

p-12

非摂動くりこみ群と量子トンネル現象¹

金沢大学大学院 自然科学研究科 数理情報科学専攻 D1

堀越 篤史

くりこみ群の方法は、粗視化の方法とよく言われます。粗視化と言っても、系を単純にスケール変換するだけなら、それは単なる次元解析に過ぎません。系の内包する自由度の情報を適当に織り込みながらスケール変換を実行するところに、くりこみ群の妙があります。くりこみ群の名を冠した解析は広範な分野で見られますが、系の情報をどれだけ正確に捉えられているかに関しては、大きなばらつきがあるのが現状です。

私はくりこみ群の手法を用いた場の量子論の解析を目指しています。場の量子論は、くりこみ、くりこみ群という手法と概念が摂動論を通して発見された舞台です。70年代、K-G Wilsonは摂動的くりこみ群を換骨奪胎して、摂動論に依らない形でくりこみ群を定式化しました。それは象徴的に

$$Z = \int^\Lambda \mathcal{D}\phi(p) e^{-S_\Lambda[\phi]} = \int^{\Lambda-\delta\Lambda} \mathcal{D}\phi(p) e^{-S_{\Lambda-\delta\Lambda}[\phi]}$$

と書くことができます。すなわち、各エネルギースケール Λ に対して有効理論 S_Λ が存在するという描像です。くりこみ変換とは、 Λ の変化に対する S_Λ の変化にほかなりません。この非摂動的なくりこみ群は、主に物性系における臨界現象の解析に大きな役割を果たしました。ただし、これらの実際の解析においては、結局何らかの小さいパラメータでの展開が用いられたため、こうしたWilson流のアプローチはしばしば「摂動的」くりこみ群と呼ばれてしまっています。これを再び場の量子論の解析に応用するにあたり、摂動論に依らないというWilson流本来の利点を最大に活かそうとするのが、ここで言う「非摂動くりこみ群」なのです。

非摂動くりこみ群のアイデアは次のようなものです。 $\delta\Lambda \rightarrow 0$ を考えることにより、くりこみ変換を $\frac{dS_\Lambda}{d\Lambda}$ という汎関数微分で表現します。するとそれはGauss積分の形になり、 $\frac{dS_\Lambda}{d\Lambda}$ の関数形を厳密に求めることができます。こうして求めた汎関数微分方程式のことを非摂動くりこみ群方程式と呼びます。もちろんこの方程式を正確に解くことは容易ではないのですが、なるべく系の情報を損なわないように近似を入れながら、解を求めていきます。量子力学系（一次元実スカラー理論）を例に見てみましょう。調和振動子($V(x) = a_0 + \frac{1}{2}a_2x^2$)の場合のくりこみ群方程式は、 $\Lambda(\tau) = e^{-\tau\Lambda}$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{da_0}{d\tau} &= a_0 + \frac{1}{2\pi} \log(1 + a_2) \\ \frac{da_2}{d\tau} &= 2a_2 \end{aligned}$$

となります。これを解く($\tau = 0 \rightarrow \infty$)ことで、 $V(x) = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow V_{eff}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2$ というポテンシャルの変化を見ることができて、零点エネルギー $-\frac{1}{2}$ を正確に評価することができます。このように非摂動くりこみ群では、有効ポテンシャルの形や変化(flow)から、必要な物理的情報を読みとるのです。それでは初期ポテンシャルが $V(x) = a_0 + a_1x \pm \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{1}{4!}a_4x^4$ ならどうでしょうか？この場合、量子トンネリングという極めて非摂動的な現象が起こります。その現象を正しく記述できるかどうかは、非摂動くりこみ群の一つの試金石となります。今回はその解析の現状について報告します。

¹ この内容は金沢大学の青木健一、寺尾治彦 両氏との共同研究に基づいています