin & A. Zee は非 Gauss 型の確率分布から計算した 2-準位短距離相関関数が Gauss 型の確率分布から計算したものと関数形が一致することを数学的に証明した [6]。この立場で、Gauss 型のランダム行列理論が実際の物理系での観測量をよく再現するということが理解できる。また彼らは同じ非 Gauss 型の確率分布から、 $r = E_1 - E_2 \sim O(1)$ の 2-準位相関関数（これを 2-準位長距離相関関数と呼ぶ）が

$$Y_2(E_1, E_2) \xrightarrow{r \sim O(1)} -\frac{1}{2N^2 \pi^2 (E_1 - E_2)^2} \frac{a^2 - E_1 E_2}{\sqrt{(a^2 - E_1^2)(a^2 - E_2^2)}}, \quad (4.6)$$

のように a だけにしかよらない普遍的な関数形を持つことを示した。彼らはこの 2-準位長距離相関関数の重要性をランダム系の物理の観点から指摘した。2-準位長距離相関関数は短距離準位相関関数に比べて具体的な計算がしやすいため、様々な行列集団に対してランダム行列理論が持つある普遍性を見ることができる。彼らの仕事はランダム行列理論のこの意味での普遍類が非常に広いことを指摘した点で重要であり、それ以来、彼らを始めとしてさまざまな行列集団に対する 2-準位長距離相関関数の普遍性が、多くの研究者によって様々な方法で示されている [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]。

これらの論文の多くはユニタリ行列集団についてのみそれが示されているが、このうち特に C. Itoi、C. W. J. Beenakker [21, 22] は、3つの行列集団に対して非 Gauss 型の確率分布から汎関数

方程式を解くことにより 2-準位長距離相関関数の普遍性を示し、また $1/N$ -展開の任意の次数までの系統的な計算方法を示した。しかし、この汎関数方程式の方法では途中、その解の解析性の仮定がされている。そこで我々はこのことにより得られた結果を確かめるために、Gauss 型の確率分布からレプリカ法を用いて 2-準位長距離相関関数 (2 体連結 Green 関数) を計算し、関数形が一致することを確認することができた [31]。レプリカ法は Anderson 局在やスピングラスなどによく使われる方法であるが、2-準位短距離相関関数を計算するのは困難で、それが計算された例はない。我々は 2-準位長距離相関関数に対し、この方法を適用することができることを示した。しかも、3.2 節で解説した「超対称性」の方法よりもレプリカ法を用いたほうが比較的簡単に計算ができる。また、ダイアグラム展開法を用いて得られた 2-準位長距離相関関数の関数形が、汎関数方程式のものと一致することも確認できた [32]。

この章ではまず、非 Gauss 型の確率分布から汎関数方程式の方法を用いて 2-準位長距離相関関数を計算し、ある解析性のもとでその結果が普遍的であることを示す。そして、確率分布を Gauss 型にしたとき、2-準位長距離相関関数の関数形がレプリカ法とダイアグラム展開法のものと一致することを示す。

4.1 汎関数方程式の方法による 2-準位長距離相関関数の普遍性

ランダム行列 H に対する分配関数を次のように定義する。

$$Z[N, \{g_j\}] \equiv e^{N^2 F[N, \{g_j\}]} \equiv \int e^{-N \text{Tr} V(H)} dH, \quad (4.7)$$

$$V(H) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{j} H^j. \quad (4.8)$$

任意の関数 $Q(H)$ に対する平均を

$$\langle Q(H) \rangle = \frac{1}{Z} \int Q(H) e^{-N \text{Tr} V(H)} dH, \quad (4.9)$$

によって定義する。Green 関数を

$$G(E) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{EI_N - H} \right\rangle : \text{1 体 Green 関数}, \quad (4.10)$$

$$G_c(E_1, \dots, E_l) = N^{l-2} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{E_1 I_N - H} \cdots \text{Tr} \frac{1}{E_l I_N - H} \right\rangle_c : \text{l 体連結 Green 関数}, \quad (4.11)$$

のように表す。ここで次の演算子を導入する。

$$\frac{d}{dV(E)} \equiv - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{E^{j+1}} \frac{d}{dg_j}. \quad (4.12)$$

この演算子を自由エネルギー $F \equiv \frac{1}{N^2} \ln Z$ に作用することにより Green 関数は次のようにもあらわされる。

$$G(E) = \frac{dF}{dV(E)} + \frac{1}{E} : \text{1 体 Green 関数}, \quad (4.13)$$

$$G_c(E_1, \dots, E_l) = \frac{d}{dV(E_1)} \cdots \frac{d}{dV(E_l)} F : \text{l} (\geq 2) \text{ 体連結 Green 関数}. \quad (4.14)$$

いま分配関数 (4.7) が

$$H \longrightarrow H + \frac{\epsilon}{EI_N - H}, \quad (4.15)$$

なる変換に対し、不変であることを要求すると次の汎関数方程式（ループ方程式）が得られる。

$$G(E)^2 - \frac{2}{\beta} \oint_C \frac{dw}{2\pi i} \frac{V'(w)}{E-w} G(w) - \frac{1}{N} \left(\frac{2}{\beta} - 1 \right) \partial_E G(E) + \frac{1}{N^2} G(E, E) = 0. \quad (4.16)$$

ここで汎関数方程式 (4.16) は十分大きい N に対し、 s 個のカット $(x_1, x_2), \dots, (x_{2s-1}, x_{2s})$ を持つとする。また積分経路 C はこの s 個のカットを囲むようにとる。(4.16) 式の左辺第 3 項はユニタリ行列集団 ($\beta = 2$) のとき存在しない。 l 体連結 Green 関数の $1/N$ -展開は

$$G_c(E_1, \dots, E_l) = \sum_{g=1}^{\infty} \frac{1}{N^g} G_g(E_1, \dots, E_l). \quad (4.17)$$

で表される。ここで g は種数を表し、 H が $N \times N$ エルミート行列 ($\beta = 2$) の場合、種数は偶数のみである。任意の種数 g に対し、 $G_g(E)$ 、 $G_g(E, E)$ は次の漸化式を満たす。

$$\begin{aligned} g=0, & \quad \hat{X} G_0(E) = 0, \\ g=1, & \quad \hat{X} G_1(E) = \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \partial_E G_0(E), \\ g \geq 2, & \quad \hat{X} G_g(E) = \sum_{m=1}^{g-1} G_{g-m}(E) G_m(E) + \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \partial_E G_{g-1}(E) \\ & \quad + G_{g-2}(E, E). \end{aligned} \quad (4.18)$$

ここで、 $\hat{X}$ は任意の関数 $f(E)$ に対して次のように定義される。

$$\hat{X} f(E) \equiv \frac{2}{\beta} \oint_C \frac{dw}{2\pi i} \frac{V'(w)}{E-w} f(w) - 2G_0(E) f(E). \quad (4.19)$$

我々が計算したい量はエネルギー準位密度と 2-準位長距離相関関数であるが、(3.13) 式と (3.39) 式より、 $G_0(E)$ と $G_0(E_1, E_2)$ を求めることが目的となる。 $G_0(E)$ に対する汎関数方程式は

$$\frac{\beta}{2} G_0(E)^2 - V'(E) G_0(E) + Q(E, V) = 0, \quad (4.20)$$

$$Q(E, V) = \oint_{C_\infty} \frac{dw}{2\pi i} \frac{V'(w)}{E-w}, \quad (4.21)$$

で表される。これを $G_0(E)$ について解くと次のようになる。

$$G_0(E) = \frac{1}{\beta} \left(V'(E) - \sqrt{V'(E)^2 + 2\beta Q(E, V)} \right). \quad (4.22)$$

いま、 $G_0(E)$ が複素平面上で s 個のカットを持つと仮定し、 $G_0(E)$ が次のように書けたとする。

$$G_0(E) = \frac{1}{\beta} \left(V'(E) - M(E) \sqrt{\prod_{i=1}^{2s} (E - x_i)} \right). \quad (4.23)$$

上式において $M(E)$ が解析関数であると仮定すると $M(E)$ はつぎのように書ける。

$$M(E) = \oint_{C_\infty} \frac{dw}{2\pi i} \frac{M(w)}{w-E} = \oint_{C_\infty} \frac{dw}{2\pi i} \frac{1}{w-E} \frac{V'(w)}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2s} (w-x_i)}}. \quad (4.24)$$

上式を (4.23) 式に代入すると s 個のカットを持つ 1 体 Green 関数が得られる。

$$G_0(E) = -\frac{1}{\beta} \oint_C \frac{dw}{2\pi i} \frac{V'(w)}{w-E} \sqrt{\prod_{i=1}^{2s} \frac{E-x_i}{w-x_i}}. \quad (4.25)$$

$G_0(E)$ は $V'(w)$ にあらわによっていて、無限個のパラメーター $g_1, g_2, \dots$ を含んでいる。したがって $G_0(E)$ から計算されるエネルギー準位密度は普遍的ではないことがわかる。端点 $x_k (k = 1, \dots, 2s)$ は $G_0(E)$ の十分大きな N に対する振る舞いと化学ポテンシャルに対する次の条件により決まる。

$$\oint_C \frac{dw}{2\pi i} \frac{w^r V'(w)}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2s} (w - x_i)}} = \delta_{rs}, \quad (4.26)$$

$$0 = \int_{x_{2k}}^{x_{2k+1}} \rho(E) dE = \int_{x_{2k}}^{x_{2k+1}} dEM(E) \sqrt{\prod_{i=1}^{2s} (E - x_i)}, \quad k = 1, \dots, s-1. \quad (4.27)$$

$s = 1$ のとき、端点 x_1, x_2 は (4.26) 式のみで決まる。

次に、 $s = 1$ の場合の 2 体 Green 関数を計算する。(4.14) 式より

$$\begin{aligned} G_0(E_1, E_2) &= -\frac{d}{dV(E_2)} \frac{1}{\beta} \oint_C \frac{dw}{2\pi i} \frac{V'(w)}{w - E_1} \sqrt{\prod_{i=1}^2 \frac{E_1 - x_i}{w - x_i}} \\ &= \frac{1}{\beta} \left[-\frac{1}{(E_1 - E_2)^2} + \frac{\partial}{\partial E_1} \left(\frac{1}{E_1 - E_2} \sqrt{\frac{(E_1 - x_1)(E_1 - x_2)}{(E_2 - x_1)(E_2 - x_2)}} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{2} M_1^{(1)} \frac{dx_1}{dV(E_2)} \sqrt{\frac{E_1 - x_2}{E_1 - x_1}} + \frac{1}{2} M_2^{(1)} \frac{dx_2}{dV(E_2)} \sqrt{\frac{E_1 - x_2}{E_1 - x_1}} \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

上式の右辺第 2 項の $M_1^{(1)}, M_2^{(1)}$ は一般に

$$M_i^{(k)} \equiv \oint_C \frac{dw}{2\pi i} \frac{V'(w)}{(w - x_i)^k \sqrt{(w - x_1)(w - x_2)}}, \quad (4.29)$$

で定義されるもので、 $M_1^{(1)} dx_1/dV(E_2), M_2^{(1)} dx_2/dV(E_2)$ は

$$\begin{aligned} M_1^{(1)} \frac{dx_1}{dV(E_2)} &= \frac{1}{(E_2 - x_1) \sqrt{(E_1 - x_1)(E_1 - x_2)}}, \\ M_2^{(1)} \frac{dx_2}{dV(E_2)} &= \frac{1}{(E_2 - x_2) \sqrt{(E_1 - x_1)(E_1 - x_2)}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

である。これらを (4.28) 式に代入すると 2 体連結 Green 関数が得られる。

$$\begin{aligned} G_0(E_1, E_2) &= \frac{E_1 E_2 - (x_1 + x_2)(E_1 + E_2)/2 + x_1 x_2}{\beta(E_1 - E_2)^2 \sqrt{(E_1 - x_1)(E_1 - x_2)(E_2 - x_1)(E_2 - x_2)}} \\ &\quad - \frac{1}{\beta(E_1 - E_2)^2}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

$G_0(E_1, E_2)$ は 2 つのパラメーター x_1, x_2 のみを含んでいる。すなわち、どんな確率密度を持つ系の 2-準位長距離相関関数も 2 つのパラメーター調整で関数形を決定でき、その意味で 2-準位長距離相関関数は普遍的であるといえる。また (4.31) 式から (4.14) 式を用いて 3 体連結 Green 関数は次のように計算される。

$$\begin{aligned} G_0(E_1, E_2, E_3) &= \frac{(x_2 - x_1)}{4\beta[(E_1 - x_1)(E_2 - x_1)(E_3 - x_1)(E_1 - x_2)(E_2 - x_2)(E_3 - x_2)]^{3/2}} \\ &\quad \times \left[\frac{(E_1 - x_2)(E_2 - x_2)(E_3 - x_2)}{M_1^{(1)}} - \frac{(E_1 - x_1)(E_2 - x_1)(E_3 - x_1)}{M_2^{(1)}} \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

この3体連結 Green 関数は2つのパラメーター $M_1^{(1)}$ と $M_2^{(1)}$ に依存しており、これから計算される3準位長距離相関関数もこの2つのパラメーター $M_1^{(1)}$ と $M_2^{(1)}$ に依存する。さらに (4.14) 式を用いて4体、5体と高次の連結 Green 関数を計算するに従って、パラメーターの数は増えていく。これは高次の準位短距離相関関数を計算してもパラメーターの増えなかった前章の (3.56) 式とは性質が大きく異なっている。

次に $V(H)$ を Gauss 型

$$V(H) = \frac{H^2}{2}, \quad (4.33)$$

にすると、1体 Green 関数、2体連結 Green 関数はそれぞれ次のようになる。

$$G_0(E) = \frac{1}{\beta} \left(E - \sqrt{E^2 - 2\beta} \right), \quad (4.34)$$

$$G_0(E_1, E_2) = \frac{E_1 E_2 - 2\beta}{\beta(E_1 - E_2)^2 \sqrt{(E_1^2 - 2\beta)(E_2^2 - 2\beta)}} - \frac{1}{\beta(E_1 - E_2)^2}. \quad (4.35)$$

この (4.35) 式は (4.31) 式でパラメーター $g_2 = 1, g_1 = g_3 = g_4 = \dots = 0$ のような1つのパラメーター調整により得られる。また、1体 Green 関数の $1/N$ -オーダーは

$$G_1(E) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\beta} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{E^2 - 2\beta}} - \frac{E}{E^2 - 2\beta} \right), \quad (4.36)$$

となる。

この章の前書きでも述べたようにこれらの結果は1体 Green 関数の解に対する解析性の仮定 (4.23) と (4.24) を置いて得られたものである。そこで次節以降では、これらの仮定から得られた1体 Green 関数、2体連結 Green 関数、3体連結 Green 関数の解 (4.34)、(4.35)、(4.36)、(4.32) がレプリカ法とダイアグラム展開法によるものと一致することを示す。非 Gauss 型の確率分布から計算された関数形と Gauss 型の確率分布から計算された関数形が一致することにより、ある意味でランダム行列理論の普遍性が理解される。

4.2 レプリカ法による Green 関数の計算

レプリカ法は3.2節で解説した「超対称性」の方法において可換数のみを考え、それに内部自由度を持たせたものを用いて Green 関数を計算する方法である。したがって計算方法は「超対称性」の方法とよく似ている。3.2節で各式をチェックできた者にとっては手を動かすことなく理解できるだろう。

3つのランダム行列に対する確率分布を

$$P(H)dH = \frac{1}{Z_H} \exp \left(-\frac{N}{2} \text{Tr} H^2 \right) dH, \quad (4.37)$$

と定義する。任意の関数 $\mathcal{O}(H)$ の平均を

$$\langle \mathcal{O}(H) \rangle = \int \mathcal{O}(H) P(H) dH, \quad (4.38)$$

と定義する。1体 Green 関数、2体 Green 関数、2体連結 Green 関数を

$$G(E) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{E I_N - H} \right\rangle, \quad (4.39)$$

$$G(E_1, E_2) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{E_1 I_N - H} \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{E_2 I_N - H} \right\rangle, \quad (4.40)$$

$$G_c(E_1, E_2) = G(E_1, E_2) - G(E_1)G(E_2), \quad (4.41)$$

とあらわす。3 章と同様に 1 体 Green 関数を N 個の可換数を用いて次のように表わす。

$$G_{ij}^-(E) = \left\langle \frac{i \int \prod_{k=1}^N \frac{d^2 s_k}{\pi} s_i^* s_j \exp \left\{ -i \mathbf{S}^\dagger ((E - i\epsilon) I_N - H) \mathbf{S} \right\}}{\int \prod_{k=1}^N \frac{d^2 s_k}{\pi} \exp \left\{ -i \mathbf{S}^\dagger ((E - i\epsilon) I_N - H) \mathbf{S} \right\}} \right\rangle, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{S}^\dagger = (s_1^*, \dots, s_N^*), \quad d^2 s_k = d(\text{Res}_k) d(\text{Im} s_k)$$

この 1 体 Green 関数は次のように書きかえられる。

$$G(E) = -\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial E} \langle \ln Z \rangle, \quad (4.43)$$

$$Z = \int \prod_{k=1}^N d^2 s_k \exp \left\{ -i \mathbf{S}^\dagger (E I_N - H) \mathbf{S} \right\} \quad (4.44)$$

ここで、互いに独立なまったく同じ系を n 個考え、指標 a , ($a = 1, \dots, n$) で区別する。

$$\mathbf{S}^\dagger, \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}^{(a)\dagger}, \mathbf{S}^{(a)}.$$

これより n 個すべての系をあわせた合成系は次のようになる。

$$Z^n = \int \prod_{a=1}^n \prod_{k=1}^N d^2 s_k^{(a)} \exp \left\{ -i \sum_{a=1}^n \mathbf{S}^{(a)\dagger} (E I_N - H) \mathbf{S}^{(a)} \right\} \quad (4.45)$$

この合成系は次の操作により $\ln Z$ の形に戻る。

$$\frac{Z^n - 1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow 0} \ln Z. \quad (4.46)$$

このように、レプリカ法は n 個の独立な系を考えて $\langle Z^n \rangle$ を n の解析関数として求め、最後に $n \rightarrow 0$ とすることにより $\langle \ln Z \rangle$ を計算する方法である。

4.2.1 Gauss 型直交集団

まずは H が $N \times N$ 実対称行列のときを考える。

1 体 Green 関数

1 体 Green 関数の生成関数を次のように定義する。

$$W(E) \equiv \left\langle \frac{1}{Z_\phi} \int D\phi \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{a=1}^n t \phi^a ((E - i\epsilon) I_N - H) \phi^a \right\} \right\rangle, \quad (4.47)$$

$$Z_\phi = \int D\phi \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{a=1}^n t \phi^a \phi^a \right).$$

ϕ : n 個の内部自由度を持った N 成分実ベクトル

1 体 Green 関数と生成関数の関係式は

$$G(E) = \lim_{n \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{Nn} \right) \frac{d}{dE} W(E), \quad (4.48)$$

で与えられる。

生成関数 $W(E)$ の計算をおこなう。行列 H についての平均をとると

$$W(E) = \frac{1}{Z_\phi} \int D\phi \exp \left(-\frac{i}{2} \sum_{a=1}^n {}^t\phi^a E I_N \phi^a - \frac{1}{8N} \sum_{a,b=1}^n ({}^t\phi^a \phi^b)^2 \right), \quad (4.49)$$

となる。ここで Hubbard-Stratonovich 変換

$$\exp \left(-\frac{1}{8N} ({}^t\phi^a \phi^b)^2 \right) = \frac{1}{Z_Q} \int DQ \exp \left(-\frac{N}{2} Q_{ab} Q_{ba} + \frac{i}{2} {}^t\phi^a \phi^b Q_{ab} \right). \quad (4.50)$$

$$Z_Q = \int DQ \exp \left(-\frac{N}{2} \text{Tr} Q^2 \right). \quad (4.51)$$

Q : $n \times n$ 実対称行列

を行い、 ϕ 積分を実行すると生成関数は次のようになる。

$$W(E) = \frac{1}{Z_Q} \int DQ \exp \left\{ -\frac{N}{2} \text{Tr} (Q^2 + \ln i (E I_n - Q)) \right\}. \quad (4.52)$$

(4.52) 式の Q 積分を鞍点法で近似的に評価する。鞍点方程式は

$$\frac{1}{E I_n - Q} = 2Q, \quad (4.53)$$

である。これを解くと

$$Q_* = u_- I_n, \quad u_- = \frac{1}{2} (E^2 - \sqrt{E^2 - 2}), \quad (4.54)$$

が得られる。つぎに $Q = Q_* + \frac{\delta Q}{\sqrt{N}}$ として (4.52) 式に代入し、 δQ の 2 次まで展開するとつぎのようになる。

$$W(E) \sim e^{-N g(u_-)} \left(\frac{1}{g''(u_-)} \right)^{n(n+1)/4}, \quad (4.55)$$

$$g(x) \equiv \frac{1}{2} (x^2 + \ln i (E - x)). \quad (4.56)$$

したがって、(4.48) 式を用いて 1 体 Green 関数は

$$G(E) = E - \sqrt{E^2 - 2} + \frac{1}{2N} \frac{E - \sqrt{E^2 - 2}}{E^2 - 2} + O(1/N^2) \quad (4.57)$$

となる。これは汎関数方程式の方法から導き出された結果と一致する。

2 体連結 Green 関数

2 体 Green 関数の生成関数を次のように定義する。

$$W(E_1, E_2) = \left\langle \frac{1}{Z_{\phi_1} Z_{\phi_2}} \int D\phi_1 D\phi_2 \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{a=1}^n {}^t\phi_\alpha^a ((E_\alpha - i\epsilon) I_N - H) \phi_\alpha^a \right\} \right\rangle. \quad (4.58)$$

ϕ_1, ϕ_2 : n 個の内部自由度を持った N 成分実ベクトル

2 体 Green 関数と生成関数の関係式は

$$G(E_1, E_2) = \lim_{n \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{Nn} \right)^2 \frac{d^2}{dE_1 dE_2} W(E_1, E_2), \quad (4.59)$$

で与えられる。

生成関数 $W(E_1, E_2)$ の計算をおこなう。行列 H についての平均をとると

$$W(E_1, E_2) = \frac{1}{Z_{\phi_1} Z_{\phi_2}} \int D\phi_1 D\phi_2 \times \exp \left(-\frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{a=1}^n t_{\alpha}^a E_{\alpha} I_N \phi_{\alpha}^a - \frac{1}{8N} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \sum_{a, b=1}^n t_{\alpha}^a \phi_{\alpha}^b t_{\beta}^a \phi_{\beta}^b \right), \quad (4.60)$$

ここで、Hubbard-Stratonovich 変換

$$\exp \left(-\frac{1}{8N} t_{\alpha}^a \phi_{\alpha}^b t_{\beta}^a \phi_{\beta}^b \right) = \frac{1}{Z_Q} \int DQ \exp \left(-\frac{N}{2} Q_{ab}^{\alpha\beta} Q_{ba}^{\beta\alpha} + \frac{i}{2} Q_{ab}^{\alpha\beta} t_{\alpha}^a \phi_{\alpha}^b \right), \quad (4.61)$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q^{11} & Q^{12} \\ Q^{21} & Q^{22} \end{pmatrix}: 2n \times 2n \text{ 実対称行列}$$

$$Q^{11}, Q^{22}: n \times n \text{ 実対称行列}, \quad tQ^{21} = Q^{12}$$

を行い、 ϕ_1 、 ϕ_2 積分を実行すると生成関数は次のようになる。

$$W(E_1, E_2) = \frac{1}{Z_Q} \int DQ \exp \left\{ -\frac{N}{2} \text{Tr}(Q^2 + \ln i(\mathbf{E} - Q)) \right\}. \quad (4.62)$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1 I_n & 0 \\ 0 & E_2 I_n \end{pmatrix}.$$

(4.62) 式の Q 積分を鞍点法で近似的に評価する。鞍点方程式は

$$\frac{1}{\mathbf{E} - Q} = 2Q, \quad (4.63)$$

である。これを解くと

$$Q_s = \begin{pmatrix} u_- I_n & 0 \\ 0 & v_- I_n \end{pmatrix}, \quad (4.64)$$

$$u_- = \frac{1}{2}(E_1 - \sqrt{E_1^2 - 2}) = \frac{1}{2}G(E_1),$$

$$v_- = \frac{1}{2}(E_2 - \sqrt{E_2^2 - 2}) = \frac{1}{2}G(E_2),$$

が得られる。つぎに $Q = Q_s + \frac{\delta Q}{\sqrt{N}}$ として (4.62) 式に代入し、 δQ の 2 次まで展開するとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} W(E_1, E_2) &\sim \frac{1}{Z_Q} e^{-Nng(u_-)} \int D(\delta Q^{11}) \exp \left\{ -\frac{1}{2}(1 - 2u_-^2) \text{Tr}(\delta Q^{11})^2 \right\} \\ &\quad \times e^{-Nng(v_-)} \int D(\delta Q^{22}) \exp \left\{ -\frac{1}{2}(1 - 2v_-^2) \text{Tr}(\delta Q^{22})^2 \right\} \\ &\quad \times \int D(\delta Q^{12}) \exp \left\{ -(1 - 2u_-^2 v_-^2) \text{Tr}(\delta Q^{12})^2 \right\} \\ &= e^{-Nng(u_-)} \left(\frac{1}{g''(u_-)} \right)^{n(n+1)/4} e^{-Nng(v_-)} \left(\frac{1}{g''(v_-)} \right)^{n(n+1)/4} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{1 - 2u_- v_-} \right)^{n^2/2} \\ &= W(E_1) W(E_2) \left(\frac{1}{1 - 2u_- v_-} \right)^{n^2/2}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$g(x) \equiv \frac{1}{2}(x^2 + \ln i(E - x)). \quad (4.66)$$

したがって、(4.59) 式を用いて 2 体連結 Green 関数は

$$G_c(E_1, E_2) = -\frac{2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \ln \left(1 - \frac{1}{2} G(E_1) G(E_2) \right). \quad (4.67)$$

となる。これは汎関数方程式の方法から導き出された結果と一致する。

4.2.2 Gauss 型ユニタリ集団

次に H が $N \times N$ エルミート行列の場合を考える。計算方法は Gauss 型直交集団の場合とほぼ同じである。

1 体 Green 関数

1 体 Green 関数の生成関数を次のように定義する。

$$W(E) \equiv \left\langle \frac{1}{Z_\phi} \int D\phi \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{a=1}^n \phi^{a\dagger} ((E - i\epsilon) I_N - H) \phi^a \right\} \right\rangle, \quad (4.68)$$

$$Z_\phi = \int D\phi \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \phi^{a\dagger} \phi^a \right).$$

ϕ : n 個の内部自由度を持った N 成分複素ベクトル

1 体 Green 関数と生成関数の関係式は

$$G(E) = \lim_{n \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{Nn} \right) \frac{d}{dE} W(E), \quad (4.69)$$

で与えられる。

生成関数 $W(E)$ の計算をおこなう。行列 H についての平均をとり、Hubbard-Stratonovich 変換を行い、 ϕ 積分を実行すると生成関数は次のようになる。

$$W(E) = \frac{1}{Z_Q} \int DQ \exp \left\{ -\frac{N}{2} \text{Tr}(Q^2 + 2\ln i(EI_n - Q)) \right\}. \quad (4.70)$$

(4.70) 式の Q 積分を鞍点法で近似的に評価する。鞍点方程式は

$$\frac{1}{EI_n - Q} = Q, \quad (4.71)$$

である。これを解くと

$$Q_s = w_- I_n, \quad w_- = \frac{1}{2}(E^2 - \sqrt{E^2 - 4}), \quad (4.72)$$

が得られる。つぎに $Q = Q_s + \frac{\delta Q}{\sqrt{N}}$ として (4.70) 式に代入し、 δQ の 2 次まで展開するとつぎのようになる。

$$W(E) \sim \exp \{ -Nng(w_-) \} \left(\frac{1}{1 - w_-^2} \right)^{n^2/2}, \quad (4.73)$$

$$g(x) \equiv \frac{1}{2}(x^2 + 2\ln i(E - x)). \quad (4.74)$$

したがって、(4.69) 式を用いて 1 体 Green 関数は

$$G(E) = \frac{1}{2}(E - \sqrt{E^2 - 4}) + O(1/N^2), \quad (4.75)$$

となる。Gauss 型ユニタリ集団では $1/N$ の項は消える。この結果は汎関数方程式の方法から導き出された結果や、他の方法で得られた結果と一致する。

2 体連結 Green 関数

2 体 Green 関数の生成関数を次のように定義する。

$$W(E_1, E_2) = \left\langle \frac{1}{Z_{\phi_1} Z_{\phi_2}} \int D\phi_1 D\phi_2 \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{a=1}^n \phi_{\alpha}^{a\dagger} ((E_{\alpha} - i\epsilon)I_N - H) \phi_{\alpha}^a \right\} \right\rangle. \quad (4.76)$$

ϕ_1, ϕ_2 : n 個の内部自由度を持った N 成分複素ベクトル

2 体 Green 関数と生成関数の関係式は

$$G(E_1, E_2) = \lim_{n \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{Nn} \right)^2 \frac{d^2}{dE_1 dE_2} W(E_1, E_2), \quad (4.77)$$

で与えられる。

生成関数 $W(E_1, E_2)$ の計算をおこなう。行列 H についての平均をとり、Hubbard-Stratonovich 変換を行い、 ϕ_1, ϕ_2 積分を実行すると生成関数は次のようになる。

$$W(E_1, E_2) = \frac{1}{Z_Q} \int DQ \exp \left\{ -\frac{N}{2} \text{Tr}(Q^2 + 2\ln i(\mathbf{E} - Q)) \right\}. \quad (4.78)$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q^{11} & Q^{12} \\ Q^{21} & Q^{22} \end{pmatrix} : 2n \times 2n \text{ エルミート行列}$$

$$Q^{11}, Q^{22}: n \times n \text{ エルミート行列}, \quad Q^{21\dagger} = Q^{12}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1 I_n & 0 \\ 0 & E_2 I_n \end{pmatrix}.$$

(4.78) 式の Q 積分を鞍点法で近似的に評価する。鞍点方程式は

$$\frac{1}{\mathbf{E} - Q} = Q, \quad (4.79)$$

である。これを解くと

$$Q_s = \begin{pmatrix} w_1 I_n & 0 \\ 0 & w_2 I_n \end{pmatrix}, \quad (4.80)$$

$$w_1 = \frac{1}{2}(E_1 - \sqrt{E_1^2 - 4}) = G(E_1),$$

$$w_2 = \frac{1}{2}(E_2 - \sqrt{E_2^2 - 4}) = G(E_2),$$

が得られる。つぎに $Q = Q_s + \frac{\delta Q}{\sqrt{N}}$ として (4.78) 式に代入し、 δQ の 2 次まで展開するとつぎのようになる。

$$W(E_1, E_2) = W(E_1)W(E_2) \left(\frac{1}{1 - w_1 w_2} \right)^{n^2} \quad (4.81)$$

したがって、(4.77) 式を用いて 2 体連結 Green 関数は

$$G_c(E_1, E_2) = -\frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \ln(1 - G(E_1)G(E_2)). \quad (4.82)$$

となる。これは汎関数方程式の方法から導き出された結果と一致する。

4.2.3 Gauss 型シンプレクティック集団

H が $2N \times 2N$ シンプレクティック行列の場合を考える。計算方法は Gauss 型直交集団、Gauss 型ユニタリ集団の場合とほぼ同じであるが、この場合各状態が 2 重に縮退していることを考慮し、確率分布と Green 関数を次のように定義し直す。

$$P(H)dH = \frac{1}{Z_H} \exp\left(-\frac{N}{4} \text{Tr} H^2\right) dH, \quad (4.83)$$

$$G(E) = \left\langle \frac{1}{2N} \text{Tr} \frac{1}{EI_N - H} \right\rangle, \quad (4.84)$$

$$G(E_1, E_2) = \left\langle \frac{1}{2N} \text{Tr} \frac{1}{E_1 I_N - H} \frac{1}{2N} \text{Tr} \frac{1}{E_2 I_N - H} \right\rangle, \quad (4.85)$$

$$G_c(E_1, E_2) = G(E_1, E_2) - G(E_1)G(E_2). \quad (4.86)$$

1 体 Green 関数

1 体 Green 関数の生成関数を次のように定義する。

$$W(E) \equiv \left\langle \frac{1}{Z_\phi} \int D\phi \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{a=1}^n \phi^{a\dagger} ((E - i\epsilon)I_N - H) \phi^a \right\} \right\rangle, \quad (4.87)$$

$$Z_\phi = \int D\phi \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \phi^{a\dagger} \phi^a \right).$$

ϕ : n 個の内部自由度を持った N 成分複素ベクトル,

$$\phi_i^a = \begin{pmatrix} \phi_i^{a(0)} \\ \phi_i^{a(1)} \end{pmatrix}.$$

1 体 Green 関数と生成関数の関係式は

$$G(E) = \lim_{n \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2Nn} \right) \frac{d}{dE} W(E), \quad (4.88)$$

で与えられる。

生成関数 $W(E)$ の計算をおこなう。行列 H についての平均をとり、Hubbard-Stratonovich 変換を行い、 ϕ 積分を実行すると生成関数は次のようになる。

$$W(E) = \frac{1}{Z_Q} \int DQ \exp \left\{ -\frac{N}{4} \text{Tr} (Q^2 + 4 \ln i (EI_{2n} - Q)) \right\}. \quad (4.89)$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q^{11} & Q^{12} \\ Q^{21} & Q^{22} \end{pmatrix} : 2n \times 2n \text{ シンプレクティック行列}$$

(4.90) 式の Q 積分を鞍点法で近似的に評価する。鞍点方程式は

$$\frac{2}{EI_{2n} - Q} = Q, \quad (4.90)$$

である。これを解くと

$$Q_s = w_- I_{2n}, \quad w_- = \frac{1}{2} (E^2 - \sqrt{E^2 - 8}), \quad (4.91)$$

が得られる。つぎに $Q = Q_s + \frac{\delta Q}{\sqrt{N}}$ として (4.90) 式に代入し、 δQ の 2 次まで展開するとつぎのようになる。

$$W(E) \sim \exp\{-Nng(w_-)\} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}w_-^2} \right)^{n^2 - (n/2)}, \quad (4.92)$$

$$g(x) \equiv \frac{1}{2}(x^2 + 4\ln i(E - x)). \quad (4.93)$$

したがって、(4.88) 式を用いて 1 体 Green 関数は

$$G(E) = \frac{1}{4}(E - \sqrt{E^2 - 8}) - \frac{1}{4N} \frac{E - \sqrt{E^2 - 8}}{E^2 - 8} + O(1/N^2), \quad (4.94)$$

となる。この結果は汎関数方程式の方法から導き出された結果と一致する。

2 体連結 Green 関数

2 体 Green 関数の生成関数を次のように定義する。

$$W(E_1, E_2) = \left\langle \frac{1}{Z_{\phi_1} Z_{\phi_2}} \int D\phi_1 D\phi_2 \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{a=1}^n \phi_{\alpha}^{a\dagger} ((E_{\alpha} - i\epsilon)I_N - H) \phi_{\alpha}^a \right\} \right\rangle. \quad (4.95)$$

ϕ_1, ϕ_2 : n 個の内部自由度を持った N 成分複素ベクトル

$$\phi_{i\alpha}^a = \begin{pmatrix} \phi_{i\alpha}^{a(0)} \\ \phi_{i\alpha}^{a(1)} \end{pmatrix}.$$

2 体 Green 関数と生成関数の関係式は

$$G(E_1, E_2) = \lim_{n \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2Nn} \right)^2 \frac{d^2}{dE_1 dE_2} W(E_1, E_2), \quad (4.96)$$

で与えられる。

生成関数 $W(E_1, E_2)$ の計算をおこなう。行列 H についての平均をとり、Hubbard-Stratonovich 変換を行い、 ϕ_1, ϕ_2 積分を実行すると生成関数は次のようになる。

$$W(E_1, E_2) = \frac{1}{Z_Q} \int DQ \exp \left\{ -\frac{N}{4} \text{Tr}(Q^2 + 4\ln i(\mathbf{E} - Q)) \right\}. \quad (4.97)$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q^{11} & Q^{12} \\ Q^{21} & Q^{22} \end{pmatrix}: 4n \times 4n \text{ シンプレクティック行列}$$

$$Q^{11}, Q^{22}: 2n \times 2n \text{ シンプレクティック行列}$$

$$Q^{21\dagger} = Q^{12}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1 I_{2n} & 0 \\ 0 & E_2 I_{2n} \end{pmatrix}.$$

(4.97) 式の Q 積分を鞍点法で近似的に評価する。鞍点方程式は

$$\frac{2}{\mathbf{E} - Q} = Q, \quad (4.98)$$

である。これを解くと

$$Q_s = \begin{pmatrix} w_1 I_{2n} & 0 \\ 0 & w_2 I_{2n} \end{pmatrix}, \quad (4.99)$$

$$w_1 = \frac{1}{2}(E_1 - \sqrt{E_1^2 - 8}) = 2G(E_1),$$

$$w_2 = \frac{1}{2}(E_2 - \sqrt{E_2^2 - 8}) = 2G(E_2),$$

が得られる。つぎに $Q = Q_s + \frac{\delta Q}{\sqrt{N}}$ として (4.97) 式に代入し、 δQ の 2 次まで展開するとつぎのようになる。

$$W(E_1, E_2) = W(E_1)W(E_2) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}w_1 w_2} \right)^{n^2} \quad (4.100)$$

したがって、(4.96) 式を用いて 2 体連結 Green 関数は

$$G_c(E_1, E_2) = -\frac{1}{2N^2} \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \ln(1 - 2G(E_1)G(E_2)). \quad (4.101)$$

となる。これは汎関数方程式の方法から導き出された結果と一致する。

4.2.4 3 体連結 Green 関数

計算方法は 1 体、2 体のときと同じで、まず 3 体 Green 関数を次のように定義する。

$$G(E_1, E_2, E_3) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{E_1 I_N - H} \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{E_2 I_N - H} \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{E_3 I_N - H} \right\rangle. \quad (4.102)$$

Gauss 型シンプレクティック集団の場合、 N を $2N$ に変える。この Green 関数の生成関数 $W(E_1, E_2, E_3)$ を定義する。この生成関数と 3 体 Green 関数は

$$G(E_1, E_2, E_3) = \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{-2}{\beta N n} \right)^3 \frac{\partial^3}{\partial E_1 \partial E_2 \partial E_3} W(E_1, E_2, E_3), \quad (4.103)$$

で関係づけられる。ここで $\beta = 1, 2, 4$ である。生成関数 $W(E_1, E_2, E_3)$ は行列 Q を用いて次のように書ける。

$$W(E_1, E_2, E_3) = \frac{1}{Z_Q} \int DQ \exp \left\{ -\frac{N}{2\mu_\beta} \text{Tr}(Q^2 + \beta \ln i(\mathbf{E} - Q)) \right\}. \quad (4.104)$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \text{diag}(E_1 I_n, E_2 I_n, E_3 I_n) & \beta = 1, 2 \\ \text{diag}(E_1 I_{2n}, E_2 I_{2n}, E_3 I_{2n}) & \beta = 4 \end{cases}.$$

$$Q = \begin{cases} 3n \times 3n \text{ 実対称行列} & \beta = 1 \\ 3n \times 3n \text{ エルミート行列} & \beta = 2 \\ 6n \times 6n \text{ シンプレクティック行列} & \beta = 4 \end{cases}.$$

$$\mu_\beta = \begin{cases} 1 & \beta = 1, 2 \\ 2 & \beta = 4 \end{cases}.$$

(4.104) 式の Q 積分を鞍点法で近似的に評価すると、結果として 3 体連結 Green 関数

$$G_c(E_1, E_2, E_3) = -\frac{\lambda_\beta}{N^4} \frac{\partial^3}{\partial E_1 \partial E_2 \partial E_3} F(E_1, E_2, E_3). \quad (4.105)$$

$$F(z_1, z_2, z_3) = \frac{X_{12}}{1 - X_{12}} \frac{X_{23}}{1 - X_{23}} \frac{X_{31}}{1 - X_{31}} + \frac{X_{31}}{1 - X_{31}} \frac{X_{12}}{1 - X_{12}} \frac{1}{1 - X_{11}} \\ + \frac{X_{12}}{1 - X_{12}} \frac{X_{23}}{1 - X_{23}} \frac{1}{1 - X_{22}} + \frac{X_{23}}{1 - X_{23}} \frac{X_{31}}{1 - X_{31}} \frac{1}{1 - X_{33}}, \quad (4.106)$$

$$X_{ij} = \frac{\beta}{2} G(E_i) G(E_j), \quad (4.107)$$

$$\lambda_\beta = \begin{cases} 4 & \beta = 1 \\ 1 & \beta = 2 \\ 1/4 & \beta = 4 \end{cases}.$$

が得られる。これは汎関数方程式の方法から導き出された結果と一致する。

4.3 ダイアグラム展開法による Green 関数の計算

次にダイアグラム展開法による 2-準位長距離相関関数 (2 体連結 Green 関数) の計算をおこなう。Gauss 型ユニタリ集団についてはすでに E. Brézin & A. Zee によってその計算法は示されている [24]。

ランダム行列に対する確率分布を

$$P(H)dH = \frac{1}{Z_H} \exp\left(-\frac{N}{2} \text{Tr} H^2\right) dH, \quad (4.108)$$

と定義する。任意の関数 $\mathcal{O}(H)$ の平均を

$$\langle \mathcal{O}(H) \rangle = \int \mathcal{O}(H) P(H) dH, \quad (4.109)$$

と定義する。1 体 Green 関数、2 体 Green 関数、2 体連結 Green 関数を

$$G(E) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{EI_N - H} \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_{ii}(E), \quad (4.110)$$

$$G_{ij}(E) \equiv \left\langle \left(\frac{1}{EI_N - H} \right)_{ij} \right\rangle = \int \left(\frac{1}{EI_N - H} \right)_{ij} P(H) dH, \quad (4.111)$$

$$G(E_1, E_2) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{E_1 I_N - H} \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{E_2 I_N - H} \right\rangle, \quad (4.112)$$

$$G_c(E_1, E_2) = G(E_1, E_2) - G(E_1) G(E_2), \quad (4.113)$$

とあらわす。

4.3.1 Gauss 型直交集団

まずは H が $N \times N$ 実対称行列のときを考える。

1 体 Green 関数

1 体 Green 関数を H のべきで展開する。

$$G_{ij}(E) = \frac{1}{E} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{E^n} \langle (H^n)_{ij} \rangle. \quad (4.114)$$

この (4.114) 式の 1 体 Green 関数の $1/N$ -展開をダイアグラム法を用いて行う。 H に対する裸のプロパゲーターは次式で表される。

$$\langle H_{ij} H_{kl} \rangle = \frac{1}{2N} (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}). \quad (4.115)$$

これに対応するダイアグラムを図 4.1 に表す。 $1/N$ -展開の初項に寄与するダイアグラムは図 4.1(a)

$$\begin{aligned}
 & \frac{i}{j} \overline{\frac{1}{k}} \equiv \frac{1}{2N} \delta_{ij} \delta_{jk} \\
 & \text{(a)} \\
 & \frac{i}{j} \overline{\frac{1}{k}} \equiv \frac{1}{2N} \delta_{ij} \delta_{jk} \\
 & \text{(b)}
 \end{aligned}$$

図 4.1: 裸のプロパゲーターのダイアグラム (GOE)。(a) 向き付け可能な裸のプロパゲーター (b) 向き付け不可能な裸のプロパゲーター

$$\begin{aligned}
 & \frac{\delta_{ij}}{2^{2n+1}} g_n = \text{---} \bigcirc_n \text{---} \\
 & \text{---} \bigcirc_{n+1} \text{---} = \text{---} \bigcirc_n \text{---} + \sum_m \text{---} \bigcirc_{n-m} \text{---} \bigcirc_m \text{---}
 \end{aligned}$$

図 4.2: g_n の漸化式に相当するダイアグラム。

のプロパゲーターを持つダイアグラムで、図 4.1(b) のプロパゲーターを持つダイアグラムは寄与しない。これより (4.114) の級数は

$$G_{ij}(E) = \frac{\delta_{ij}}{E} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left(\frac{1}{2E^2} \right)^n \quad (4.116)$$

となる。ここで g_n は n 個の裸のプロパゲーターをもつ向き付け可能なダイアグラムの数で、次の漸化式を満たす。

$$\begin{aligned}
 g_{n+1} &= g_n + \sum_{m=0}^{n-1} g_m g_{n-m}; \quad n > 1, \\
 g_0 &= 1.
 \end{aligned} \quad (4.117)$$

この漸化式の相当するダイアグラムを図 4.2 に示す。

一方、1 粒子既約な自己エネルギー

$$\Sigma(E) \equiv E - G(E)^{-1} = E \sum_{n=1}^{\infty} s_n \left(\frac{1}{2E^2} \right)^n, \quad (4.118)$$

$$G(E)(E - \Sigma(E)) = 1, \quad (4.119)$$

を導入する。(4.114) 式と (4.118) 式の展開係数 g_n と s_n の間には次の関係式が成り立つ。

$$\sum_{m=0}^n s_n g_{n-m} = 0; \quad n > 1, \quad (4.120)$$

$$s_0 \equiv -1.$$

上式から数学的帰納法により

$$s_n = g_{n+1} - \sum_{m=0}^{n-1} g_m g_{n-m}, \quad (4.121)$$

が得られる。この (4.121) と (4.117) から展開係数 g_n と s_n の関係は

$$s_n = g_n; \quad n > 1, \quad (4.122)$$

であることがわかる。これを (4.118) 式に代入し、 $\Sigma(E)$ について解くと

$$\Sigma(E) = \frac{1}{2} G(E) = \frac{1}{2(E - \Sigma(E))}, \quad (4.123)$$

$$\Sigma(E) = \frac{1}{2}(E - \sqrt{E^2 - 2}), \quad (4.124)$$

となる。したがって 1 体 Green 関数

$$G(E) = E - \sqrt{E^2 - 2}, \quad (4.125)$$

が得られる。この結果は汎関数方程式の方法、レプリカ法で得られたものと一致する。

2 体連結 Green 関数

2 体連結 Green 関数は参考文献 [25] にしたがひ、次のように展開して計算するのが便利である。

$$G_c(E_1, E_2) = \frac{1}{N^2} \frac{\partial}{\partial E_1} \frac{\partial}{\partial E_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \frac{1}{E_1^m E_2^n} \langle \text{Tr} H^m \text{Tr} H^n \rangle_c. \quad (4.126)$$

まずは $m = n$ とし、同じトレース内での縮約を無視することにする。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (E_1 E_2)^n}. \quad (4.127)$$

(4.127) 式において、 $1/N$ -展開の初項に寄与する n 次オーダーのダイアグラムは図 4.3 に示されるようなはしご型ダイアグラムである。2 体連結 Green 関数においては向き付け不可能なダイアグラムも寄与する (図 4.3(b))。この n 次オーダーのダイアグラムは

$$\langle \text{Tr} H^n \text{Tr} H^n \rangle = \left(\frac{1}{2}\right)^n 2n \quad (4.128)$$

になると類推される。これより

$$\frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2} \left(\frac{1}{2E_1 E_2}\right)^n = -\frac{2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \ln \left(1 - \frac{1}{2E_1 E_2}\right), \quad (4.129)$$

が得られる。

つぎに $m = n$ の結果に加えて同じトレース内の縮約を含む場合を考える。これは裸のプロパゲーターを、衣を着たプロパゲーターに置き換えることにより達成される。

$$\frac{\delta_{ij}}{E} \longrightarrow G_{ij}(E). \quad (4.130)$$

これにより 2 体連結 Green 関数が得られる。

$$G_c(E_1, E_2) = -\frac{2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \ln \left(1 - \frac{G(E_1)G(E_2)}{2}\right). \quad (4.131)$$

この結果は汎関数方程式の方法、レプリカ法で得られたものと一致する。

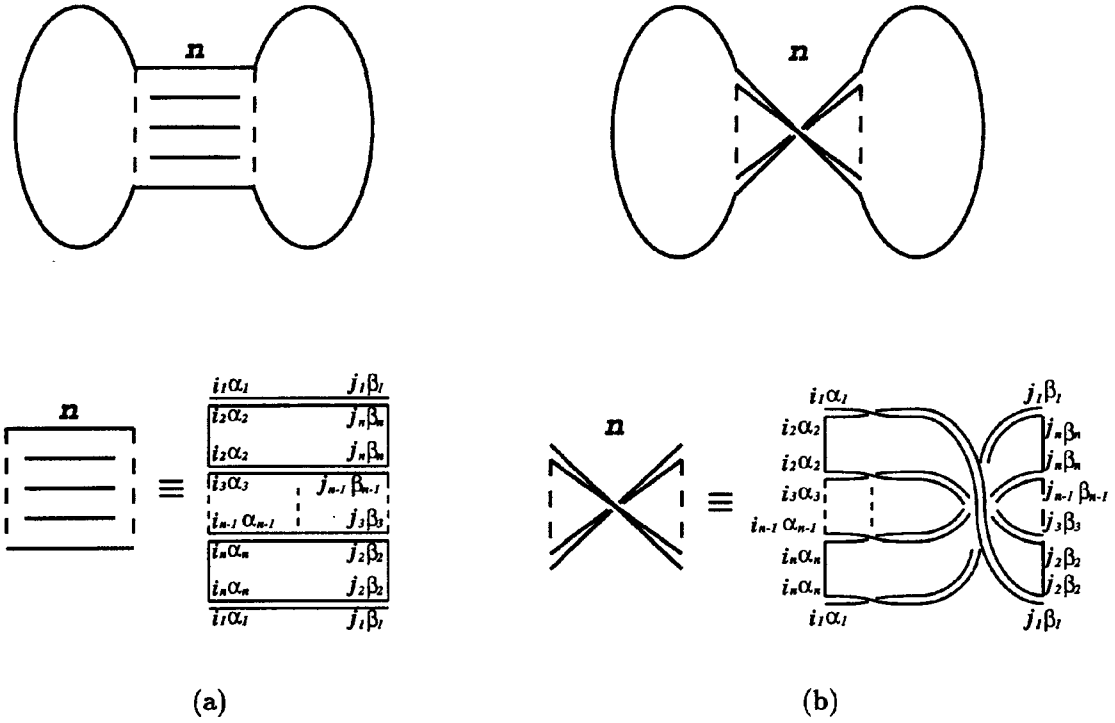


図 4.3: (a) n 次の向き付け可能なダイアグラムとその縮約部分の定義。(b) n 次の向き付け不可能なダイアグラムとその縮約部分の定義。GOE の場合、スピンに関する指標 $(\alpha_1, \beta_1, \dots)$ は無視される。

4.3.2 Gauss 型ユニタリ集団

次に H が $N \times N$ エルミート行列のときを考える [24]。

1 体 Green 関数

1 体 Green 関数を H のべきで展開する。

$$G_{ij}(E) = \frac{1}{E} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{E^n} \langle (H^n)_{ij} \rangle. \quad (4.132)$$

H に対する裸のプロパゲーターは次式で表される。

$$\langle H_{ij} H_{kl} \rangle = \frac{1}{2N} \delta_{il} \delta_{jk}. \quad (4.133)$$

これに対応するダイアグラムは図 4.1(a) でこの場合図 4.1(b) は存在しない。これより (4.132) の級数は

$$G_{ij}(E) = \frac{\delta_{ij}}{E} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left(\frac{1}{E^2} \right)^n \quad (4.134)$$

となる。ここで g_n は n 個の裸のプロパゲーターをもつ向き付け可能なダイアグラムの数で、次の漸化式を満たす。

$$g_{n+1} = g_n + \sum_{m=0}^{n-1} g_m g_{n-m}; \quad n > 1, \quad (4.135)$$

$$g_0 = 1.$$

この漸化式の相当するダイアグラムを図 4.2 に示す。

一方、1 粒子既約な自己エネルギー

$$\Sigma(E) \equiv E - G(E)^{-1} = E \sum_{n=1}^{\infty} s_n \left(\frac{1}{E^2} \right)^n, \quad (4.136)$$

$$G(E)(E - \Sigma(E)) = 1, \quad (4.137)$$

を導入する。(4.132) 式と (4.136) 式の展開係数 g_n と s_n の間には次の関係式が成り立つ。

$$\sum_{m=0}^n s_n g_{n-m} = 0; \quad n > 1, \quad (4.138)$$

$$s_0 \equiv -1.$$

上式から数学的帰納法により

$$s_n = g_{n+1} - \sum_{m=0}^{n-1} g_m g_{n-m}, \quad (4.139)$$

が得られる。この (4.139) と (4.135) から展開係数 g_n と s_n の関係は

$$s_n = g_n; \quad n > 1, \quad (4.140)$$

であることがわかる。これを (4.136) 式に代入し、 $\Sigma(E)$ について解くと

$$\Sigma(E) = G(E) = \frac{1}{E - \Sigma(E)}, \quad (4.141)$$

$$\Sigma(E) = \frac{1}{2}(E - \sqrt{E^2 - 4}), \quad (4.142)$$

となる。したがって 1 体 Green 関数

$$G(E) = \frac{1}{2}(E - \sqrt{E^2 - 4}), \quad (4.143)$$

が得られる。この結果は汎関数方程式の方法、レプリカ法で得られたものと一致する。

2 体連結 Green 関数

2 体連結 Green 関数を次のように展開する。

$$G_c(E_1, E_2) = \frac{1}{N^2} \frac{\partial}{\partial E_1} \frac{\partial}{\partial E_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \frac{1}{E_1^m E_2^n} \langle \text{Tr} H^m \text{Tr} H^n \rangle_c. \quad (4.144)$$

まずは $m = n$ とし、同じトレース内での縮約を無視することにする。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (E_1 E_2)^n}. \quad (4.145)$$

(4.145) 式において、 $1/N$ -展開の初項に寄与する n 次オーダーのダイアグラムは図 4.3(a) に示されるようなはしご型ダイアグラムのみである。この n 次オーダーのダイアグラムは

$$\langle \text{Tr} H^n \text{Tr} H^n \rangle = n \quad (4.146)$$

になると類推される。これより

$$\frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} \left(\frac{1}{E_1 E_2} \right)^n = -\frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \ln \left(1 - \frac{1}{E_1 E_2} \right), \quad (4.147)$$

が得られる。

つぎに $m = n$ の結果に加えて同じトレース内の縮約を含む場合を考える。これは裸のプロパゲーターを、衣を着たプロパゲーターに置き換えることにより達成される。

$$\frac{\delta_{ij}}{E} \rightarrow G_{ij}(E). \quad (4.148)$$

これにより 2 体連結 Green 関数が得られる。

$$G_c(E_1, E_2) = -\frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \ln(1 - G(E_1)G(E_2)). \quad (4.149)$$

この結果は汎関数方程式の方法、レプリカ法で得られたものと一致する。

4.3.3 Gauss 型シンプレクティック集団

最後に H が $2N \times 2N$ シンプレクティック行列の場合を考える。計算方法は Gauss 型直交集団、Gauss 型ユニタリ集団の場合とはほぼ同じであるが、この場合各状態が 2 重に縮退していることを考慮し、確率分布と Green 関数を次のように定義し直す。

$$P(H)dH = \frac{1}{Z_H} \exp\left(-\frac{N}{4} \text{Tr} H^2\right), \quad (4.150)$$

$$G(E) = \left\langle \frac{1}{2N} \text{Tr} \frac{1}{EI_N - H} \right\rangle, \quad (4.151)$$

$$G(E_1, E_2) = \left\langle \frac{1}{2N} \text{Tr} \frac{1}{E_1 I_N - H} \frac{1}{2N} \text{Tr} \frac{1}{E_2 I_N - H} \right\rangle, \quad (4.152)$$

1 体 Green 関数

1 体 Green 関数を H のべきで展開する。

$$G_{ij}^{\alpha\beta}(E) = \frac{1}{E} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{E^n} \langle (H^n)_{ij}^{\alpha\beta} \rangle. \quad (4.153)$$

H に対する裸のプロパゲーターは次式で表される。

$$\langle H_{ij}^{\alpha\beta} H_{kl}^{\gamma\epsilon} \rangle = \frac{1}{2N} (\delta_{il} \delta_{jk} \delta^{\alpha\epsilon} \delta^{\beta\gamma} + \delta_{ik} \delta_{jl} A^{\alpha\beta, \gamma\epsilon}), \quad (4.154)$$

$$A^{\alpha\beta, \gamma\epsilon} \equiv \delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\epsilon} - \delta^{\alpha\epsilon} \delta^{\beta\gamma}. \quad (4.155)$$

これに対応するダイアグラムを図 4.4 に表す。ダイアグラム自身の形は GOE のときと同じであるがスピンに関する指標がつく。1/ N -展開の初項に寄与するダイアグラムは GOE のときと同じで図 4.4(a) のプロパゲーターを持つダイアグラムで、図 4.4(b) のプロパゲーターを持つダイアグラムは寄与しない。これより (4.153) の級数は

$$G_{ij}^{\alpha\beta}(E) = \frac{\delta_{ij} \delta^{\alpha\beta}}{E} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left(\frac{2}{E^2}\right)^n \quad (4.156)$$

となる。ここで g_n は n 個の裸のプロパゲーターをもつ向き付け可能なダイアグラムの数で、次の漸化式を満たす。

$$g_{n+1} = g_n + \sum_{m=0}^{n-1} g_m g_{n-m}; \quad n > 1, \quad (4.157)$$

$$g_0 = 1.$$

$$\frac{i\alpha}{j\beta} \frac{l\varepsilon}{k\gamma} \equiv \frac{1}{N} \delta_{i1} \delta_{jk} \delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\varepsilon}$$

(a)

$$\frac{i\alpha}{j\beta} \frac{l\varepsilon}{k\gamma} \equiv \frac{1}{N} \delta_{i1} \delta_{jk} A^{\alpha\beta, \gamma\varepsilon}$$

(b)

図 4.4: 裸のプロパゲーターのダイアグラム (GSE)。(a) 向き付け可能な裸のプロパゲーター (b) 向き付け不可能な裸のプロパゲーター

一方、1 粒子既約な自己エネルギー

$$\Sigma(E) \equiv E - G(E)^{-1} = E \sum_{n=1}^{\infty} s_n \left(\frac{2\sigma^2}{E^2} \right)^n, \quad (4.158)$$

$$G(E)(E - \Sigma(E)) = 1, \quad (4.159)$$

を導入する。(4.153) 式と (4.158) 式の展開係数 g_n と s_n の間には次の関係式が成り立つ。

$$\sum_{m=0}^n s_n g_{n-m} = 0; \quad n > 1, \quad (4.160)$$

$$s_0 \equiv -1.$$

上式から数学的帰納法により

$$s_n = g_{n+1} - \sum_{m=0}^{n-1} g_m g_{n-m}, \quad (4.161)$$

が得られる。この (4.161) と (4.157) から展開係数 g_n と s_n の関係は

$$s_n = g_n; \quad n > 1, \quad (4.162)$$

であることがわかる。これを (4.158) 式に代入し、 $\Sigma(E)$ について解くと

$$\Sigma(E) = 2G(E) = \frac{2}{E - \Sigma(E)}, \quad (4.163)$$

$$\Sigma(E) = \frac{1}{2}(E - \sqrt{E^2 - 8}), \quad (4.164)$$

となる。したがって 1 体 Green 関数

$$G(E) = \frac{1}{4}(E - \sqrt{E^2 - 8}), \quad (4.165)$$

が得られる。この結果は汎関数方程式の方法、レプリカ法で得られたものと一致する。

2 体連結 Green 関数

2 体連結 Green 関数を次のように展開する。

$$G_c(E_1, E_2) = \frac{1}{4N^2} \frac{\partial}{\partial E_1} \frac{\partial}{\partial E_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \frac{1}{E_1^m E_2^n} \langle \text{Tr} H^m \text{Tr} H^n \rangle_c. \quad (4.166)$$

まずは $m = n$ とし、同じトレース内での縮約を無視することにする。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (E_1 E_2)^n}. \quad (4.167)$$

(4.167) 式において、 $1/N$ -展開の初項に寄与する n 次オーダーのダイアグラムは GOE の場合と同じで、図 4.3 に示されるようなはしご型ダイアグラムである。このダイアグラムの計算において、図 4.3(b) のダイアグラムのテンソル部分は次のように計算される。

$$(A^n)^{\alpha_1 \alpha_{n+1}, \beta_1 \beta_{n+1}} \equiv \sum_{\alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_2, \dots, \beta_n} A^{\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2} A^{\alpha_2 \alpha_3, \beta_2 \beta_3} \dots A^{\alpha_n \alpha_{n+1}, \beta_n \beta_{n+1}} \quad (4.168)$$

$$= 2^{n-1} A^{\alpha_1 \alpha_{n+1}, \beta_1 \beta_{n+1}}, \quad (4.169)$$

$$\text{Tr} A^n \equiv \sum_{\alpha, \beta} (A^n)^{\alpha\alpha, \beta\beta} = 2^n. \quad (4.170)$$

これより、 n 次オーダーのダイアグラムは

$$\langle \text{Tr} H^n \text{Tr} H^n \rangle = (2^n + \text{Tr} A^n) n = (2^n) 2n, \quad (4.171)$$

になると類推される。これより

$$\frac{1}{4N^2} \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2} \left(\frac{2}{E_1 E_2} \right)^n = -\frac{1}{2N^2} \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \ln \left(1 - \frac{2}{E_1 E_2} \right), \quad (4.172)$$

が得られる。

つぎに $m = n$ の結果に加えて同じトレース内の縮約を含む場合を考える。これは裸のプロパゲーターを、衣を着たプロパゲーターに置き換えることにより達成される。

$$\frac{\delta_{ij} \delta^{\alpha\beta}}{E} \rightarrow G_{ij}^{\alpha\beta}(E). \quad (4.173)$$

これにより 2 体連結 Green 関数が得られる。

$$G_c(E_1, E_2) = -\frac{1}{2N^2} \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \ln (1 - 2G(E_1)G(E_2)). \quad (4.174)$$

この結果は汎関数方程式の方法、レプリカ法で得られたものと一致する。

4.3.4 3 体連結 Green 関数

計算方法は 2 体のときと同じで、3 体連結 Green 関数を次のように定義する。

$$G_c(E_1, E_2, E_3) = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{E_1 I_N - H} \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{E_2 I_N - H} \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{E_3 I_N - H} \right\rangle_c \quad (4.175)$$

$$= -\frac{1}{N^3} \frac{\partial^3}{\partial E_1 \partial E_2 \partial E_3} \times \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_3=1}^{\infty} \frac{1}{n_1 n_2 n_3} \left\langle \text{Tr} \left(\frac{H}{E_1} \right)^{n_1} \text{Tr} \left(\frac{H}{E_2} \right)^{n_2} \text{Tr} \left(\frac{H}{E_3} \right)^{n_3} \right\rangle_c. \quad (4.176)$$

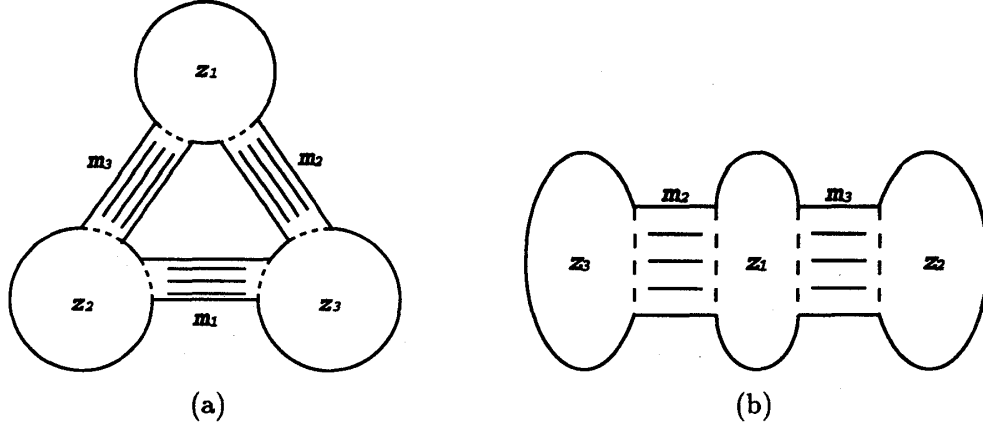


図 4.5: m_1 本、 m_2 本、 m_3 本のプロパゲータをもつ向き付け可能なダイアグラム。(a) m_1 、 m_2 、 m_3 が 0 でない場合の場合。(b) $m_1 = 0$ で m_2 と m_3 が 0 でない場合。

Gauss 型シンプレクティック集団の場合、 N を $2N$ に変える。この 3 体連結 Green 関数の計算に寄与するダイアグラムを図 4.5、図 4.6 に示す。このうち $m_3 = 0$ のダイアグラムに関しては頂点補正が必要となる (図 4.7)。以上のダイアグラムから 3 体連結 Green 関数

$$G_c(E_1, E_2, E_3) = -\frac{\lambda_\beta}{N^4} \frac{\partial^3}{\partial E_1 \partial E_2 \partial E_3} F(E_1, E_2, E_3). \quad (4.177)$$

$$F(z_1, z_2, z_3) = \frac{X_{12}}{1-X_{12}} \frac{X_{23}}{1-X_{23}} \frac{X_{31}}{1-X_{31}} + \frac{X_{31}}{1-X_{31}} \frac{X_{12}}{1-X_{12}} \frac{1}{1-X_{11}} \\ + \frac{X_{12}}{1-X_{12}} \frac{X_{23}}{1-X_{23}} \frac{1}{1-X_{22}} + \frac{X_{23}}{1-X_{23}} \frac{X_{31}}{1-X_{31}} \frac{1}{1-X_{33}}, \quad (4.178)$$

$$X_{ij} = \frac{\beta}{2} G(E_i) G(E_j), \quad (4.179)$$

$$\lambda_\beta = \begin{cases} 4 & \beta = 1 \\ 1 & \beta = 2 \\ 1/4 & \beta = 4 \end{cases}.$$

が得られる。これは汎関数方程式の方法、レプリカ法で得られたものと一致する。

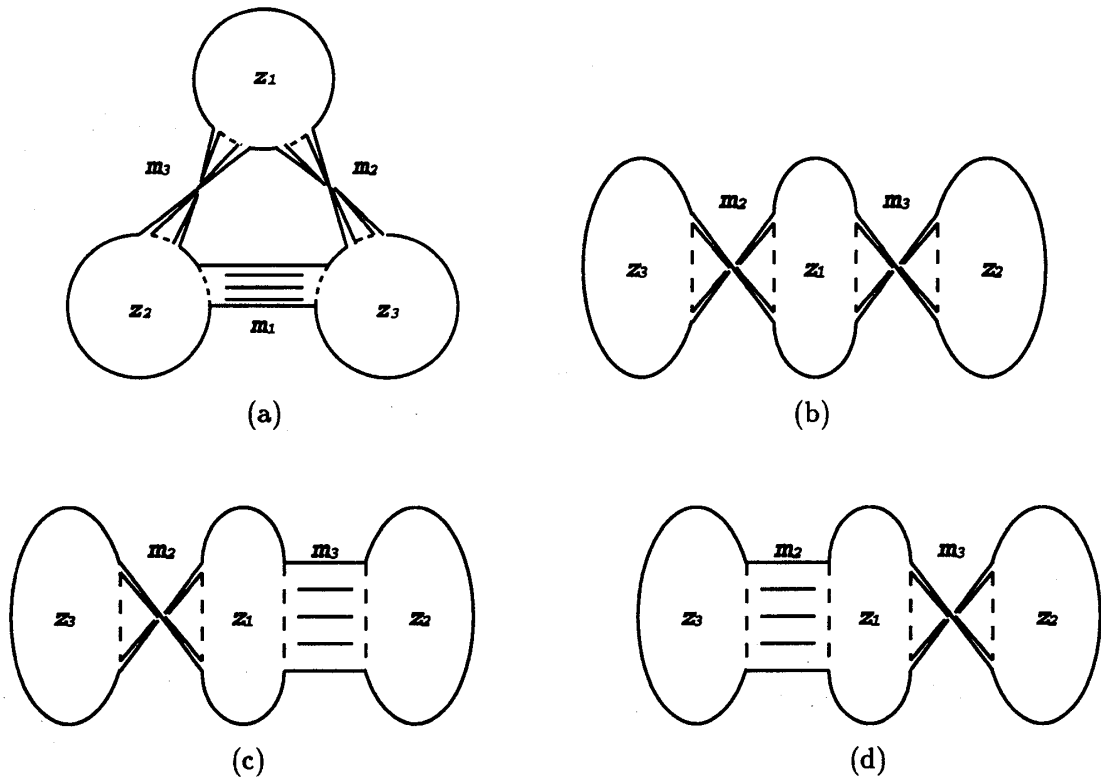


図 4.6: m_1 本、 m_2 本、 m_3 本のプロパゲータをもつ向き付け不可能なダイアグラム。(a) m_1 、 m_2 、 m_3 が 0 でない場合の場合。(b),(c) and (d) $m_1 = 0$ で m_2 と m_3 が 0 でない場合。

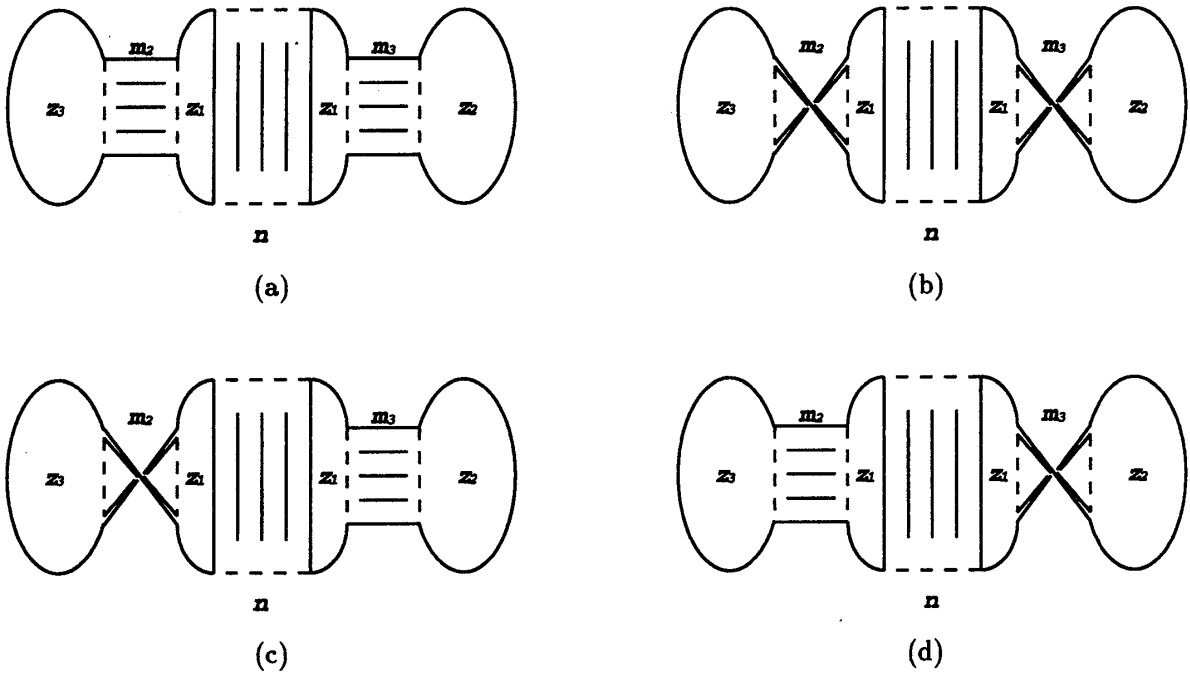


図 4.7: 頂点補正を必要とするダイアグラム ($n \geq 1$)。

4.4 「超対称性」の方法とレプリカ法の違い

なぜレプリカ法で 2-準位短距離相関関数が計算できないのか？「超対称性」の方法とレプリカ法の大きな違いはその内部自由度にあるといえる。「超対称性」の方法の場合、内部自由度は 2 で自由度が少ないため、積分などを実行し尽くすことができ、2-準位短距離相関関数を計算することができる。しかしレプリカ法の場合内部自由度は n で、 n を勝手に少ない数にすることはできない。この n は任意なのである。したがって、多自由度の積分を実行しないことには 2-準位短距離相関関数を求めることはできない。それが技術上困難であるためレプリカ法で 2-準位短距離相関関数が計算された例がないのである。

4.5 計算結果、この章までのまとめ

我々は 1 体 Green 関数、2 体連結 Green 関数、3 体連結 Green 関数を Gauss 型の確率分布から、レプリカ法とダイアグラム展開法を用いて計算した。いずれの結果も、解の解析性を仮定して計算した汎関数方程式の方法の結果 [21, 22] を再現することができた。一般的な集団でも普遍的な統計量（関数）があり、そのような量は Gauss 型の確率分布から計算して、非 Gauss 型の確率分布から計算したものと一致するということを示した。これより、Gauss 型の確率分布が実際の物理系での（普遍的な）観測量をよく再現するということが、ランダム行列理論の数学的な研究を通して理解できる。しかもそれを 2-準位短距離相関関数が計算できないことが知られているレプリカ法とダイアグラム展開法を用いて、2-準位長距離相関関数（2 体連結 Green 関数）を計算することにより確認することができた。今後、ランダム行列理論自身が持つ普遍性をさらに深く理解するためには、ランダム行列理論の数学的な研究を引き続き行い、さらに一般化された行列模型における普遍的な量と非普遍的な量を調べる必要があると考える。

ランダム行列理論、量子準位統計の数学的な研究は数学的な興味からだけではなく、いままで議論してきたランダム行列理論が示す準位相関の普遍性はどのような物理系が示すエネルギー準位の準位相関と一致するか、という物理的な興味からも非常に大切である。実際、次の章で議論する不規則電子系が示すエネルギー準位の準位相関はある条件のもとでランダム行列理論が示す準位相関の普遍性と一致することが K. B. Efetov によって、量子準位統計の数学的な研究を行うことにより示されている [14]。また、ある条件のもとではランダム行列理論が示す準位相関の普遍性から確実にはずれることも事実として知られている。

次章では不規則電子系が示すエネルギー準位の統計的性質について、現在までに知られている結果を簡単に紹介する。

5 不規則電子系（Anderson 転移）が示すエネルギー準位の統計的性質

前章までは、量子系が示すエネルギー準位統計の示す普遍性について述べてきた。この章では具体的に、Anderson 転移を示す不規則電子系を例にとり、その系で観測されるエネルギー準位の統計的性質を見ることにする。この種の問題はランダム行列理論が示す準位相関の普遍性とある条件で一致するため、前章までの議論と密接な関係を持つ。しかし、ある条件のもとではランダム行列理論で記述できない領域が現れるため、より深い考察が必要である。特に、ある特殊な場合においてエネルギー準位の統計性が Poisson 統計にも Wigner-Dyson 統計にも従わない「中間的な統計」に従うことが数値計算により指摘されている [33]。これは量子準位統計の観点から大変興味深いことであり、もう一度広い視野から複雑な量子系が示すエネルギー準位の統計的性質を見直すための格好の題材であると感じるので、Anderson 転移を例にした。

この章ではまず Anderson 転移の簡単な説明をおこない、そして「中間的な統計」についての最近の結果を簡単に紹介する。

5.1 Anderson 局在、Anderson 転移

金属や半導体中には多かれ少なかれ、不純物等による不規則なポテンシャルを含んでいる。その中で運動している電子の波動関数は Bloch 波ほどではないが、試料全体によく広がっている。しかしポテンシャルの不規則性が大きくなると波動関数が干渉により空間的に局在してしまう。この不規則性の増加に伴う波動関数の局在を Anderson 局在といい、それにより生ずる金属-絶縁体転移のことを Anderson 転移という。Anderson 転移は系の詳細によらない普遍性を持っており、金属相、特に波動関数の局在の前兆現象が見られる領域（これを弱局在領域という）ではランダム行列理論で記述できる [14]。

1. （時間反転対称性があり散乱がスピンに依存しない場合）
直交普遍類 $O(N)$, $\beta = 1$
2. （時間反転対称性が破れている場合（磁場がかかっている系））
ユニタリ普遍類 $U(N)$, $\beta = 2$
3. （時間反転対称性は満たされているが、スピン軌道相互作用でスピンに依存した散乱が存在する場合）
シンプレクティック普遍類 $Sp(N)$, $\beta = 4$

Anderson 転移付近の振る舞いは次の臨界指数によって特徴づけられる。

$$\begin{cases} \sigma \sim (W - W_c)^\nu, (n - n_c)^\nu, (E_F - E_c)^\nu \\ \xi \sim (W - W_c)^{-\nu}, (n - n_c)^{-\nu}, (E_F - E_c)^{-\nu} \\ \epsilon \sim (W - W_c)^{\nu'}, (E_F - E_c)^{\nu'}, (E_F - E_c)^{\nu'} \end{cases} \quad (5.1)$$

ここで σ, ξ, ϵ はそれぞれ電気伝導度、局在長、誘電率、 W, W_c, n, n_c, E_F, E_c はそれぞれ不規則性の強さ、電子密度、Fermi エネルギーとその臨界値である。

Anderson 転移は相転移の一種で、スピン系などほかの多くの相転移と同様にスケーリング則が成り立つ [34]。系の大きさが L で、温度 $T = 0$ の無次元化された電気伝導度 $g(L)$ （これを無次元コンダクタンスという）を次のように定義する。

$$g(L) \equiv \sigma L^{d-2} 2\pi \hbar e^2, \quad (e \text{ は素電荷, } d \text{ は次元}). \quad (5.2)$$

ここで系の大きさを L から L' に変えたとき、 $g(L')/g(L)$ は一般に W や n 、 E_F などにも依存するはずであるが、 $g(L)$ のみの関数で書けるという仮定をおく。これを式の形で表すと、

$$\begin{aligned}\frac{g(L')}{g(L)} &= f(g(L), \frac{L'}{L}), \\ \beta(g) &= \frac{d \ln g(L)}{d \ln L},\end{aligned}\quad (5.3)$$

ということになる。この β 関数を $g \gg 1$ と $g \ll 1$ の極限で調べる。 $g \gg 1$ では σ が系の大きさによらないはずなので、 $g = \sigma L^{d-2}$ 。したがって、

$$\beta(g) \sim d - 2. \quad (5.4)$$

$g \ll 1$ では波動関数が指数的に減衰しているので、 $g \sim e^{-\alpha L}$ 。したがって、

$$\beta(g) \sim \ln g. \quad (5.5)$$

β 関数がなめらかな関数であるとするとその関数形は図 5.1 のようなものになる。 $d = 1, 2$ に対し、

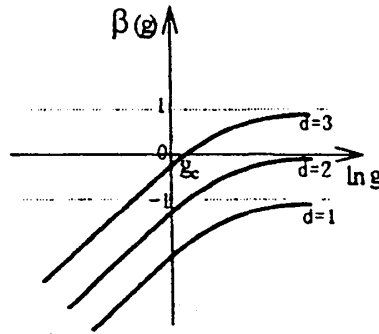


図 5.1: 関数 $\beta(g)$ の振る舞い。 d は次元。

$\beta(g) < 0$, $\forall g > 0$ より、2 次元以下では状態はすべて局在し、Anderson 転移は $d > 2$ でしか起こらないことがわかる。 $d > 2$ で臨界指数 ν と臨界指数の間の関係式は

$$\nu = -\frac{1}{\beta'(g_c)}. \quad (5.6)$$

$$s = (d - 2)\nu; \quad s' = 2\nu. \quad (5.7)$$

で与えられる。

Anderson 転移の臨界指数はしたがって、(5.6) 式より β 関数を計算することにより求められる。その β 関数の計算法として多くの研究者が扱っていた方法は、元の問題を非線形シグマ模型に帰着させ、無次元コンダクタンスの逆数が十分小さいとし、 $d = 2 + \epsilon$ 次元で ϵ -展開するという方法である（例えば [35, 36, 37, 38]）。このとき $g_c = O(\epsilon)$ で、計算の最後に $\epsilon = 1$ と置く。参考文献 [38] によると、直交普遍類 $\beta = 1$ に対する β 関数は 5-ループまでで

$$\begin{aligned}\beta(g) &= \epsilon g - 2g^2 - 12\zeta(3)g^5 + \frac{27}{2}\zeta(4)g^6 + O(g^7). \\ \epsilon &= d - 2,\end{aligned}\quad (5.8)$$

のように計算される。これより臨界指数 ν は

$$\nu = \frac{1}{\epsilon} - \frac{9}{4}\zeta(3)\epsilon^2 + \frac{27}{16}\zeta(4)\epsilon^3 + O(\epsilon^4), \quad (5.9)$$

となる。 $d=3$ で Padé 近似等をうまく使うと

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^\infty dt e^{-t/\epsilon} \left[1 - \frac{3}{8}\zeta(3)t^3 + \frac{9}{128}\zeta(4)t^4 \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^\infty dt e^{-t/\epsilon} \frac{1 + \frac{3\zeta(4)}{16\zeta(3)}t}{1 + \frac{3\zeta(4)}{16\zeta(3)}t + \frac{3}{8}\zeta(3)t^3} \Bigg|_{\epsilon=1} \\ &\simeq 0.730. \end{aligned} \quad (5.10)$$

が得られる。この結果は Harris 基準 [39] $\nu \geq 2/d \simeq 0.66$ を満たす。

その一方で行われているのが数値計算である。数値計算では 3 次元不規則電子系を記述するハミルトニアンから数値スケーリング法を用いて臨界指数が求められている（詳しくは大槻 東已、河原林 透の記事 [40] を参照せよ）。最近の数値計算による $d=3$ での臨界指数 ν の値を表 5.1 に示す。

class	ν	参考文献
orthogonal	1.60 ± 0.06	[41]
unitary	1.43 ± 0.06	[41]
symplectic	1.3 ± 0.2	[42]

表 5.1: 数値計算による $d=3$ での臨界指数 ν の値

実験はどうなっているのでしょうか？ S. Katsumoto, F. Komori, N. Sano & S. Kobayashi は $\text{Al}_{0.3}\text{Ga}_{0.7}\text{As}$ における Anderson 転移点付近での電気伝導度の振る舞いを調べ、その臨界指数が $s=1$ 、すなわち $\nu=1$ であるという結果を出した [43]。その他の物質でも実験が行われているようだが今のところ数値計算の結果とは一致していないようである（詳しくは [40] を参照せよ）。しかし現在のところ Anderson 転移点付近の議論に適していると思われるのは数値計算による解析で、非線形シグマ模型の摂動計算はコンダクタンスの逆数が十分小さいとして展開しているがために 3 次元の転移点の議論には適さないとされている。

5.2 2 次元の非局在-局在転移と Anderson 転移点直上での準位統計

波動関数の局在は準位統計にどのような影響を与えるか？ Anderson 転移前後の準位統計を調べてみると、電子の波動関数が試料全体に広がっている金属相の場合、各状態が空間的に十分に重なっているので準位間の反発が強く、電子のエネルギー準位の統計性は Wigner-Dyson 統計に従うであろう。一方、局在状態どうしには、ほとんど重なりはないので、電子のエネルギー準位の統計性は Poisson 統計に従うことが予想される。したがって Anderson 転移前後ではエネルギー準位の統計性が変わることが予想される。ここで注意しなければならないことは、これは決して Wigner-Dyson 統計から Poisson 統計へのクロスオーバーではないということである。前節で述べたように Anderson 転移は相転移の一種であり、熱力学的極限で電子のエネルギー準位統計が転移点直上一点を残して、全て Wigner-Dyson 統計かまたは Poisson 統計のどちらかにスケールされる。

準位統計の立場から臨界指数は、Anderson 転移前後での統計性の移り変わりを最近接準位間隔分布 $P(s)$ の Brody 補間式

$$P(s) = \begin{cases} A_\alpha s^\alpha \exp(-B_\alpha s^{1+\alpha}) & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ A_\alpha s^\alpha \exp(-B_\alpha s^2) & 1 \leq \alpha \end{cases}, \quad (5.11)$$

A_α, B_α : 定数

にフィットし、パラメーター α に対する有限サイズスケーリング解析をすることにより求められる（詳しくは [40] を見よ）。例として最低 Landau 準位にあるような強磁場中の 2 次元不規則電子系を考える。この系は整数量子 Hall 効果を示す系として大変興味深い。このような 2 次元系では前節で述べたように Anderson 転移は起こらないが、Landau バンドの中央だけで波動関数の非局在化が生じている。この有限サイズスケーリングの解析により、現在のところ量子 Hall 系（2 次元ユニタリ系）の臨界指数 ν は 2.4 程度であると見積もられている。また、2 次元シンプレクティック系でも局在-非局在転移が生ずることが知られている。この系での数値計算による臨界指数 ν の値は、考える模型、解析方法等に依存しており、値がばらついているのが現状である（詳しくは水口 啓氏の博士論文 [44] を参照せよ）。

先程述べたように Anderson 転移付近の準位統計は転移点直上一点を残して、全て Wigner-Dyson 統計かまたは Poisson 統計のどちらかにスケールされる。それでは転移点直上ではどのような統計性に従っているであろうか？

Anderson 転移点上での準位統計は B. L. Al'tshuler, I. Kh. Zharekeshev, S. A. Kotochigova & B. I. Shklovskii によってはじめて議論された [45]。彼らは数値計算により Σ^2 統計量が

$$\Sigma^2(L) \simeq \chi L, \quad 0 < \chi < 1, \quad (5.12)$$

に従うであろうという予想をした。また B. I. Shklovskii, B. Shapiro, B. R. Sears, P. Lambriandes & H. B. Shore は数値計算により転移点上で普遍的な準位統計が存在し、最近接準位間隔分布 $P(s)$ が小さい s では Wigner-Dyson 統計のように振る舞い、大きい s で Poisson 統計のように振る舞うことを示した [33]。さらに V. E. Kravtsov, I. V. Lerner, B. L. Altshuler & A. G. Aronov は拡散プロパゲーターに対するスケーリング仮説を置き、摂動論を用いて 2-準位相関関数を求め、和則が

$$Y_2(r) \propto r^{-2+\gamma}, \quad r \gg 1, \quad (5.13)$$

$$\gamma = 1 - \frac{1}{\nu d} < 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y_2(r) dr = 0, \quad (5.14)$$

となることを示した。そして Σ^2 統計量が

$$\Sigma^2(L) = \frac{a_{d\beta}}{\beta} L^\gamma, \quad a_{d\beta}: \text{定数} \quad \beta = 1, 2, 4.$$

であると結論し、B. L. Al'tshuler らの予想 (5.12) を否定した [46]。これを皮切りに Anderson 転移点直上での準位統計の詳しい解析がさまざまな面から行われている（例えば [47, 48, 49, 50]）。これはまだまだ現在進行中のことで、結論は確定されていない。しかし最近の論文によれば Σ^2 統計量の振る舞いは B. L. Al'tshuler らの予想 (5.12) の方が正しいであろうと思われる（次節で紹介する）。

また Anderson 転移が起こらない 2 次元でも中間的な状態の存在が A. W. W. Ludwig, M. P. A. Fisher, R. Shanker & G. Grinstein により指摘されている [51]。彼らは 2 次元格子上に乱れ

のある Dirac Fermion を構成し、系統的な理論的取り扱いからそれを指摘した。Y. Morita & Y. Hatsugai は A. W. W. Ludwig らの模型から Thouless 数や最近接準位間隔分布などを数値計算で計算し、中間的な準位統計の存在を確認した [52]。このように 2 次元においてもその存在は確認されているが、中間的な準位統計について強い結果はまだ得られてなく、現在もさまざまな解析が行われている。

次節では B. L. Al'tshuler らの予想 (5.12) を支持する論文 [48, 49, 50] の紹介をする。

5.3 J. T. Chalker らの結果

J. T. Chalker らの論文 [48, 49, 50] によると Σ^2 統計量 (2.25) の振る舞いを決める鍵となる統計量は *Spectral form factor* (2.21) である。ここでは Σ^2 統計量、2-準位相関関数、*Spectral form factor* を次のように定義し直す[†]。

$$\Sigma^2(\bar{N}) = \int_{-\bar{N}}^{\bar{N}} (\bar{N} - r) Y_2(r) dr. \quad (5.15)$$

$$Y_2(r) = \frac{1}{\rho^2} \langle \rho(E + r\Delta) \rho(E) \rangle - 1. \quad (5.16)$$

$$K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-irt/t_H} Y_2(r) dr. \quad (5.17)$$

$$\Delta = \frac{1}{\rho L^d}, \quad \rho = \langle \rho(E) \rangle, \quad t_H \equiv \frac{\hbar}{\Delta}: \text{Heisenberg 時間}$$

ここで前章まで用いられていた $\langle n(L) \rangle = L (\gg 1)$ を $\bar{N} (\gg 1)$ に置き換え、系の大きさ L との混同をさけた。(5.15) を $\bar{N}$ で微分すると

$$\frac{d\Sigma^2(\bar{N})}{d\bar{N}} = \int_{-\bar{N}}^{\bar{N}} Y_2(r) dr, \quad (5.18)$$

が得られる。これに関する極限操作の順番を間違えると Σ^2 統計量の振る舞いは大きく異なる。まずは $\bar{N}$ と転移点付近での状態数 N_c と系の大きさ L が有限のときの全状態数 $\mathcal{N}$ の間には $\bar{N} < N_c \ll \mathcal{N}$ なる関係があることに注意する。すなわち、系の大きさが有限のままでは $\bar{N} \rightarrow \infty$ にとることができない。したがって、極限操作は $L \rightarrow \infty$ が先で、そのあとに $\bar{N} \rightarrow \infty$ とすることができる。これにより和則は

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y_2(r) dr = \chi, \quad (0 < \chi < 1) \quad (5.19)$$

となり、B. L. Al'tshuler らが予想したように $\Sigma^2(\bar{N}) \simeq \chi \bar{N}$ となる。文献 [46] で和則が (5.14) となってしまったのは、まず先に $\bar{N} \rightarrow \infty$ としたあとに $L \rightarrow \infty$ としたためで、したがって $d\Sigma^2(\bar{N})/d\bar{N} \rightarrow 0$ で線形項は消えるという結論になってしまったのである [48]。

χ と *Spectral form factor* は次のように関係づけられる。

$$\chi = \lim_{\bar{N} \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{d\Sigma^2(\bar{N})}{d\bar{N}} = \int_{-\infty}^{\infty} Y_2(r) dr \equiv \lim_{t \rightarrow 0} K(t). \quad (5.20)$$

Σ^2 統計量は転移点直上で $\Sigma^2(\bar{N}) = \chi \bar{N}$ に対し、Wigner-Dyson 統計では $\Sigma^2(\bar{N}) \sim \ln \bar{N}$, ($\bar{N} \gg 1$)、Poisson 統計では $\Sigma^2(\bar{N}) = \bar{N}$, ($\bar{N} \gg 1$) で与えられるので、 χ で見れば Wigner-Dyson 統計は $\chi = 0$ に相当し、Poisson 統計は $\chi = 1$ に相当することは明らかである。上式より、あとは

[†]ここでの統計量の定義はこの分野での慣習が異なるため、2.1節で導入したものとは少し異なっている。混同すると間違った結果を導くことがあるので注意せよ。

転移点直上で $K(t)$ がどうなるかを調べればよいのであるが、それをするためにはエネルギー準位統計をランダム行列理論ではなく、もっと違う角度から眺めてみる必要がある。ある意味それをおこなったのが参考文献 [49] である。

不規則電子系のハミルトニアン $H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r})$ の固有値の統計性を一般的に調べるために仮想時間 λ, τ を導入し、ハミルトニアンを

$$H(\lambda) = H_0 + \lambda W(\mathbf{r}), \quad (5.21)$$

$$H(\tau) = H_0 + \int_0^\tau V(\tau', \mathbf{r}) d\tau' \quad (5.22)$$

とパラメーター化する。ここで $U(\mathbf{r})$ 、 $W(\mathbf{r})$ 、 $V(\tau, \mathbf{r})$ は Gauss 型ホワイトノイズポテンシャルで

$$\langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \rangle = \frac{\hbar}{2\pi\rho t_{el}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (5.23)$$

$$\langle W(\mathbf{r})W(\mathbf{r}') \rangle = v^2 L^d \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (5.24)$$

$$\langle V(\tau, \mathbf{r})V(\tau', \mathbf{r}') \rangle = v^2 L^d \delta(\tau - \tau') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (5.25)$$

$\langle \dots \rangle$: 集団 (不純物) 平均,

v : 定数, t_{el} : 平均弾性散乱時間

である。 λ と τ の間の関係は $\lambda^2 = \tau$ で与えられる。パラメーター化に伴い、エネルギー準位密度、2-準位相関関数、*Spectral form factor* を次のように再定義する。

$$\rho(E, \lambda) = \frac{1}{L^d} \sum_n \delta(E - E_n(\lambda)), \quad (5.26)$$

$$Y_2(r, \lambda) = \frac{1}{\rho^2} \langle \rho(E + r\Delta, \lambda) \rho(E, 0) \rangle - 1, \quad (5.27)$$

$$K(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist/t_H} Y_2(r, \lambda) dr, \quad (5.28)$$

ここで (5.27) 式において Δ は平均準位間隔 $\Delta = (\rho L^d)^{-1}$ である。また、 $E_n(\lambda)$ は Schrödinger 方程式 $H(\lambda)\psi_n(\tau, \mathbf{r}) = E_n(\tau)\psi_n(\tau, \mathbf{r})$ の固有値で $\psi_n(\tau, \mathbf{r})$ はその固有関数である。 $\tau \rightarrow \tau + \delta\tau$ に対する固有値の変化 $\delta E_n(\tau) \equiv E_n(\tau + \delta\tau) - E_n(\tau)$ を摂動論を用いて 2 次まで計算し、 $W(\mathbf{r})$ について平均をとると次のようになる。

$$\langle \delta E_n(\tau) \rangle_W = (\delta\tau) v^2 \sum_{m \neq n} \frac{c_{nm}(\tau)}{E_n(\tau) - E_m(\tau)}, \quad (5.29)$$

$$\langle \delta E_n(\tau) \delta E_m(\tau) \rangle_W = (\delta\tau)^2 v^2 c_{nm}(\tau), \quad (5.30)$$

$$c_{nm}(\tau) = L^d \int d^d r |\psi_n(\tau, \mathbf{r})|^2 |\psi_m(\tau, \mathbf{r})|^2. \quad (5.31)$$

ここで H_0 に関する平均を (5.31) 式に対してとり、エネルギー準位の差 $\omega = E_n - E_m$ のみに依存する関数に置き換える。

$$\langle c_{nm}(\tau) \rangle_{H_0} \equiv c(\omega). \quad (5.32)$$

$c(\omega)$ の Fourier 変換を次のように定義する。

$$C(t) = \left\langle \frac{\Delta}{2\pi\hbar} \sum_l c_{n, n+l}(\tau) e^{-i(E_{n+l} - E_n)t/\hbar} \right\rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi\hbar} c(\omega) e^{-i\omega t/\hbar}. \quad (5.33)$$

ここで $\sum_l$ は全エネルギー準位 (Fermi エネルギーまで) についての和である。この $C(t)$ は拡散運動する電子の再帰確率と関係づけられる。 $t=0$ で原点付近 $V_0 \sim l^d$ (l : 平均自由行程) に占められている波束を次のように表す。

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{V_0} \sum_{n \leq N} \psi_n^*(0) \psi_n(\mathbf{r}) e^{-iE_n t/\hbar}.$$

ここで N はエネルギー幅 $E_0 \sim 1/\rho V_0 \ll E_F$ 内にある準位数をあらわす。これより再帰確率 $p(t) = \langle |\Psi(\mathbf{r}=0, t)|^2 \rangle_{H_0}$ は次のように表される。

$$p(t) = \frac{1}{L^d} \left\langle \sum_{l \leq N} c_{n, n+l} e^{-i(E_n - E_m)t/\hbar} \right\rangle. \quad (5.34)$$

(5.33) 式と (5.34) 式はよく似ているが和のとり方が異なっている。ここで (5.33) 式を考える。 l の和について 2 つのエネルギー準位の差が $|E_n - E_{n+l}| \geq E_0$ のとき、事実上、準位相関がなくなる。よって、 $\omega \geq E_0$ で $c(\omega) = 1$ となり、 $C(t)$ は $t \sim 0$ で δ -型の関数を含むことになる。しかし、この δ -型関数のことについて今はあまり考えないことにすると、 $p(t)$ と $C(t)$ の間の関係は次のようにあらわされる。

$$p(t) = 2\pi\hbar\rho C(t), \quad t > 0; \quad (5.35)$$

$$\int_0^t C(t') dt' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi\hbar\rho} \int_0^t p(t') dt'. \quad (5.36)$$

エネルギー準位密度の Fourier 変換を導入する。

$$\mathcal{R}(t, \lambda) = L^d \int_{-\infty}^{\infty} \rho(E, \lambda) e^{-iEt/\hbar} = \sum_n e^{-iE_n(\lambda)t/\hbar}. \quad (5.37)$$

ここで $\langle \mathcal{R}(t, \lambda) \mathcal{R}(t', \lambda) \rangle$ はパラメーター λ によらず、 $\langle \mathcal{R}(t, \lambda) \mathcal{R}(t', \lambda) \rangle = \langle \mathcal{R}(t, 0) \mathcal{R}(t', 0) \rangle$ であるとする。いま、 λ を十分小さいとして $\mathcal{R}(t, \lambda)$ を展開すると、 λ^2 の項について次の形が得られる。

$$2\langle \dot{\mathcal{R}}(t, 0) \dot{\mathcal{R}}(t', 0) \rangle + \langle \ddot{\mathcal{R}}(t, 0) \mathcal{R}(t', 0) \rangle + \langle \mathcal{R}(t, 0) \ddot{\mathcal{R}}(t', 0) \rangle = 0. \quad (5.38)$$

$$\dot{\mathcal{R}}(t, 0) = -\frac{it}{\hbar} \sum_n \dot{E}_n e^{-iE_n t/\hbar}, \quad \ddot{\mathcal{R}}(t, 0) = -\frac{it}{\hbar} \sum_n \left(\ddot{E}_n - \frac{it}{\hbar} \dot{E}_n^2 \right) e^{-iE_n t/\hbar}, \quad (5.39)$$

$$\dot{E}_n = \langle n | W | n \rangle, \quad \ddot{E}_n = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle n | W | m \rangle|^2}{E_n - E_m}.$$

(5.38) 式について詳しく調べる。まず初項 $\langle \dot{\mathcal{R}}(t) \dot{\mathcal{R}}(t') \rangle$ は $W(\mathbf{r})$ について平均をとると $\langle \dot{E}_n \dot{E}_{n+l} \rangle_W = v^2 c_{n, n+l}$ より、

$$\langle \dot{\mathcal{R}}(t) \dot{\mathcal{R}}(t') \rangle = \frac{2\pi v^2 t^2}{\hbar \Delta} \delta(t+t') \left\langle \frac{\Delta}{2\pi\hbar} \sum_l c_{n, n+l} e^{-i(E_n - E_m)t/\hbar} \right\rangle = \frac{2\pi v^2 t^2}{\hbar \Delta} \frac{p(t)}{2\pi\hbar\rho}. \quad (5.40)$$

となる。第 2 項はまず $W(\mathbf{r})$ について平均をとると、 $\langle \ddot{\mathcal{R}}(t) \mathcal{R}(t') \rangle_W = \mathcal{R}(t') \langle \ddot{\mathcal{R}}(t) \rangle_W$ となる。ここで $\langle \ddot{E}_n \rangle_W$ は

$$\langle \ddot{E}_n \rangle_W = v^2 L^d \sum_{l \neq 0} \frac{c_{n, n+l}}{E_n - E_{n+l}}, \quad (5.41)$$

であるが、 $c_{n,n+l} \rightarrow c_{n,n+l}(1 - e^{i(E_n - E_{n+l})t/\hbar})$ とすると、 $\langle \ddot{\mathcal{R}}(t) \rangle_W$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle \ddot{\mathcal{R}}(t) \rangle_W &= -\frac{itv^2}{\hbar} \sum_n \left\{ \sum_{l \neq 0} \frac{1 - e^{i(E_n - E_{n+l})t/\hbar}}{E_n - E_{n+l}} c_{n,n+l} - \frac{it}{\hbar} c_{n,n} \right\} e^{-iE_n t/\hbar}, \\ &= -\frac{tv^2}{\hbar^2} \sum_{n,l} e^{-iE_n t/\hbar} \int_0^t dt'' e^{i(E_n - E_{n+l})t''/\hbar} c_{n,n+l}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

したがって、さらに H_0 について平均をとると第 2 項は次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle \ddot{\mathcal{R}}(t) \mathcal{R}(t') \rangle_W &= -\frac{tv^2}{\hbar} \delta(t+t') \int_0^t dt'' \left\langle \sum_{l,m} c_{n,n+l} e^{i(E_n - E_{n+l})t''/\hbar} e^{-i(E_n - E_{n+m})t/\hbar} \right\rangle, \\ &= -\frac{1}{2\pi\hbar\rho} \frac{2\pi tv^2}{\hbar\Delta} \int_0^t dt'' \left\langle \sum_{l,m} c_{n,n+l} e^{i(E_n - E_{n+l})t''/\hbar} e^{-i(E_n - E_{n+m})t/\hbar} \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.43)$$

そして第 3 項目であるが、これはただ t と t' を交換しただけで、上式と同じ結果が得られる。したがって、これらを (5.38) 式に代入して、

$$tp(t) \equiv Q(t) = \int_0^t dt' \left\langle \sum_{l,m} c_{n,n+l} e^{i(E_n - E_{n+l})t'/\hbar} e^{-i(E_n - E_{n+m})t/\hbar} \right\rangle \quad (5.44)$$

が得られる。

最後に $Q(t)$ がどうなるかを調べる。 $t'' = t - t'$ とおくと $Q(t)$ は次のように分解できる。

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_0^t dt'' \int d^d r \left\langle \sum_{l,m} |\psi_n(\mathbf{r})|^2 |\psi_{n+l}(\mathbf{r})|^2 e^{i(E_{n+l} - E_n)t''/\hbar} e^{i(E_{n+m} - E_{n+l})t/\hbar} \right\rangle, \\ &\sim 2 \int_0^t dt'' \left\langle \frac{1}{L^d} \sum_l c_{n,n+l} e^{-i(E_n - E_{n+l})t''/\hbar} \right\rangle \left\langle \sum_m e^{-i(E_n - E_{n+m})t/\hbar} \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.45)$$

ここで、 $Y_2(r) = \Delta \langle \sum_m \delta(r\Delta - E_n - E_{n+m}) \rangle$ より、*Spectral form factor* は

$$K(t) = \left\langle \sum_m e^{-i(E_n - E_{n+m})t/\hbar} \right\rangle - \frac{2\pi\hbar}{\Delta} \delta(t),$$

と表されるが、第 2 項の δ -関数は無視することにする。そして、

$$2 \int_0^t dt'' \left\langle \frac{1}{L^d} \sum_l c_{n,n+l} e^{-i(E_n - E_{n+l})t''/\hbar} \right\rangle = 2 \int_0^t p(t'') dt'' = 4\pi\hbar\rho \int_0^t C(t') dt',$$

より、

$$K(t) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar\rho} \right) \frac{tp(t)}{1 + (\pi\hbar\rho)^{-1} \int_0^t p(t') dt'}, \quad (5.46)$$

が得られる。

(5.46) 式に具体的な再帰確率 $p(t)$ を代入することにより χ を評価する [50]。Anderson 転移点上で、波動関数は多重フラクタル構造を持つことが知られている。もしこの多重フラクタル性を無視し、系の中の電子が Brown 運動をしているとすると、再帰確率は $p(t) \sim (Dt)^{-d/2} \sim \hbar\rho/t$ であ

らわされる。ここで D は拡散定数で、普通の Brown 運動では $D = \text{const.}$ であるが転移点上ではその異常な振る舞いから、拡散定数は $D = D(t) \sim t^{-1+2/d}$ のように時間依存性を持つ。この $p(t)$ を式 (5.46) に代入すると $K(t) = 0$ が得られ、 $\chi = 0$ となる。したがって、系の中の電子が Brown 運動しているとすると金属相のものと同じになってしまう。では、多重フラクタル性を考慮するとどうなるであろうか？ これにより再帰確率は

$$p(t) \sim V_0^{-\eta/d} \left(\frac{\hbar \rho}{t} \right)^{1-\eta/d}, \quad \eta \equiv d - D_2. \quad (5.47)$$

であらわされる。ここで D_2 はフラクタル次元である。これを式 (5.46) に代入すると $K(t) = \eta/2d$ となり、したがって、

$$\chi = \frac{\eta}{2d}, \quad (5.48)$$

が得られる。この結果は $d = 2$ でダイアグラム計算や、繰り込み群などの計算結果と一致する。

この χ は数値計算でフラクタル次元を計算することにより評価されている。例えば 3 次元の Anderson 模型に対して、 $D_2 = 1.7 \pm 0.2$ と評価されている。これより $\chi = 0.22 \pm 0.03$ が得られる。また 2 次元の量子 Hall 系では $\chi \sim 0.1$ のようにとても小さいと評価されている。

6 まとめ、今後の課題

我々は 1 体 Green 関数、2 体連結 Green 関数、3 体連結 Green 関数を Gauss 型の確率分布から、レプリカ法とダイアグラム展開法を用いて計算した。いずれの結果も、解の解析性を仮定して計算した汎関数方程式の方法の結果 [21, 22] を再現することができた。それは 4.5 節で述べた通りである。しかし、我々が計算した 2-準位長距離相関関数は $E_1 = E_2$ で発散するため実際の物理系でどのように適用されるかはまだわかっていない。2-準位長距離相関関数が実際の物理系でどう観測されるかは今後の課題である。

さらに今後、筆者が最も研究していきたいことは、第 5 章で紹介した Anderson 転移点上でのエネルギー準位統計の理論的な解析である。最近、行列模型を拡張し、その拡張された行列模型に対する数学的な研究を行うことにより、Anderson 転移点上での準位統計を理解する試みが少しずつ行われている [53]。4.5 節でも述べたように、ランダム行列理論の数学的な研究は Anderson 転移点直上での準位統計を理解するためにも非常に大切である。今後、筆者もランダム行列理論の数学的な研究をすることにより、Anderson 転移点上での準位統計の理解を目指す。また、J. T. Chalker 達の研究を手本にして、ランダム行列理論とは異なる視点からエネルギー準位統計の考察をおこない、エネルギー準位統計の完全な理解を目指す。

7 謝辞

本論文作成にあたり、研究活動やその他の事柄までにわたり多大なる助言、援助をしていただいた糸井千岳先生に心より感謝いたします。そして、勉強会や共同研究などを通して御指導していただいた埼玉医科大学の向田寿光先生に感謝いたします。また、私がこの分野の研究を始めるきっかけとして、1996 年 7 月に日本大学理工学部で行われた愛媛大学の飯田晋司先生の集中講義は大変刺激になりました。そのとき録った講義ノートは本論文を作成する際にも非常に役に立ちました。この場を借りて御礼を申し上げます。

東京大学教養学部氷上研究室の氷上忍先生、樋口三郎先生、藤田あゆみさん、久門正人さん、水口啓さん、山口哲生さん、八代健一さん、木立尚孝さんにはセミナーで議論していただいたり、

輪講に参加させてもらったり、その他いろいろなことで大変お世話になりました。本当に有り難うございました。また、日本大学理工学部物理学教室のみなさまに感謝いたします。

最後に大学院で勉強することをいろいろな面で支えてくれた両親、兄、そして貴重な私の友人にも心より感謝いたします。

A Σ^2 統計量の導出

$$\Sigma^2(L) \equiv \langle (n(L) - L)^2 \rangle = \langle n(L)^2 \rangle - L^2. \quad (\text{A.1})$$

$$n(L) = \sum_{i=1}^N \int_0^L \delta(x - x_i) dx.$$

$\langle n(L)^2 \rangle$ を計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle n(L)^2 \rangle &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_0^L dw_1 \int_0^L dw_2 \int dx_1 dx_2 \cdots dx_N \delta(w_1 - x_i) \delta(w_2 - x_j) \\ &\quad \times P_N(x_1, x_2, \dots, x_N), \\ &= \sum_{i \neq j} \int_0^L dw_1 \int_0^L dw_2 \int dx_1 dx_2 \cdots dx_N \delta(w_1 - x_i) \delta(w_2 - x_j) \\ &\quad \times P_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \int_0^L dw_1 \int_0^L dw_2 \int dx_1 dx_2 \cdots dx_N \delta(w_1 - x_i) \delta(w_2 - x_i) \\ &\quad \times P_N(x_1, x_2, \dots, x_N), \\ &= \int_0^L dw_1 \int_0^L dw_2 R_2(w_1, w_2) + L. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

上式より

$$\Sigma^2(L) = \int_0^L dw_1 \int_0^L dw_2 R_2(w_1, w_2) - L(L-1). \quad (\text{A.3})$$

(A.3) の右辺第一項について、変数 w_1 と w_2 を

$$\begin{cases} r = w_2 - w_1 \\ x = \frac{1}{2}(w_1 + w_2) \end{cases}, \quad (\text{A.4})$$

と変換すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_0^L dw_1 \int_0^L dw_2 R_2(w_1, w_2) &= \int_{-L}^0 dr \int_{-\frac{r}{2}}^{L+\frac{r}{2}} dx R_2(r) + \int_0^L dr \int_{\frac{r}{2}}^{L-\frac{r}{2}} dx R_2(r), \\ &= \int_{-L}^0 (L+r) R_2(r) dr + \int_0^L (L-r) R_2(r) dr, \\ &= 2 \int_0^L (L-r) R_2(r) dr. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

ここで、 $r \rightarrow -r$ に対して $R_2(-r) = R_2(r)$ であることを用いた。 $R_2(r) = 1 - Y_2(r)$ より

$$\int_0^L dw_1 \int_0^L dw_2 R_2(w_1, w_2) = L^2 - 2 \int_0^L (L-r) Y_2(r) dr. \quad (\text{A.6})$$

よって

$$\Sigma^2(L) = L - 2 \int_0^L (L-r) Y_2(r) dr. \quad (\text{A.7})$$

また

$$Y_2(r) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{-i2\pi r t} dt, \quad (\text{A.8})$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \Sigma^2(L) &= L - 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt K(t) \int_0^L dr (L-r) e^{-i2\pi r t}, \\ &= L - 2L \int_{-\infty}^{\infty} dt K(t) \frac{e^{-i2\pi L t} - 1}{-i2\pi t} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt K(t) \int_0^L dr r e^{-i2\pi r t}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

上式の右辺第三項目について、

$$\int_0^L dr r e^{-i2\pi r t} = \frac{L e^{-i2\pi L t}}{-i2\pi t} - \frac{e^{-i2\pi L t} - 1}{(i2\pi t)^2},$$

より

$$\begin{aligned} \Sigma^2(L) &= L - 2 \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \frac{e^{-i2\pi L t} - 1}{(i2\pi t)^2} dt, \\ &= L - 2 \int_0^{\infty} K(t) \frac{\sin^2 \pi L t}{(\pi t)^2} dt. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

ここで、

$$L = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \pi L t}{(\pi t)^2} dt,$$

より

$$\Sigma^2(L) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \pi L t}{(\pi t)^2} [1 - K(t)] dt. \quad (\text{A.11})$$

よって、

$$\begin{aligned} \Sigma^2(L) &\equiv \langle (n(L) - L)^2 \rangle = L - 2 \int_0^L (L-r) Y_2(r) dr, \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \pi L t}{(\pi t)^2} [1 - K(t)] dt. \end{aligned}$$

B Δ_3 統計量の導出

$$\Delta_3(L) = \left\langle \text{Min}_{A,B} \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [N(x) - Ax - B]^2 dx \right\rangle. \quad (\text{B.1})$$

$$I(A, B) \equiv \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [N(x) - Ax - B]^2 dx. \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned}
I(A, B) &= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [N(x) - Ax - B]^2 dx, \\
&= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \{N^2(x) + A^2 x^2 + B^2 - 2AxN(x) - 2BN(x)\} dx. \quad (B.3)
\end{aligned}$$

$I(A, B)$ を最小にする A と B は次のように決まる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I(A, B)}{\partial A} &= \frac{2A}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx - \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} xN(x) dx = 0. \\
A &= \frac{12}{L^3} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} xN(x) dx. \quad (B.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I(A, B)}{\partial B} &= 2B - \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} N(x) dx = 0. \\
B &= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} N(x) dx. \quad (B.5)
\end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned}
\Delta_3(L) &= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \langle N^2(x) \rangle dx - \frac{12}{L^4} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \langle xyN(x)N(y) \rangle \\
&\quad - \frac{1}{L^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \langle N(x)N(y) \rangle. \quad (B.6)
\end{aligned}$$

$N(x)$ を次のように表す。

$$N(x) = \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^x \delta(w - x_i) dw \sim \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{L}{2}}^x \delta(w - x_i) dw.$$

ここで $L \gg 1$ とする。これより $\langle N(x)N(y) \rangle$ は次のように表される。

$$\begin{aligned}
\langle N(x)N(y) \rangle &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{-\frac{L}{2}}^x dw_1 \int_{-\frac{L}{2}}^y dw_2 \int dx_1 dx_2 \cdots dx_N \delta(w_1 - x_i) \delta(w_2 - x_j) \\
&\quad \times P_N(x_1, x_2, \dots, x_N), \\
&= \sum_{i \neq j} \int_{-\frac{L}{2}}^x dw_1 \int_{-\frac{L}{2}}^y dw_2 \int dx_1 dx_2 \cdots dx_N \delta(w_1 - x_i) \delta(w_2 - x_j) \\
&\quad \times P_N(x_1, x_2, \dots, x_N), \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{L}{2}}^x dw_1 \int_{-\frac{L}{2}}^y dw_2 \int dx_1 dx_2 \cdots dx_N \delta(w_1 - x_i) \delta(w_2 - x_i) \\
&\quad \times P_N(x_1, x_2, \dots, x_N), \\
&= \int_{-\frac{L}{2}}^x dw_1 \int_{-\frac{L}{2}}^y dw_2 \{ \delta(w_1 - w_2) + 1 - Y_2(w_1 - w_2) \}. \quad (B.7)
\end{aligned}$$

ここで任意の関数 $f(w)$ に対して次の3つの公式（詳しくは参考文献 [3] を参照せよ）

$$\begin{aligned}
1). \quad & \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \int_{-\frac{L}{2}}^x dw_1 \int_{-\frac{L}{2}}^y dw_2 f(w_1 - w_2) \\
&= \frac{1}{3} \int_0^L (L - u)^2 (2L + u) f(u) du.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
2). \quad & \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \int_{-\frac{L}{2}}^x dw_1 \int_{-\frac{L}{2}}^x dw_2 f(w_1 - w_2) \\
&= 2 \int_0^L (L - u)^2 f(u) du.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
3). \quad & \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \int_{-\frac{L}{2}}^x dw_1 \int_{-\frac{L}{2}}^y dw_2 xy f(w_1 - w_2) \\
&= \frac{1}{60} \int_0^L (L - u)^3 (L^2 + 3Lu + u^2) f(u) du.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

を用いると Δ_3 統計量は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\Delta_3(L) &= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \int_{-\frac{L}{2}}^x dw_1 \int_{-\frac{L}{2}}^x dw_2 \{ \delta(w_1 - w_2) + 1 - Y_2(w_1 - w_2) \} \\
&\quad - \frac{12}{L^4} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \int_{-\frac{L}{2}}^x dw_1 \int_{-\frac{L}{2}}^y dw_2 xy \{ \delta(w_1 - w_2) + 1 - Y_2(w_1 - w_2) \} \\
&\quad - \frac{1}{L^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \int_{-\frac{L}{2}}^x dw_1 \int_{-\frac{L}{2}}^y dw_2 \{ \delta(w_1 - w_2) + 1 - Y_2(w_1 - w_2) \}, \\
&= \frac{1}{15L^4} \int_0^L (L - r)^3 (2L^2 - 9Lr - 3r^2) \{ \delta(r) + 1 - Y_2(r) \} dr, \\
&= \frac{1}{15L^4} \int_0^L (L - r)^3 (2L^2 - 9Lr - 3r^2) \left\{ \frac{1}{2} \delta(r) - Y_2(r) \right\} dr, \\
&= \frac{L}{15} - \frac{1}{15L^4} \int_0^L (L - r)^3 (2L^2 - 9Lr - 3r^2) Y_2(r) dr, \\
&= \frac{2}{L^4} \int_0^L (L^3 - 2L^2 r + r^3) \Sigma^2(r) dr.
\end{aligned} \tag{B.11}$$

よって、

$$\begin{aligned}
\Delta_3(L) &= \frac{2}{L^4} \int_0^L (L^3 - 2L^2 r + r^3) \Sigma^2(r) dr, \\
&= \frac{L}{15} - \frac{1}{15L^4} \int_0^L (L - r)^3 (2L^2 - 9Lr - 3r^3) Y_2(r) dr.
\end{aligned}$$

C 最近接準位間隔分布 $P(s)$ (Wigner 分布) の導出

$N = 2$ で (3.8) 式は、

$$\begin{aligned}
P_2(E_1, E_2) &= \frac{1}{Z} \exp \left(- \frac{E_1^2 + E_2^2}{4v^2} \right) |E_1 - E_2|^\beta, \\
&= \frac{1}{Z} \exp \left(- \frac{E_1^2 + E_2^2}{4v^2} - \beta \ln |E_1 - E_2| \right),
\end{aligned} \tag{C.1}$$

である。ここで E_1, E_2 をつぎのように変換する。

$$\begin{cases} x = (E_2 - E_1)/2v \\ y = (E_2 + E_1)/2v \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

これより、

$$\begin{aligned} \int dE_1 dE_2 P_2(E_1, E_2) &= \frac{1}{Z} 2v^2 (2v)^\beta \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy |x|^\beta \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right), \\ &= \frac{1}{Z} \sqrt{2\pi} (2v)^{\beta+2} \int_0^{\infty} x^\beta \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

となる。ここで、

$$\int_0^{\infty} x^\beta \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx = \frac{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})}{2 \cdot 2^{-(\beta+1)/2}}, \quad (\text{C.4})$$

より、

$$\begin{aligned} \int dE_1 dE_2 P_2(E_1, E_2) &= \frac{1}{Z} (2v)^{\beta+2} 2^{\beta/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right) = 1, \\ Z &= (2v)^{\beta+2} 2^{\beta/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

となる。ここでさらに変数 x, y を

$$\begin{cases} x = s/2v, & (s > 0), \\ y = \bar{E}/v. \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

のように変換し、 $P_2(s, \bar{E}, \beta)$ をつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} \int dE_1 dE_2 P_2(E_1, E_2) &= \int ds d\bar{E} P_2(s, \bar{E}, \beta), \\ P_2(s, \bar{E}, \beta) &= \frac{1}{Z} 2s^\beta \exp\left(-\frac{s^2}{8v^2}\right) \exp\left(-\frac{\bar{E}^2}{2v^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

(C.7) 式を用いて平均準位間隔 Δ を計算するとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\bar{E}^2}{2v^2}\right) d\bar{E} \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot 2s^\beta \exp\left(-\frac{s^2}{8v^2}\right) ds, \\ &= 2^{3/2} v \frac{\Gamma(1 + \beta/2)}{\Gamma(\frac{1+\beta}{2})}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

ここで $\Delta = 1$ と置き、(C.7) 式を $\bar{E}$ について積分したものを $P(s)$ とあらわすと、

$$\begin{aligned} P(s) &= \frac{1}{Z} \sqrt{2\pi} (2v) s^\beta \exp\left(-\frac{s^2}{8v^2}\right), \\ &= \frac{2[\Gamma(1 + \beta/2)]^{1+\beta}}{[\Gamma(\frac{1+\beta}{2})]^{2+\beta}} s^\beta \exp\left(-\left[-\frac{\Gamma(1 + \beta/2)}{\Gamma(\frac{1+\beta}{2})}\right]^2 s^2\right), \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

が得られる。したがって、

$$\begin{aligned} \beta = 1: P(s) &= \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right), \\ \beta = 2: P(s) &= \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} s^2\right), \\ \beta = 4: P(s) &= \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^4 \exp\left(-\frac{64}{9\pi} s^2\right). \end{aligned}$$

参考文献

- [1] E. P. Wigner, Proc. Cambridge Philos. Soc. **47** (1951) 790, in [2].
- [2] C. E. Porter ed., *Statistical Theory of Spectral Fluctuations* (Academic Press 1965).
- [3] M. L. Mehta, *Random Matrices* (2nd edition, Academic Press 1991).
- [4] 高橋 和孝 “Chiral Symmetry Breaking in Random Matrix Models of QCD” 素粒子論研究 **96** (1998) 273.
- [5] T. Guhr, A. Müller-Groeling and H. A. Weidenmüller, Phys. Rep. **299** (1998) 189.
- [6] E. Brézin and A. Zee, Nucl. Phys. **B402** (1993) 613.
- [7] O. Bohigas, in *Chaos and Quantum Physics*, ed. M. -J. Giamonni, A. Voros, and J. Zinn-Justin (Elsevier 1991).
- [8] 長谷川 洋「量子系の準位統計-量子カオス序論」(共立出版、物理学最前線28、1991年)。
- [9] 原山 卓久「量子カオスの周期軌道理論」数理科学特集「量子準位統計」(サイエンス社、No. 376 (1994) 29)。
- [10] Ya. G. Sinai, Russ. Math. Surv. **25** (1970) 137.
- [11] R. Balian, Nuov. Cim. **B57** (1968) 183.
- [12] Y. V. Fyodorov, in *Mesoscopic Quantum Physics*, ed. E. Akkermans, G. Montambaux, J. -L. Pichard and J. Zinn-Justin (Elsevier 1995).
- [13] E. Brézin, in *Applications of field theory to statistical mechanics*, Springer Lecture Notes in Physics, Vol. 216 (Springer, Berlin, 1984) p. 115.
- [14] K. B. Efetov, Adv. Phys. **32** (1983) 53.
- [15] J. J. Verbaarschot, H. A. Weidenmüller and M. R. Zirnbauer, Phys. Rep. **129** (1985) 365.
- [16] K. B. Efetov, *Supersymmetry in disorder and chaos* (Cambridge Univ. 1997).
- [17] J. J. M. Verbaarschot and M. R. Zirnbauer, J. Phys. A: Math. Gen. **18** (1985) 1093.
- [18] M. L. Mehta, Nucl. Phys. **18** (1960) 395, in [2].
- [19] E. Brézin and S. Hikami, Phys. Rev. **E56** (1997) 264.
- [20] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi and J. B. Zuber, Commun. Math. Phys. **59** (1978) 35, D. Bessis, C. Itzykson and J. B. Zuber, Adv. Appl. Math. **1** (1980) 109
- [21] C. Itoi, Nucl. Phys. **B493** (1997) 651.
- [22] C. W. J. Beenakker, Nucl. Phys. **B422** (1994) 515.
- [23] J. Ambjørn, C. F. Kristjansen and Yu. Makeenko, Mod. Phys. **A7** (1992) 3187.
- [24] E. Brézin and A. Zee, Phys. Rev. **E49** (1994) 2588.

- [25] E. Brézin and A. Zee, Nucl. Phys. **B441** (1995) 409.
- [26] J. D'anna, E. Brézin and A. Zee, Nucl. Phys. **B443** (1995) 443.
- [27] E. Brézin and S. Hikami, Nucl. Phys. **B479** (1996) 697.
- [28] J. Ambjørn and G. Akemann, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996) L555.
- [29] G. Akemann, Nucl. Phys. **B482** (1996) 403.
- [30] S. Higuchi, C. Itoi, S. M. Nishigaki and N. Sakai, Phys. Lett. **B398** (1997) 123.
- [31] C. Itoi, H. Mukaida and Y. Sakamoto, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997) 5709.
- [32] C. Itoi and Y. Sakamoto, preprint NUP-A-97/4, cond-mat/9702156.
- [33] B. I. Shklovskii, B. Shapiro, B. R. Sears, P. Lambriandes and H. B. Shore, Phys. Rev. **B47** (1993) 11487.
- [34] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 673.
- [35] F. J. Wegner, Z. Phys. **B35** (1979) 207.
- [36] S. Hikami, Prog. Theor. Phys. Suppl. **84** (1985) 120.
- [37] F. Wegner, Nucl. Phys. **B280** (1987) 193,
F. Wegner, Nucl. Phys. **B280** (1987) 210.
- [38] S. Hikami, Prog. Theor. Phys. Suppl. **107** (1992) 213.
- [39] A. B. Harris, J. Phys. C: Solid State Phys. **7** (1974) 1671,
J. T. Chayes, L. Chayes, D. S. Fisher and T. Spencer, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 2999.
- [40] 大槻 東巳、河原林 透「Anderson 転移のユニバーサリティー-数値計算でわかったこと-」日本物理学会誌 **51** (1996) 821.
- [41] K. Slevin and T. Ohtsuki, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 4083.
- [42] T. Kawarabayashi, T. Ohtsuki, K. Slevin and Y. Ono, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 3593.
- [43] S. Katsumoto, F. Komori, N. Sano and S. Kobayashi, J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 2259.
- [44] 水口 啓「2次元シンプレクティック・ネットワークモデルの局在・非局在転移」博士論文 東京大学大学院総合文化研究科 1998年.
- [45] B. L. Al'tshuler, I. Kh. Zharekeshev, S. A. Kotochigova and B. I. Shklovskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **94** (1988) 343 [Sov. Phys. JETP **67** (1988) 625].
- [46] V. E. Kravtsov, I. V. Lerner, B. L. Altshuler and A. G. Aronov, Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 888.
- [47] A. G. Aronov and A. D. Mirlin, Phys. Rev. **B51** (1995) 6131.
- [48] V. E. Kravtsov, in *Proc. of the 1996 Moriond Conf.* (cond-mat/9603166).

- [49] J. T. Chalker, I. V. Lerner and R. A. Smith, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 554; J. Math. Phys. **37** (1996) 5061.
- [50] J. T. Chalker, V. E. Kravtsov and I. V. Lerner, JETP Lett. **64** (1996) 386.
- [51] A. W. W. Ludwig, M. P. A. Fisher, R. Shanker and G. Grinstein, Phys. Rev. **B50** (1995) 7526.
- [52] Y. Morita and Y. Hatsugai, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 3728.
- [53] E. Brézin and S. Hikami, Phys. Rev. **E57** (1998) 4140,
E. Brézin and S. Hikami, preprint LPTENS-98/11, cond-mat/9804024.