格子模型と対称性

神保道夫 (京都大学大学院理学研究科)

このノートは（イントロの部分を除き）城崎ワークショップ「無限自由度の可積分系とその周辺」(1994年6月5日–9日）で話した内容を, 当時修士1回生であった尾崎英司君がまとめてくれたものです. 夏の学校のサブゼミでお話したことと内容的に重なる部分が多いので（実際にはこの第1部を中心に多少背景の説明を加えました）, 重点領域研究「無限自由度の可積分系」レクチャーノート No.9 から転載し, 講義録の代りとします.

1 はじめに

物理現象の理解はまずモデルを作るところから始まるわけですが, 現実的なモデルは大抵は複雑すぎて, 何らかの近似なしにそれを解くことは望めません. しかしたとえばイジング模型などでご存じのように, 厳密に解けるモデルは（特殊なものに限られるとはいえ）系の振る舞いについて多くのことを教えてくれる点で重要です. この20年ほどの間に, 解けるモデルについての理解は飛躍的に進歩しました. その過程で分かってきたことの一つは, 模型が解けるということの背後には「対称性の原理」というべきものが働いているということです. たとえば2次元の臨界現象を考える際には様々な臨界指数が大事ですが, ビラソロ代数という（無限次元の）リー代数の理論を使うと, それらが見事に分類されてしまう, という共形場理論についてはお聞きになったことがあるかも知れません. これはリー代数による対称性が模型の可解性を支配していることの典型的な一例です.

この講義では, まず簡単な1次元のスピン・チェインを例にとって, 対称性と固有値の縮退との関係を考えます. ついで, 対称性が一見して明らかでなくとも, 量子群といわれる「変形された」対称性を持つ場合があることを説明します. 一番簡単なリー代数 $sl(2)$ の場合に即して, 量子群がどのように対称性としてあらわれ, どのような特質を持っているかを紹介します.

実はモデルが解けることの背後には, もっと大きな（無限次元の）対称性が隠れています. 可解性の十分条件として, ヤン・バクスター方程式と呼ばれるものが知られていますが, これも量子群による対称性の現れとして理解することができます. さらに相関関数の計算などもっと立ち入った問題にも対称性の原理が威力を発揮するのです. これらについても簡単に触れたいと思います.

2 Heisenberg 模型とその対称性

まず, 典型的な格子模型をひとつあげます. それは Heisenberg の模型です.

格子の次元は何次元でも構わないのですが, 各格子点の上に量子的なスピンが乗っていて, そのスピンが隣同士相互作用しているという, いわゆる磁性体の模型です. ここでは, 格子の次元が 1 次元のものを扱います.

Heisenberg 模型のハミルトニアンは以下の式で書き表されます.

$$\mathcal{H} = -\sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \cdot \sigma_j = -\sum_i \left(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right)$$

ここで, まず和について説明すると, i や j というのは格子の点を表しており, $\langle i,j \rangle$ というのは格子の点の隣同士の組を表しています. 格子の次元が高ければ隣合う格子点はたくさんありますが, この場合は 1 次元なので隣合う組は i と $i+1$ しかありません.

次に和の中身ですが, σ_i というのは $(\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z)$ と 3 成分を持ったスピンのオペレータです. そしてその相互作用が $\sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y + \sigma_i^z \sigma_j^z$ と内積の形で表されているわけです. $\sigma_i^\alpha (\alpha = x, y \text{ or } z)$ の作用は, 具体的には, 2×2 のパウリ行列 σ^α が $\cdots \otimes C^2 \otimes C^2 \otimes C^2 \otimes \cdots$ という空間の上の i 番目にだけ

$$\sigma_i^\alpha = \cdots \otimes 1 \otimes \overset{\overset{i}{\smile}}{\sigma^\alpha} \otimes 1 \otimes \cdots$$

で作用するというものです. 各パウリ行列 σ^α は

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

であたえられます.

この模型についてもう少し説明すると, 1 次元の格子の各点各点に量子的なスピンがあり, それぞれ独立な方向を向きうる. 量子的なスピンなので互いに非可換なオペレータであらわされ, その各点に乗っかっているスピンの自由度をあらわすのが行列になります. 各点ごとに独立というのは, σ_i^α があるベクトル空間のテンソル積の i 番目にだけこの行列で作用するという事です. この場合, 行列は 2×2 で 2 自由度あるので, 空間としては 2 次元空間のテンソル積を持ってきて考えることになるわけです.

こういったハミルトニアンが与えられた場合, その固有値, 固有ベクトルを求めるということがまず問題になります. ハミルトニアンはエネルギーを表し, その固有ベクトルは, 系のとりうるエネルギーの確定した固有状態を表しているからです.

そこで, 実際にこのハミルトニアン $\mathcal{H}$ の固有値, 固有ベクトルについて調べてみましょう. まず最初にこの模型のサイズ (chain の長さ) を決めます. これを N としましょう. これに周期境界条件, $\sigma_{N+1}^\alpha = \sigma_1^\alpha$ をつけて考えます. この時, Heisenberg 模型のハミルトニアンは, $2^N \times 2^N$ の行列とみなせるので, 重複度も含めて 2^N 個の固有値を持ちます. この行列はエルミート的になるので, 固有値はすべて実数です. これらを大きさの順に並べて, $e_1^{(N)} \le \cdots \le e_{2^N}^{(N)}$ とします.

しかし, この Heisenberg 模型の場合, 固有値の縮退が起こっています. つまり, 実際に計算してみると同じ固有値がいくつもでてくるわけです. どうしてそのようなことがおこるか, そのパターンを記述することが第一の問題になります.

いま, ハミルトニアン $\mathcal{H}$ と可換, すなわち, $[\mathcal{H}, J^\alpha] = 0$ を満たすオペレータ J^α が (一般に複数個) あるとしましょう. $\mathcal{H}$ の固有ベクトル $|u\rangle$ が固有値 E を持つ, つまり, $\mathcal{H}|u\rangle = E|u\rangle$ であったとすると,

$$\mathcal{H}\left(J^\alpha|u\rangle\right) = [\mathcal{H}, J^\alpha]|u\rangle + J^\alpha\left(\mathcal{H}|u\rangle\right) = E\cdot J^\alpha|u\rangle$$

なので, $|u\rangle, J^\alpha|u\rangle, J^\alpha\left(J^\beta|u\rangle\right)\cdots$ は同じ固有値に属することがわかります.

実際, この模型では上のような状況が起こっており, 以下のような三つのオペレータを考えるとハミルトニアン $\mathcal{H}$ と可換になります.

$$J^+ = \sum \sigma_i^+$$

$$J^- = \sum \sigma_i^-$$

$$J^z = \sum \sigma_i^z$$

ここで, $\sigma^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$, すなわち,

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

です.

実は, この模型についてこのような状況が成り立っているのは, あらかじめ期待できたことです. スピンの空間 x, y, z を実三次元空間だと思います. すると, 三次元空間での回転というのを考えることができるわけです. すなわち, $SO(3)$, ないしリー環のことばでいうと $\mathfrak{sl}_2$ が作用して symmetry があるのではないか. 実際, J^+ などといったオペレータがハミルトニアン $\mathcal{H}$ と可換になるのは, そのことをあらわしているわけで, J^+, J^-, J^z について計算すると, 以下の交換関係の式が成り立ちます.

$$[J^z, J^{\pm}] = \pm 2J^{\pm}, \quad [J^+, J^-] = J^z$$

つまり, $\{J^+, J^-, J^z\}$ はリー環 $\mathfrak{sl}_2$ の生成元と同じ交換関係を満たしていて, ハミルトニアンの働く空間は, $\mathfrak{sl}_2$ の表現となっています.

リー環 $\mathfrak{sl}_2$ の表現については良くわかっているので, これで, いま考えているハミルトニアン $\mathcal{H}$ の固有値の縮退のパターンがわかります. このことについて少し説明しましょう.

3 Heisenberg 模型の固有値の縮退と $\mathfrak{sl}_2$ の表現論

Heisenberg 模型のハミルトニアンは先ほど書いたように $\cdots \otimes C^2 \otimes C^2 \otimes C^2 \otimes \cdots$ という空間上のオペレータと考えることができます. ここで, このひとつひとつの $V = C^2$ を $\{\sigma_i^+, \sigma_i^-, \sigma_i^z\}$ が $\mathfrak{sl}_2$ の生成元の表現として作用する 2 次元の表現空間と思います. 各 J^+, J^-, J^z はこれら σ_i^{α} の和をとっているので全体の空間 $V^{\otimes N}$ に $\mathfrak{sl}_2$ が働いていると考えることが出来ます. (このことについては 5 節を参照して下さい.)

$\mathfrak{sl}_2$ の表現に関しては, 各 $k \in Z_{\geq 0}$ に対し既約な $\mathfrak{sl}_2$ の $k+1$ 次元表現がただ一つ定まります ([1]). これを $V(k)$ と書くことにします. 例えば, 2 次元の既約表現 $V(1)$ というのは, 先ほど定義した表現 V です. これらの既約表現のテンソル積に対し

$$V(k) \otimes V(l) = V(k+l) \oplus V(k+l-2) \oplus \cdots \oplus V(|k-l|+2) \oplus V(|k-l|)$$

という関係式が成り立ちます (Clebsch-Gordan の法則). この事実を用いて帰納的に計算することにより

$$V^{\otimes N} = V(N) \oplus \underbrace{V(N-2) \oplus \cdots \oplus V(N-2)}_{N-1} \oplus \cdots$$

というように全体の空間 $V^{\otimes N}$ は原理的に既約分解できます.

ハミルトニアン $\mathcal{H}$ と可換なオペレータがある場合, その固有ベクトルに $\mathcal{H}$ と可換なオペレータを作用させてもまた, (一般には元のベクトルとは線形独立な) 同じ固有値に属する固有ベクトルになることを前に説明しました. $\mathcal{H}$ と可換なオペレータ $\{J^+, J^-, J^z\}$ で $\mathfrak{sl}_2$ の表現が実現されていることと合わせると, これは $V^{\otimes N}$ のどの $\mathfrak{sl}_2$ 既約成分も $\mathcal{H}$ の不変部分空間になるということを意味します. つまり,

$$V^{\otimes N} = \bigoplus_i W_i : \text{各 } W_i \text{は既約 } \mathfrak{sl}_2 \text{ 表現}$$

と分解したときに, どの既約成分 W_i に対しても $\mathcal{H}$ は W_i に属するすべてのベクトルに対し同じ固有値を持ちます (Schur の補題). 各 W_i に対し $\mathcal{H}$ が持つ固有値を E_i とすると, この固有値は $\dim W_i$ だけの重複性を持って出てくるわけです.

これで, Heisenberg のハミルトニアンの固有値の縮退の様子についてはわかったわけです. 実は Heisenberg 模型自身は「臨界的」な模型である意味で「退化」した状況になっており, もう少し deform すると退化性が消えてわかりやすくなります. それを次に考えましょう.

4 XXZ 模型とその対称性

Heisenberg 模型のハミルトニアンをその特別な場合として含むハミルトニアンとして, 以下のようなものがあります.

$$\mathcal{H}_{XYZ} = -\sum \left(J_x \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + J_y \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + J_z \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right)$$

これは, XYZ 模型といわれます. このハミルトニアンも "可積分" であることがわかっています. (この "可積分" の意味については後で説明します.)

しかし, この模型を扱うのは難しいので, ここでは, $J_x = J_y$ としたハミルトニアンを考えましょう. 計算の都合上 $J_x = J_y = \frac{1}{2}$ とし, さらにさっきのような周期的境界条件ではなく boundary term をつけて, 以下のようなハミルトニアンを考えます.

$$\mathcal{H}_{XXZ} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right) + a \cdot (\sigma_1^z - \sigma_N^z)$$

これは, $\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x$ の係数と $\sigma_i^y\sigma_{i+1}^y$ の係数が等しいので XXZ 模型といわれます. ちなみに, 先ほど考えた Heisenberg の模型は $\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x$, $\sigma_i^y\sigma_{i+1}^y$, $\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x$ の係数がすべて等しいので, XXX 模型ともいいます. 実は XXZ 模型について, 以下のような事実が成り立ちます.

Fact 1

$$\Delta = \frac{q+q^{-1}}{2},\ a = -\frac{q-q^{-1}}{4}$$

と選ぶと, $\mathcal{H}_{XXZ}$ の固有値の縮退の "パターン" は, $\mathcal{H}_{XXX}$ *(Heisenberg* 模型のハミルトニアン*)* の時と全く同じ.

今後は, この a と Δ について, すなわち

$$\mathcal{H}_{XXZ} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + \frac{q+q^{-1}}{2}\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z\right) - \frac{q-q^{-1}}{4}(\sigma_1^z - \sigma_N^z)$$

というハミルトニアンの場合について考えます.

まず, ここで Fact 1 の "パターン" の意味と, このことがなぜ成り立つかについて考えてみましょう. 固有値の縮退の "パターン" が同じといっても, $\mathcal{H}_{XXZ}$ の場合 Δ という係数があるため, さっきのように $\mathfrak{sl}_2$ を生成するような $\mathcal{H}_{XXZ}$ と可換なオペレータがあるわけではありません. ただ, この模型も $q=1$ では, Heisenberg 模型に戻るわけですから元の模型を deform したものとみなすことができます. よって, $q=1$ で先ほどの J^+, J^-, J^z に戻るような $\mathcal{H}_{XXZ}$ と可換なオペレータがあるものと予想されます.

実際には, 以下のような三つのオペレータを選ぶと, $\mathcal{H}_{XXZ}$ と可換になります.

$$J_q^+ = \sum t_1\cdots t_{i-2}t_{i-1}\sigma_i^+ \tag{1}$$

$$J_q^- = \sum \sigma_i^- t_{i+1}^{-1}t_{i+2}^{-1}\cdots t_N^{-1} \tag{2}$$

$$J^z = \sum \sigma_i^z$$

ここで, t_j というのは全体の空間 $V^{\otimes N}$ $(V=C^2)$ の j 番目に

$$t = q^{\sigma^z} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

として作用するものです. . 確かにこれらのオペレータは $q=1$ で先ほどの J^+ などに一致します.

これら三つのオペレータは, それぞれ chain の長さ N を与えるごとに決まるわけですが, N によらず以下のような交換関係を満たします.

$$[J^z, J_q^{\pm}] = \pm 2 J_q^{\pm} \tag{3}$$

$$[J_q^+, J_q^-] = \frac{q^{J^z} - q^{-J^z}}{q - q^{-1}} \tag{4}$$

実は, このような交換関係で定義される代数は, 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ として知られているものです ([4]). この量子群というのは, リー環 $\mathfrak{sl}_2$ (正確にはリー環の包絡環 $U(\mathfrak{sl}_2)$) を拡張したものになっています.

リー環による対称性だけ考えていては多少狭いわけで, それらを拡張することで, XXZ 模型における固有値の縮退は, やはりその対称性の原理で説明がつくのです.

$\mathcal{H}_{XXZ}$ と可換なオペレータで生成される代数が量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現になっているとわかったところで, この量子群の表現論についてわかっていなくては何にもならないのですが, 幸いにも $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現論と $\mathfrak{sl}_2$ の表現論は "generic" な q ではほとんど同じあることがわかっています.

例えば, 先ほど挙げた既約表現のテンソル積の分解の法則 (Clebsch-Gordan の法則) は, この場合もそのまま成り立ちます. よって, 全体の空間 $V^{\otimes N}$ を既約分解した場合の既約要素の数やその次元は全く同じとなります. (もちろん, 各既約要素に対する固有値の値は異なります.) これが Fact 1 でいう "固有値の縮退のパターンが同じ" ということの意味です.

5 J_q^+, J_q^- の expression の意味

J_q^+, J_q^- として, 式 (1), 式 (2) のような複雑な式を持ってきて, chain の長さによらない交換関係が成り立つのには理由があります. それをこれから説明しましょう.

量子力学では角運動量の保存則というのがあります. 先ほどあげた $\mathfrak{sl}_2$ の J^+, J^-, J^z というのは量子力学では角運動量のオペレータとして出てくるものです. こういったものを二つの独立な state に働かせる場合, 合成法則があります. それは, 数学の言葉で言うとリー環のテンソル積の規則です.

もう少し正確に書きますと, リー環 $\mathfrak{g}$ の表現 (あるいは, 同じことですが包絡環 $U_{\mathfrak{g}}$ の表現) V, W があった場合, $V \otimes W$ にもリー環の表現の構造を入れることができます. それは以下のようにして行ないます. まず, 表現は

$$\pi_V : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}\, V, \quad \pi_W : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}\, W$$

で与えられているとします. 包絡環 $U\mathfrak{g}$ には $\Delta : \mathfrak{g} \ni X \longmapsto X\otimes 1+1\otimes X \in U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}$ という代数の交換関係を保存するような写像があります. つまり, 任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対し,

$$\Delta\left([X,Y]_{\mathfrak{g}}\right) = [\Delta(X), \Delta(Y)]_{U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}} \left(= \Delta(X)\Delta(Y) - \Delta(Y)\Delta(X)\right)$$

が成り立ちます. この Δ を余積といいます. この余積を用いると

$$U\mathfrak{g} \xrightarrow{\Delta} U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g} \overset{\pi_V\otimes\pi_W}{\longrightarrow} \mathrm{End}\, V \otimes \mathrm{End}\, W$$

というように, $V\otimes W$ にリー環の表現の構造が入ります. この

$$\Delta(X) = X\otimes 1 + 1\otimes X$$

というのは, 格子の言葉でいうと各点各点 (この場合は $V = C^2$) にオペレータが働いている場合, それらの和をとることで, 全体の空間 (この場合は $V^{\otimes N}$) に, リー環の表現の構造が入ることを意味しています. $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ では, $e = J_q^+, f = J_q^-, t = q^{J^z}$ とすると,

$$\Delta(e) = e\otimes 1 + t\otimes e$$

$$\Delta(f) = f\otimes t^{-1} + 1\otimes f$$

$$\Delta(t) = t\otimes t$$

と定義することにより, もとの代数と同じ交換関係 (式 (3) および式 (4)) を満たします. つまり, ひとつの点のうえに σ^α というオペレータがのっている場合に, それを全体にのばすにはこの規則でどんどんのばしてやればいいわけです. 特にこの場合, 例えば

$$\Delta^{(2)}(e) = (e\otimes 1 + t\otimes e)\otimes 1 + t\otimes t\otimes 1$$

なので, e の前には t, 後ろには 1 がつきます. よって, オペレータ J^+ などはこの場合, J_q^+ などのように変更することによって $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の交換関係を保存するようにできます. これを言い替えれば J_q^+, J_q^-, J^z の交換関係は chain の長さによらないということになります.

しかし, ひとつ問題なのは $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の余積はリー環の場合と異なり, テンソル積の順序によります.
つまり, $\sigma(a\otimes b) = b\otimes a$ とすると, $X \in U_q(\mathfrak{sl}_2)$ に対し

$$\sigma\circ\Delta(X) \neq \Delta(X)$$

です. よって, もはや角運動量の合成の時に見られたようなテンソル積の順序によらないという性質は成り立ちません.

6 XXZ 模型の固有値の記述

固有値の縮退の様子がわかりましたが, 基本問題はあたえられたハミルトニアンを対角化したい, つまり, 固有値, 固有ベクトルを求めたいという事でした. 次は固有値そのものの記述について, 対称性がどう有効かについて説明します.

しかし, 固有値そのものを取り扱う場合, 全体の空間の次元は $\dim V^{\otimes N} = 2^N$ であり, さらに $N \to \infty$ を考えるわけですから, 3 次元しかない $\mathfrak{sl}_2$ で統制しようとすることには無理があります. つまり, 無限次元の object をもってこなくてはいけないだろうと予想されるわけで, 実際には元のリー環を affine 化することが必要です.

そこで, まず affine リー環について説明します (詳しくは [2]).

7 Affine リー環についての予備知識

Affine リー環といってもここでは $\mathfrak{sl}_2$ の affine 化である $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ について考えます.

$\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ とはだいたいローラン多項式 $C[t, t^{-1}]$ の元を成分に持つ行列の作るリー環と言えます. もう少し正確には

$$\widehat{\mathfrak{sl}_2} = \mathfrak{sl}_2 \otimes C[t, t^{-1}] \oplus Cc \tag{5}$$

ここで, c は centre の元です. (すなわち, 任意の $X \in \widehat{\mathfrak{sl}_2}$ に対し $[X, c] = 0$ を満たします. ここで, 交換子は $[X \otimes t^m, Y \otimes t^n] = [X, Y] \otimes t^{m+n} + m\delta_{m+n,0}\mathrm{tr}(XY) \cdot c$ で定義します.)

Affine リー環には, 二つの重要な表現のクラスがあります. 一つは最高ウェイト表現で, もう一つは "有限次元" 表現です.

- 最高ウェイト表現

  これについてはあとで説明します.

- "有限次元" 表現

  これは, evaluation 表現といわれるもので, 以下のようにして構成します. V という $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現が

  $$\pi_V : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow \mathrm{End}\ V$$

  で与えられているとします. ここで, $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ の表現を作るには $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ から End V への対応を決めればいいわけですが, 式 (5) から $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ の任意

の元は, $X \in \mathfrak{sl}_2$ を用いて $X \otimes t^n + C \cdot c$ $(n \in Z, C \in C)$ という元の和で書き表されることがわかります. そこで, $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ から sl_2 への写像として, $C \ni \zeta \neq 0$ を固定し,

$$\mathrm{ev}_\zeta : \widehat{\mathfrak{sl}_2} \ni X \otimes t^n + C \cdot c \longmapsto X\zeta^n \in \mathfrak{sl}_2$$

というものを考えます. (いうなれば, t に対して ζ, c に対して 0 を対応させるわけです.) こうすることにより $\pi_V \circ \mathrm{ev}_\zeta : \widehat{\mathfrak{sl}_2} \longrightarrow V$ によって V に $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ の表現の構造が入ります.

これからの話しに出てくるのは, 本当は $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ の deformation である (affine 型) 量子群 $U_q\left(\widehat{\mathfrak{sl}_2}\right)$ ですが, 上の二つのクラスの表現はどちらも自然な q-deformation を持っています.

8 Abelian Symmetry

まず, XXZ 模型は, 以下の意味で可積分系です. すなわち, 無限個のオペレータの family $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \cdots$ があり
$[\mathcal{H}_{XXZ}, \mathcal{H}_n] = 0$ をみたします. ハミルトニアン自身 $\mathcal{H}_{XXZ} = \mathcal{H}_1$ はこの family の最初の元として埋め込まれます.

実はもっと詳しく, $[T(\zeta_1), T(\zeta_2)] = 0$ を満たすような行列 $T(\zeta)$ があり,

$$\mathcal{H}_n \propto \left(\zeta \frac{d}{d\zeta}\right)^n \log T(\zeta)\,|_{\zeta=1}$$

となっていることがわかります.

このことから, $[\mathcal{H}_{XXZ}, \mathcal{H}_n] = 0$ であるだけでなく全ての m, n について

$$[\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_m] = 0$$

という可換性が成り立ちます. ちなみに, 前の場合, ハミルトニアンとは可換でしたが, それら同士は可換ではありませんでした. これは non-abelian な symmetry といいます. それに対し互いに可換な family $\mathcal{H}_n$ は, abelian symmetry を与えています.

9 Yang-Baxter equation

次に, Yang-Baxter equation (YBE) について説明します. 実は, この YBE を満たすオペレータがあると, 今示したような abelian symmetry の

family がつくれるのです. ちょっと天下りになりますが, 以下のような行列を考えましょう.

$$R(\zeta)=\begin{pmatrix} a & & & \\ & b & c & \\ & c & b & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

$$a=\frac{1}{\kappa},\quad b=\frac{1}{\kappa}\frac{(1-\zeta^2)\,q}{1-q^2\zeta^2},\quad c=\frac{1}{\kappa}\frac{(1-q^2)\,\zeta}{1-q^2\zeta^2}$$

ここで, $R(\zeta)$ は, $V=C^2$ として, $V\otimes V$ に作用する $2^2\times 2^2$ 行列と考えます. この $R(\zeta)$ は, 以下の方程式を満たします. これが, Yang-Baxter equation と呼ばれるものです.

$$R_{12}(\zeta_1/\zeta_2)\,R_{13}(\zeta_1/\zeta_3)\,R_{23}(\zeta_2/\zeta_3)=R_{23}(\zeta_2/\zeta_3)\,R_{13}(\zeta_1/\zeta_3)\,R_{12}(\zeta_1/\zeta_2)$$

ここで, R_{12},R_{13},R_{23} はそれぞれ ζ_1,ζ_2,ζ_3 でパラメトライズされた $V_1\otimes V_2\otimes V_3$ 上に働くオペレーターで, $R=\sum A_i\otimes B_i$ と書いた時に, $R_{12}=\sum A_i\otimes B_i\otimes id, R_{13}=\sum A_i\otimes id\otimes B_i, R_{23}=\sum id\otimes A_i\otimes B_i$ として定義したものです.

この Yang-Baxter equation を使うと, abelian symmetry の母関数が得られます. それは以下のようにして構成します. $\zeta_1,\cdots\zeta_N$ を固定し, それぞれ全体の空間 $V_1\otimes\cdots\otimes V_N$ $(V_j=V=C^2)$ の各 V_j に順にパラメトライズします. 全体の空間にもう一つ ζ でパラメトライズされた V_0 を付け加えた空間 $\overset{\zeta}{V_0}\otimes\overset{\zeta_1}{V_1}\otimes\cdots\otimes\overset{\zeta_N}{V_N}$ に作用するオペレータ $R_{01}(\zeta/\zeta_1)\cdots R_{0N}(\zeta/\zeta_N)$ (R_{0j} は先ほどの R_{12} などと同様に $R_{0j}=\sum A_i\otimes\cdots\otimes\overset{j}{\smile}{B_i}\otimes\cdots\otimes id$ と定義されるものです.) を V_0 上でトレースをとり, これを $T(\zeta)$ とします. 式で書くと

$$T(\zeta)=\mathrm{tr}_{V_0}\left(R_{01}(\zeta/\zeta_1)\cdots R_{0N}(\zeta/\zeta_N)\right)$$

です. これは, $V_1\otimes\cdots\otimes V_N$ に働くオペレータです. 詳しい説明は省略しますが, YBE をくり返し使うことによって, このオペレータ $T(\zeta)$ に対し

$$T(\zeta)T(\zeta')=T(\zeta')T(\zeta)\qquad\forall\zeta,\zeta'$$

が成り立つことを示すことができます. つまり, この $T(\zeta)$ が abelian symmetry の母関数になります. YBE という隣合う三つに関係する micro な abelian symmetry から global な abelian symmetry の母関数 $T(\zeta)$ が得られたわけです.

さらに計算により, $T(1)$ は shift operator

$$T(1) : v_{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes v_{\varepsilon_N} \longmapsto v_{\varepsilon_2} \otimes \cdots \otimes v_{\varepsilon_N} \otimes v_{\varepsilon_{N+1}}$$

となり, さらに

$$T^{-1}(1)\, T'(1) \propto \mathcal{H}_{XXZ}$$

となることがわかります.

実は, $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ の q-deformation である $U_q\left(\widehat{\mathfrak{sl}_2}\right)$ から YBE が得られます. このことについて少し説明致します.
V_ζ を $V = C^2$ の evaluation 表現として, $V_{\zeta_1} \otimes V_{\zeta_2}$ と $V_{\zeta_2} \otimes V_{\zeta_1}$ を考えた場合, 先ほど注意したようにテンソル積は順序によりますから, 一般にはこれは同型かどうか分かりません. しかし, この場合は

$$V_{\zeta_1} \otimes V_{\zeta_2} \simeq V_{\zeta_2} \otimes V\zeta_1$$

となる intertwiner が スカラー倍を除きただ一つに定まります. しかもこの intertwiner は ζ_1, ζ_2 の比によって決まるので, これを $\check{R}(\zeta_1/\zeta_2)$ と書きます. この時

$$R(\zeta) = P\check{R}(\zeta) \quad (Pu \otimes v = v \otimes u)$$

とおくと, この $R(\zeta)$ は YBE の解になります. これは intertwiner が一つに定まるということと, $V_\zeta \otimes V_\eta \otimes V_\mu$ という三つのテンソル積が既約であるという事実からわかります. すなわち, $V_{\zeta_1} \otimes V_{\zeta_2} \otimes V_{\zeta_3}$ から $V_{\zeta_3} \otimes V_{\zeta_2} \otimes V_{\zeta_1}$ への同型写像を考えた場合, 行き方は

$$V_{\zeta_1}\otimes V_{\zeta_2}\otimes V_{\zeta_3} \overset{\check{R}(\zeta_1/\zeta_2)\otimes id}{\longrightarrow} V_{\zeta_2}\otimes V_{\zeta_1}\otimes V_{\zeta_3} \overset{id\otimes\check{R}(\zeta_1/\zeta_3)}{\longrightarrow} V_{\zeta_2}\otimes V_{\zeta_3}\otimes V_{\zeta_1} \overset{\check{R}(\zeta_2/\zeta_3)\otimes id}{\longrightarrow} V_{\zeta_3}\otimes V_{\zeta_2}\otimes V_{\zeta_1}$$

$$V_{\zeta_1}\otimes V_{\zeta_2}\otimes V_{\zeta_3} \overset{id\otimes\check{R}(\zeta_2/\zeta_3)}{\longrightarrow} V_{\zeta_1}\otimes V_{\zeta_3}\otimes V_{\zeta_2} \overset{\check{R}(\zeta_1/\zeta_3)\otimes id}{\longrightarrow} V_{\zeta_3}\otimes V_{\zeta_1}\otimes V_{\zeta_2} \overset{id\otimes\check{R}(\zeta_1/\zeta_2)}{\longrightarrow} V_{\zeta_3}\otimes V_{\zeta_2}\otimes V_{\zeta_1}$$

と二通りあるわけですが ([5]), 既約性からこの二通りの写像が定数倍を除いて一意的である (Schur の補題) ので, YBE が成り立ちます.

以上の流れをまとめると

$$U_q\left(\widehat{\mathfrak{sl}_2}\right) \Rightarrow \text{ Yang-Baxter equation } \Rightarrow T(\zeta) \text{ abelian symmetry}$$

となります.

ハミルトニアンが与えられた場合に固有値, 固有ベクトルを原理的に記述する伝統的方法として, Bethe Ansatz という方法があります. 今示したような abelian symmetry が根拠になって, この Bethe Ansatz がうまくいくのです. ちなみに, この $T(\zeta)$ は transfer matrix と呼ばれます.

今までの状況を考えますと, $U_q\left(\widehat{\mathfrak{sl}_2}\right)$ というものが模型の根本にあるわけですが, これまでのところ直接的には問題を解くのに役立っていません. しかし, 対称性を支配するものが $U_q\left(\widehat{\mathfrak{sl}_2}\right)$ である以上, これ自身が問題を解くのに役割を果たすことが期待されます. 実際そうであることをみていこうと思います.

10 XXZ 模型の固有値, 固有ベクトルの構造

これから, $N=\infty$ の状況を考えたいわけですが, それにはいわゆる無限自由度の困難があります. まず, "$N=\infty$ の空間" とは何かをとらえなくてはいけません.

あるべき姿を探るために, まず $\Delta=-\infty$ という非常に極端な場合を考えてみましょう. すると

$$\lim \frac{1}{|\Delta|}\left(\mathcal{H}_{XXZ}+\ \text{const}\ \right)=\frac{1}{2}\sum_i\left(\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z+1\right)$$

となります.

このハミルトニアンはすでに対角化できているので, 自然な basis をもってくると固有ベクトルになっています. $V=C^2$ の自然な基底を v_+, v_- として固有ベクトル $\cdots\otimes v_{\varepsilon_{i+1}}\otimes v_{\varepsilon_i}\otimes\cdots$ $(v_{\varepsilon_j}=v_+ \text{ or } v_-)$ を単に列 $\cdots\varepsilon_{i+1}\varepsilon_i\cdots$ によって表しましょう. ここで, lattice の番号づけは都合上, 右から順にしています.

ここに $\frac{1}{2}\left(\sigma_{i+1}^z\sigma_i^z+1\right)$ を作用させると以下のようになります.

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left(\sigma_{i+1}^z\sigma_i^z\right)v_{\varepsilon_{i+1}}\otimes v_{\varepsilon_i} &= v_{\varepsilon_{i+1}}\otimes v_{\varepsilon_i} && (\varepsilon_i=\varepsilon_{i+1}\ \text{のとき})\\ &= 0 && (\varepsilon_i\neq\varepsilon_{i+1}\ \text{のとき})\end{aligned}$$

このことから, $\mathcal{H}=\frac{1}{2}\sum\left(\sigma_{i+1}^z\sigma_i^z+1\right)$ とおくと, その固有値 h は全て $h\geq 0$ であって, その固有ベクトルの形については,

$$h=0 \Longleftrightarrow \cdots\pm\mp\pm\mp\cdots \text{ のいずれかのみ}$$

$$h<\infty \Longleftrightarrow \cdots\pm\mp\pm\cdots(\text{ 有限個の乱れ })\cdots\pm\mp\pm\mp\cdots$$

となります. つまり有限のエネルギー (固有値) を持つのは, $(C^2)^{\otimes\infty}$ の元のうち上の四通りのいずれかの境界条件を満たすものに限られます. よって, $(C^2)^{\otimes\infty}$ の中に $\mathcal{H}$ が作用している, ある non-trivial な空間があると考えることができます. これを "space of states", 状態空間ということにしましょう.

一般の Δ で考えると, Bethe Ansatz から固有値の状況は Δ の領域の区別で決まることがわかります. 固有値は $e_1^{(N)}<\cdots\leq e_N^{(N)}$ とします.

- $\Delta > 1$

  最低固有値を与える基底状態は

  $$\cdots \otimes v_+ \otimes v_+ \otimes \cdots$$

  または

  $$\cdots \otimes v_- \otimes v_- \otimes \cdots$$

  となります. 我々の目的は相関関数を計算することですが, それは基底状態での (真空) 期待値をとることです. この場合はその相関関数が Δ によらず面白くありません.

- $|\Delta| \leq 1$

  この場合は critical (massless) といわれ, $N \to \infty$ では無限に多くの i について

  $$e_i^{(N)} - e_1^{(N)} \longrightarrow 0$$

  となっています. この場合について以下に述べるような対称性原理からのアプローチを与えることは open problem です.

- $\Delta < -1$

  この場合は massive といわれます. 最低固有値は

  $$e_2^{(N)} - e_1^{(N)} \longrightarrow 0$$

  と二重に縮退していますが, その他については

  $$\lim_{N\to\infty} \left(e_3^{(N)} - e_2^{(N)} \right) > 0$$

  となっています. (この差を mass gap といいます.)

先ほど考えた $\Delta = -\infty$ の場合は第三の場合の極限ですから, この picture は $\Delta < -1$ でも同じであることが期待できます. 以下では, この場合について考えましょう.

$\Delta < -1, \varepsilon = \frac{1}{2|\Delta|}$ とします. この時の基底状態 (最低固有値を与える固有ベクトル) $|vac\rangle$ を摂動展開で求めてみます.

$$|vac\rangle = \Omega_0 + \varepsilon\Omega_1 + \varepsilon^2\Omega_2 + \cdots$$

ここで,

$$\Omega_0 = \overset{\cdots\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0\ -1-2\ \cdots}{\cdots + - + - + - + \cdots}$$

すると $\Omega_1, \Omega_2, \cdots$ は順に決めることができ, 例えば

$$\Omega_1 = \sum_n \left(\cdots + - + \overset{n\,n+1}{+\ -} - + \cdots \right) \quad (n, n+1 \text{ 番目の } \pm \text{ が逆転})$$

などとなります.

そこで, 相関関数 ($\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma \langle vac| \sigma_1^z |vac\rangle$) を求めてみましょう. N を十分大きいとして計算すると,

$$\langle vac|vac\rangle = 1 + \varepsilon^2 N + \varepsilon^4 \frac{N(N-1)}{2} + \cdots$$

$$\langle vac|\sigma_1^z|vac\rangle = 1 + \varepsilon^2 (N-4) + \varepsilon^4 \left(\frac{N(N-9)}{2} - 4 \right) + \cdots$$

となるので,

$$\frac{\langle vac| \sigma_1^z |vac\rangle}{\langle vac|vac\rangle} = 1 - 4\varepsilon^2 - 4\varepsilon^4 + \cdots$$

となります. 実は, $N = \infty$ での exact result が知られています. $-1 < q < 0$ の時 $\Delta = \frac{q+q^{-1}}{2}, \varepsilon = \frac{|q|}{1+q^2}$ とすると

$$\frac{\langle vac| \sigma_1^z |vac\rangle}{\langle vac|vac\rangle} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^{2n}}{1+q^{2n}} \right)^2 \tag{6}$$

となります (Baxter). こういった式をどうつかまえるかを次に説明します.

Part I

11 XXZ 模型の問題点

ひきつづき, 以下のハミルトニアンで与えられる XXZ 模型を考えます.

$$\mathcal{H}_{XXZ} = -\frac{1}{2} \sum_i \left(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right)$$

$$\Delta = \frac{q+q^{-1}}{2}$$

この模型についてなるべく対称性の原理を使って相関関数を求めたりハミルトニアンをスペクトル分解するというところまでやってみたいわけで

す. 第一部では$U_q\left(\widehat{\mathfrak{sl}_2}\right)$をもってくるとうまくいきそうだという事を示しました.

しかし, 実際に進めていくに当たっては幾つか問題があります. まず, Δ の領域によって全く様相が違うということを注意しました. 上で状態空間とよんだところのものの構造が, Δ の領域によって全く違うと考えられます. 以下では $-1 < q < 0$ 従って $\Delta < -1$ の場合のみを考えることにします.

さて, ∞ - chain で形式的に計算すると, $U_q\left(\widehat{\mathfrak{sl}_2}\right)$ の生成元はハミルトニアンと可換, つまり

$$[U_q\left(\widehat{\mathfrak{sl}_2}\right), \mathcal{H}_{XXZ}] = 0$$

となることが容易にわかります. これが正しいとするならば状態空間 $\mathcal{F}$ は$U_q\left(\widehat{\mathfrak{sl}_2}\right)$ の表現空間であることになります. そこで第一の問題として, 表現空間としての $\mathcal{F}$ の構造を調べることが挙げられます.

これについて, どのように考えるか, $\Delta = -\infty$ の場合にみてみましょう. このとき,

$$\mathcal{H} \sim \frac{1}{2}\sum\left(\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z + 1\right)$$

よって, $\varepsilon_k = \pm$ として

$$\cdots\varepsilon_{k+1}\varepsilon_k\varepsilon_{k-1}\cdots$$

とすると, 発散しないようにするには, 境界条件をパラメトライズして

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i,j=0,1}\mathcal{F}^{(i,j)}: \quad \varepsilon_k = (-)^{k+i} \quad k \gg 0$$

$$\varepsilon_k = (-)^{k+j} \quad k \ll 0$$

となります. これは, $q = 0$ の場合を考えているわけですが, q が十分小さい場合にはこの状況は変わらないだろうと思われます.

次の問題は, 物理的な言葉でいうと「粒子」の構造を決定せよ, ということになります. 粒子というのはエネルギーや運動量が完全に確定した状態をいいます. これは, ハミルトニアンの固有状態 (固有ベクトル) を考えることになります. Bethe Ansatz の知見によれば, 一般の固有状態に対しての固有値は

$$\mathcal{H}|\xi_1, \cdots \xi_n\rangle = \left(\varepsilon\left(\xi_1\right) + \cdots + \varepsilon\left(\xi_n\right)\right)|\xi_1, \cdots \xi_n\rangle$$

のように加法的になっています. つまり, $n = 1$ の基本的な一粒子状態があって, それらの粒子が n 個あるような状態が一般の状態と言えます. これは, 数学の言葉でいうとハミルトニアンのスペクトル分解になります. これについては後で触れます.

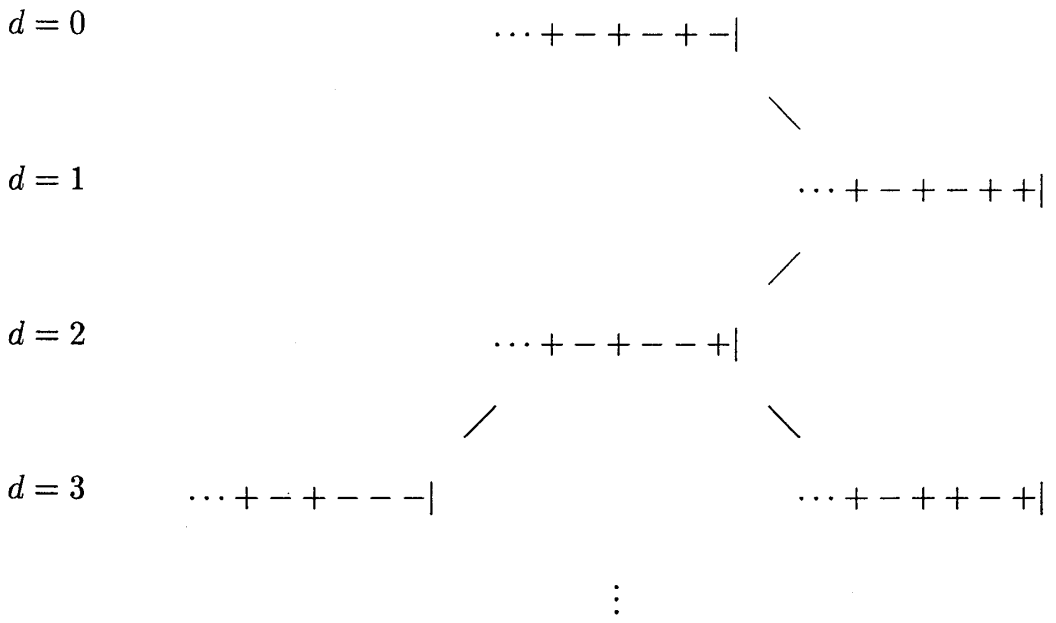

図 1: 0-path の図

12 “半分の空間” と最高ウェイト表現

$q=0$ における $\mathcal{F}$ の固有状態は $(\cdots\varepsilon_{k+1}\varepsilon_k\varepsilon_{k-1}\cdots)$ のように両側にのびた列で表されました. これに対してそれを半分で切った列を考えます.

$$p=(\cdots p_3,p_2,p_1): \qquad p_k=\{+,-\}$$
$$p_k=(-1)^{k+1}\,(k\gg 0)$$

このような列のことを “i-path”$(i=0 \text{ or } 1)$ と呼ぶことにします. i-path の全体は, いわば状態空間の “左半分” になっています. さらに, path の次数というのを以下の degree operator で定義されるものとします.

$$D=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\sigma_{k+1}^{z}\sigma_{k}^{z}+1\right) \tag{7}$$

そこで, $i=0$ の場合に, 各 degree の固有状態を書いてみましょう. $+$ が多い時には右に $-$ が多い時には左に書くようにして図にすると, 図 1 のようになります.

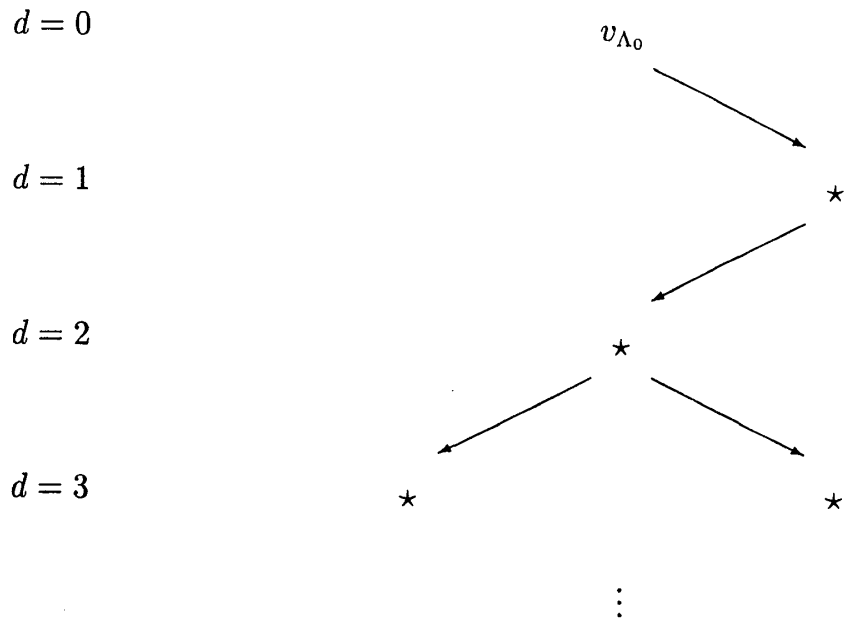

図 2: 最高ウェイト表現 $V(\Lambda_0)$

ここで, 7 節で説明しなかった最高ウェイト表現について話しをしたいと思います. $U_q\left(\widehat{\mathfrak{sl}_2}\right)$ の最高ウェイト表現は $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ の場合とほどんど同じなので, $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ の場合について説明します. $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ の生成元を

$$e_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_0 = \begin{pmatrix} 0 & t^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_0 = c - h_1, \quad h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とします. 最高ウェイト表現 $V(\Lambda_0)$ とは, 以下で定義されるものです.

$$\text{ある } v_{\Lambda_0} \text{ で生成される} \ : \ V(\Lambda_0) = U\left(\widehat{\mathfrak{sl}_2}\right) v_{\Lambda_0}$$

$$\text{relation} \ : \ e_i v_{\Lambda_0} = 0, \quad h_0 v_{\Lambda_0} = v_{\Lambda_0}, \quad h_1 v_{\Lambda_0} = 0, \quad f_0^2 v_{\Lambda_0} = 0, \quad f_1 v_{\Lambda_0} = 0$$

これについても次数を f_i を 1 次, e_i を -1 次と定めます. (ちなみに, $V(\Lambda_1)$ は, この定義で 0 と 1 を入れ換えて定義されます.) そこで v_{Λ_0} から始めて $V(\Lambda_0)$ の図を書くと, 図 2 のようになります. ここで, f_0 をかける場合には右下に, f_1 をかける場合には左下にいくように書いています.

この二つの図を見比べると予想がつくように実は以下の事実が成り立ちます. ‘

Fact 2 $\forall d \geq 0$ について

$$\sharp(\text{次数 } d \text{ の } i\text{-}path) = \dim V(\Lambda_i)_d$$

また, $V(\Lambda_i)$ の *character formula* はこの場合 i によらず

$$\chi = \sum_{d=0}^{\infty} \dim V(\Lambda_i)_d \, t^d = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-t^{2n-1})} \tag{8}$$

です.

よって, 各レベルの次元が同じなので $V(\Lambda_i)$ は構造としても

$$\cdots \otimes V \otimes V \otimes V + (\text{boundary condition}) \sim V(\Lambda_i)$$

となっているのではないかと思われます. これが正しいとすれば, q が小さいとき収束するような完備化の下で, $U_q\left(\widehat{\mathfrak{sl}_2}\right)$ の表現として,

$$V(\Lambda_i) \simeq V(\Lambda_{1-i}) \otimes V$$

となっているはずです. 実際には, パラメータをふくんだかたちで,

$$\Phi(\zeta) : V(\Lambda_i) \xrightarrow{\sim} V(\Lambda_{1-i}) \otimes V_\zeta$$

という $U_q\left(\widehat{\mathfrak{sl}_2}\right)$ の intertwiner が存在します. このようなオペレーターを (q-deformed) Vertex Operator といいます.

13 数学的な枠組

今まで行ってきた議論は, 実は corner transfer matrix method という考え方に基づいた picture です. しかしこれ自身を直接正当化するのはそのままでは難しい. そこで, 格子模型そのものの有限 lattice の極限と完全に一致しているかどうかは別にして, 理想化された, 今までわかったいろいろな性質が成り立っているようなモデルを組み立てて考えたいと思います. これからは, 表現論を使って格子模型の状態空間を定式化し直して考えます.

14 状態空間

いままでのことから,

$$\mathcal{F} = \bigoplus \mathcal{F}^{(i,j)} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$$

$$\mathcal{F}^{(i,j)} = V(\Lambda_i) \otimes V^*(\Lambda_j): \quad \mathcal{H} = V(\Lambda_0) \oplus V(\Lambda_1)$$

として, これを $\mathcal{F}$ の定義として採用します. (本当は q についての完備化をするのですが以下では省略します.) この上で, ハミルトニアンその他を構成し, もっともなものができているかどうか検証することにします.

ただし, このように空間を定義した場合素朴にあった local な構造$\cdots\otimes V\otimes V\otimes\cdots$ がそのままではみえなくなっています. local structure の回復は, vertex operator を利用して以下のようにして行ないます.

$$V(\Lambda_i) \otimes V^*(\Lambda_j) \overset{\Phi(1)\otimes id}{\tilde{\longrightarrow}} V(\Lambda_{1-i}) \otimes V \otimes V^*(\Lambda_j)$$

このようにすれば, 右辺の V の上には local な operator σ_1^α などが定義できます.

15 Vertex operator

Vertex operator については, 今の場合には, 以下のことが知られています.

- 存在と一意性 (up to scalar)
- 可逆性
  これは, 具体的には以下のようにして構成されます.

$$\Phi(\zeta) = \Phi_+(\zeta) \otimes v_+ + \Phi_-(\zeta) \otimes v_-$$

ここで, v_+, v_- というのは V の基底です.

$$\Phi_\pm(\zeta): V(\Lambda_i) \longrightarrow V(\Lambda_{1-i})$$

$$\Phi_\varepsilon^*(\zeta) = \Phi_{-\varepsilon}(-q^{-1}\zeta)$$

としたときに, ある scalar g が存在して,

$$g \cdot \Phi_{\varepsilon_1}(\zeta)\Phi_{\varepsilon_2}^*(\zeta) = \delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2} id$$

となります.

- 以下の交換関係が成り立ちます.

$$R_{12}\left(\zeta_1/\zeta_2\right)\overset{1}{\Phi}\left(\zeta_1\right)\overset{2}{\Phi}\left(\zeta_2\right)=\overset{2}{\Phi}\left(\zeta_2\right)\overset{1}{\Phi}\left(\zeta_1\right) \tag{9}$$

この式の意味は以下のとおりです.

$$\text{左辺}\ =\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\Phi_{\varepsilon_1}\left(\zeta_1\right)\Phi_{\varepsilon_2}\left(\zeta_2\right)\otimes R\left(\zeta_1/\zeta_2\right)\left(v_{\varepsilon_1}\otimes v_{\varepsilon_2}\right)$$

$$\text{右辺}\ =\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\Phi_{\varepsilon_2}\left(\zeta_2\right)\Phi_{\varepsilon_1}\left(\zeta_1\right)\otimes v_{\varepsilon_1}\otimes v_{\varepsilon_2}$$

この vertex operator の性質から相関関数などが定義できます.

16 真空

今後, 時に応じて状態空間に対し

$$\mathcal{F}=\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}^*\simeq\mathrm{End}\ \left(\mathcal{H}\right)$$

というような見方をします. つまり $\mathcal{F}$ に属する各「状態ベクトル」を“半分の空間” $\mathcal{H}$ 上の linear map とみることになります. この時, 基底状態 (あるいは「真空」という) は以下のように定義されます.

$$\left|vac\right\rangle_{(i)}=\chi^{-\frac{1}{2}}\left(-q\right)^{D}\ \text{on}\ V\left(\Lambda_i\right)$$

D は, 式 (7) で定義した degree operator です.

17 ハミルトニアン

先ほど見たように, ハミルトニアンを与えるには abelian symmetry の family をあたえればいいわけです. そこで, ハミルトニアン自身は母関数 $T\left(\zeta\right)$ の微分で以下のように与えます.

$$\mathcal{H}_{XXZ}=\frac{1-q^2}{2q}\zeta\frac{d}{d\zeta}\log T\left(\zeta\right) \tag{10}$$

そして, 母関数を以下のように定義します.

$$T\left(\zeta\right)\overset{def}{=}g\cdot\sum_{\varepsilon}\Phi_{\varepsilon}\left(\zeta\right)\otimes\Phi_{-\varepsilon}\left(\zeta\right)^{t}$$

これは, $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}^*$ 上のオペレータです. 実際, vertex operator の交換関係によって, これらのオペレータが可換になっていることが直接確かめられます.

18 相関関数

内積を

$$\mathcal{F} \ni f, f' \text{ に対し } \langle f, f' \rangle = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}} (f f')$$

と定義します. すると

$$_{(i)}\langle vac|vac\rangle_{(i)} = \chi^{-1} \mathrm{tr}_{V(\Lambda_i)} \left((-q)^{2D} \right) = 1$$

ただしここで, (8) の式において $t = q^2$ としたものを χ とします. すると格子点 1 に働く行列要素 $E^{(1)}_{\varepsilon\varepsilon'}$ について

$$\langle vac|E^{(1)}_{\varepsilon\varepsilon'}|vac\rangle = g \cdot \chi^{-1} \mathrm{tr} \left((-q)^D \Phi_\varepsilon \left(-q^{-1}\right) \Phi_{\varepsilon'} (1) (-q)^D \right)$$

となります. $\sigma^{\pm}_1 = E^{(1)}_{\pm\mp}, \sigma^z_1 = E^{(1)}_{++} - E^{(1)}_{--}$ の相関関数はこれからわかります. もっと一般に, 以下の式が成り立ちます.

$$_{(i)}\langle vac| E^{(n)}_{\varepsilon_n\varepsilon'_n} \cdots E^{(1)}_{\varepsilon_1\varepsilon'_1} |vac\rangle_{(i)} = F^{(i)}_{-\varepsilon_1 \cdots -\varepsilon_n \varepsilon'_n \cdots \varepsilon'_1} (q^2; -q, \cdots -q, 1, \cdots 1) \tag{11}$$

$$F^{(i)}_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} (x; \zeta_1, \cdots \zeta_n) = \mathrm{tr} \left(x^D \Phi_{\varepsilon_1} (\zeta_1) \cdots \Phi_{\varepsilon_n} (\zeta_n) \right) \tag{12}$$

となります. このように vertex operator を用いて全て書けるわけです.

ここで, ちょっと補足しておくと, 式 (12) は実は q-KZ 方程式とよばれるある差分方程式の解になっています. その理由は簡単なことです.

- $x^D \Phi (\zeta) x^{-D} = \Phi (x\zeta)$
- 交換関係 (式 (9))
- トレースの cyclic property

という性質から,

$$\mathrm{tr} \left(x^D \Phi (\zeta_1) \Phi (\zeta_2) \cdots \right) = \mathrm{tr} \left(\Phi (x\zeta_1) x^D \Phi (\zeta_2) \cdots \right) = \mathrm{tr} \left(x^D \Phi (\zeta_2) \cdots \Phi (\zeta_n) \Phi (x\zeta_1) \right)$$

となります. 後は交換関係 (式 (9)) によって後ろから一つ一つひっくり返すことでこれが差分方程式を満たすことが分かります.

式 (11) を使えば, 相関関数は計算できるわけですが実際の計算のテクニックとしては bosonization をもちいることによって, 例えば

$$\langle vac|\sigma^z_1|vac\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2n}}{1 + q^{2n}} \right)^2$$

というような式 (式 (6)) は vertex operator からも計算されます.

19 Particle Picture

粒子の状態を知るということは, 言い替えれば, ハミルトニアンの固有値, 固有ベクトルをたくさん作りたいわけですが, ここで

$$\Psi^*(\xi): V_\xi \otimes V(\Lambda_i) \to V(\Lambda_{1-i}):\ \text{intertwiner}$$

というものをつくります. これは type II の vertex operator といわれます. これは同型写像ではありませんが, 存在と一意性については $\Phi(\zeta)$ と同様です. 成分の定義は

$$\Psi^*_\varepsilon(\xi)\, u = \Psi^*(\xi)\,(v_\varepsilon \otimes u)$$

とします.

結論をいいますと

$$|\xi_1, \cdots \xi_n\rangle_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n(i)} = \Psi^*_{\varepsilon_1}(\xi_1) \cdots \Psi^*_{\varepsilon_n}(\xi_n)\,(-q)^D \qquad \text{on } V(\Lambda_i) \qquad (13)$$

は, $\mathcal{H}_{XXZ}$ (式 (10)) の固有ベクトルになります.

20 ハミルトニアンのスペクトル分解

1 粒子状態

$$|\xi\rangle_{\varepsilon(i)} = \Psi^*_\varepsilon(\xi)\,(-q)^D$$

を考えます.

$$\mathcal{H}\,|\xi\rangle_{\varepsilon(i)} = \epsilon(\xi)\,|\xi\rangle_{\varepsilon(i)}$$

ここで, 固有値 $\epsilon(\xi)$ は楕円関数で表すことができます. 重要なのは $\epsilon(\xi)$ は $\varepsilon = \pm$ によらない, つまり, 二重に縮退しているということです. (この ε によらないことは, 一般の式 (13) で成り立ちます.) このことは, $\mathcal{F}$ のなかに 2 次元の固有空間があってこれが今考えている代数, $U_q\left(\widehat{\mathfrak{sl}_2}\right)$ の表現になっていると考えることが出来ます. $U_q\left(\widehat{\mathfrak{sl}_2}\right)$ の表現として実は $\{|\xi\rangle_{\pm,(i)}\}$ の張る空間は $V^{(i)}_\xi$ と同型になります.

つまり, $\mathcal{F}$ は既約ではなく, この中に基底状態 $C\,|vac\rangle_{(i)}$, 1 粒子状態 $V^{(i)}_\xi$, 2 粒子状態 $\{V^{(i)}_{\xi_1} \otimes V^{(i)}_{\xi_2}\}_{\mathrm{Sym}}$, $\cdots$ といった, 表現があるという構造になっています.

よって, これらをすべてあつめたものが状態空間になっていて, 単位の分解

$$id_{\mathcal{F}} = \sum_{i=0,1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\varepsilon_n, \cdots \varepsilon_1 = \pm} \frac{1}{n!} \oint \frac{d\xi_n}{2\pi i \xi_n} \cdots \oint \frac{d\xi_1}{2\pi i \xi_1}\, |\xi_n, \cdots, \xi_1\rangle_{\varepsilon_n, \cdots, \varepsilon_1; (i)} \cdot {}_{(i); \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n}\langle \xi_1, \cdots, \xi_n|$$

が成り立つのではないかと思われます. 実際, Bethe Ansatz のほうからもそういう事が成り立つのではないかと予想されるのですが, 数学的にはまだその部分の証明はなされていないのが現状です. 詳しくは文献 [3] を参照して下さい.

参考文献

[1] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, *Graduate Texts in Mathematics*, Springer–Verlag, New York Inc. (1972)

[2] Kac, V. G., Infinite dimentional Lie algebras (2rd ed.), Cambridge University Press (1985)

[3] Jimbo, M., Miwa, T., Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models, RIMS preprint 981 (1994)

[4] 神保 道夫, 量子群とヤン・バクスター方程式, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1990)

[5] Chari, V., Pressley, A., Quantum affine algebras, *Comm. Math. Phys.* 142 (1991) 261–283