

破壊現象のモデリングとコンピュータシミュレーション

早川 美徳 (東北大学電気通信研究所)

1 モノが壊れるということ

「壊れる」ということを一体どのように我々は理解したらよいだろうか。ガラスが割れたり、建物に亀裂が入ったり、風船が破裂したり、諫早湾の水底にひび割れが出来たりと、我々は日常的に色々な場面で「破壊」に遭遇する(こういうテキストを書く時には骨が折れたりもする)。

けれども、よくよく破壊について思いを巡らせると、なかなかすっきりとは理解し難い対象である。モノに亀裂が入る時に、亀裂の先端はどの様になっているのだろうか。連続体近似によれば、亀裂先端は無限小の幅を持ち曲率無限大であって、先端部分の応力は発散するという描像となる。原子スケールでそのような事はあるから、先端部分では何か複雑なことが起こっているのかもしれない。そうすると、そもそも先端なんて定義できないかもしれない。

亀裂が進展するのは、原子同士が何らかの作用で無理やり引き離されるには違いない。一方で、マクロなスケールで見ても亀裂面には種々の模様が観察されたりする。原子スケールでの出来事と目で見えるスケールでの亀裂パターン等とをどのように結びつけたら良いのだろうか。

モノが割れたり砕けたりする過程の中には、物性物理との多くの接点があるであろうことは想像に難くない。このサブゼミは、破壊に関する比較的最近のトピックを交えながら、破壊の物理の入門編としてみたい。

2 進展する亀裂

2.1 破壊力学と亀裂の進展条件

まずはじめに(線形かつ静的な場合に限った)弾性論を簡単に復習しておこう[1]。物体内の座標成分を x_i とし、微小な変位の各成分を u_i と表記することにする(ここで、 $i = 1, 2, 3$) と、歪みテンソルは

$$e_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

と書ける。一方、応力 σ_{ij} は歪みに対して線形

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (2)$$

で(以後、同じ添字については和を取るものとする)、このとき弾性体の歪みエネルギー密度 U は

$$U = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} \quad (3)$$

で与えられる。弾性テンソル C_{ijkl} は物体の硬さや異方性に依存する。

このような物体内部の力の釣り合いは、物体に作用する体積当たりの外力を F_i として

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad (4)$$

で表わされる。例えば、後に登場する熱歪みの問題では温度場の勾配に比例した力 F_i を考慮しなければならない。応力と歪み、および歪みと変位の関係から位置の釣り合いの方程式もこれから導出できる。

以下では主に二次元の問題を扱うので、ここで二次元の弾性論もおさらいしておく。二次元の問題というときには、ある軸(例えば z 軸)方向の応力成分が恒等的に0である場合(平面応力)と、 z 方向の歪み成分が0である場合(平面歪)が考えられるが、ここでは前者のケースについて述べることにしよう。すなわち $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ の場合である。

平面応力において、歪みと応力の関係は

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{pmatrix} \quad (5)$$

で与えられる。ここで E はヤング率、 ν はポアソン比、また $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $e_{xy} = e_{yx}$ である。

釣り合いの方程式から、重調和方程式

$$\Delta \Delta \Phi = 0 \quad (6)$$

を満足するような関数 Φ (応力関数)を使って、応力は

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad (7)$$

と書けることが分かる。熱歪みが物体内に作用する場合には、6式は

$$\Delta \Delta \Phi = -E\alpha \Delta T \quad (8)$$

となる。ここに α は熱膨張率， T は温度場である。

さて、一様な物体に平面状の亀裂が入り込んでいるような状況を想像してみよう。物体に加える変形は図1に示すように三通りの方法の合成で表現でき、亀裂面を引きはがす方向をモードI、亀裂面に平行かつ亀裂先端に直角方向に剪断応力が加えられる場合をモードII、亀裂面に平行かつ亀裂先端にも平行な剪断応力の場合をモードIIIの変形と呼ぶ。

一般に、亀裂の先端近傍での応力は、亀裂先端からの距離 r と亀裂方向から見た角度 θ の関数として以下のように書ける。例えば、モードIの変形について

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + O(r^0) \quad (9)$$

である。この様に亀裂先端では応力が $r^{-1/2}$ で発散するのは(連続体の破壊を考える場合に)一般的な性質であって、これはモードII, IIIについても同様である。 K_I はモードIの応力拡大係数(Stress Intensity Factor)と呼ばれ、亀裂近傍の弾性場を特徴付ける基本的な量である。同様にして K_{II} および K_{III} も定義される。

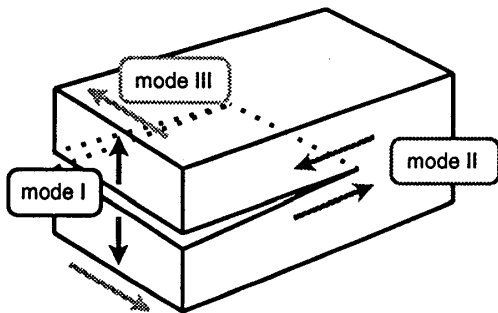


図1: 変形のモード

では、ここで亀裂の進展条件を考えてみよう [2]。図のような亀裂をあらかじめ用意し、物体に力を加えて変形させる。例えば、モードIの変形の場合に、元からあった亀裂はどのような条件で進展し始めるのだろうか。連続体近似では亀裂先端の応力は発散してしまうので、例えば「臨界的な応力を越えた応力が先端部に加わった時に割れはじめる」という条件は明らかに不適切である。この問題に先鞭をつけたのは Griffith(1920) である。彼は、亀裂の進展に伴う弾性エネルギーの減少と、亀裂による表面エネルギーの増加が釣り合うような条件下で亀裂は進展する、と考えた。すなわち、弾性エネルギーを W_{el} 、

亀裂の長さを s とすると、亀裂先端で

$$-\frac{dW_{el}}{ds} = \Gamma \quad (10)$$

であるとき、亀裂は限界的な釣り合いの状態にある。ここで Γ は表面エネルギーの増加率で物質によって決まるパラメータ。この時、力学的に安定であるための条件

$$d^2W_{el}/ds^2 \geq 0$$

も満足されねばならない。

エネルギー収支に着目したこの考え方を Irwin(1957) らはさらに発展させた。仮想的な亀裂の進展に伴う弾性エネルギーの減少分は、殆どが亀裂近傍での応力変化の結果であることと、応力が9式で表現されることを考慮すると、弾性エネルギー変化率は

$$-\frac{dW_{el}}{ds} = K_I^2/E \quad (11)$$

と評価される(簡単のためここではモードIに限って議論する)。物体の強さを表わす指標として臨界応力拡大係数 K_I^c を導入することによって、亀裂の平衡条件は

$$K_I = K_I^c \quad (12)$$

と表現され、加えられた応力拡大係数がこの臨界値を越える時 ($K_I > K_I^c$) に亀裂はさらに進展する。ただし、どの方向にどれ位の長さによって亀裂が進むべきかは、以上の議論だけでは明らかではない。

割れるというのは、典型的な非可逆現象であり、そこに自由エネルギー等の平衡系の概念を導入するのは不思議な印象を持たれるかもしれないが、ここで述べたのはあくまで「止まっている」亀裂についてであることに注意されたい。

2.2 ガラスの破壊実験

ここで興味深い実験を紹介しよう。かつて平田森三は、一旦熱したガラス板をその端からゆっくりと水に沈めて冷やすことによって、ガラス中に亀裂はゆっくりと形成される様子を観察している。そして、進展する亀裂の振動などの興味深い現象を見いだした。しかしながら、複雑な亀裂の挙動のメカニズムについて当時は理解されないうままであった。その後90年代に入って、YuseとSanoはよく制御された条件下でこの実験を行ない、定量的な議論を可能にした [3]。これを契機に、この実験をめぐるいくつかのモデルや理論 [4, 6, 7] が提案されている。

実験の概略は以下のとおりである。十分に薄く縦方向に長いガラス板をヒーターで一旦過熱しながら、ゆっく

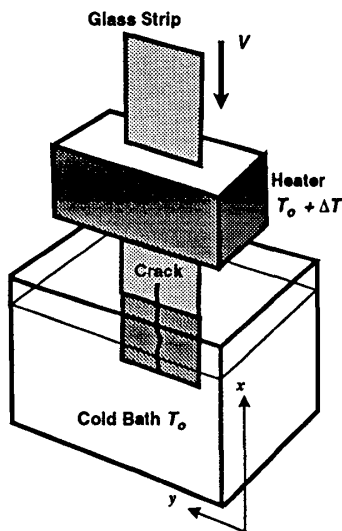


図 2: 熱歪みによるガラスの準静的破壊実験

りとした速度で水中に浸していく。ガラス板の下降速度 V と、ヒーターと水の温度差 ΔT を調節しながら注意深く実験を行なうと、 V と ΔT の増加に伴い、真っ直ぐな亀裂が定常的にガラス中を進行しはじめる。この時、亀裂の進行速度はガラス板の下降速度 V そのものである。これらの制御パラメータを増加させると、直進亀裂が Hopf 分岐して振動を始め、波状の亀裂が見いだされる。さらに、パラメータの増加とともに、不規則な振動、複数亀裂の共存など、多様な亀裂形成が高い再現性をもって観察される。

2.3 準静的破壊のモデリング

計算破壊力学の主な関心事は物体や構造物の強度の見積りであるから、応力分布や応力拡大係数の精密な算出方法がしばしば問題にされてきた。そこで、亀裂による応力集中を効率的かつ正確に計算するために、有限要素法や境界要素法を応用した数値計算法が提案され、多方面で成果をあげている。

これと比較して、進行亀裂の挙動はこの古い研究分野の中でも比較的最近のトピックと言える。亀裂によって生じるパターン形成は、亀裂がある臨界条件を越えて進行を始め、さらに亀裂の運動自身が応力場とカップルして発展するような複雑な過程である。そのような系の振舞いを長時間的に追跡するためには、多少精度を犠牲にしても計算コストを節約できるようなモデリングがふさわしい。そこで、ここでは簡単なバネモデルを用いて、「ガ

ラス割り」の実験をシミュレーションで再構成してみよう [5]。

二次元正方格子上の最近接原子間をバネ定数 k_1 のバネで、次最近接原子間を k_2 のバネで接続したモデル結晶を考えると、バネの変形が十分小さければ結晶は線形弾性を示す。弾性テンソル C_{ijkl} の成分は

$$\begin{aligned} C_{iiii} &= k_1 + k_2, \\ C_{iijj} &= C_{jjii} = C_{ijij} = k_2, \end{aligned}$$

で、残りは 0 であることが簡単な考察からわかる。ただし $i \neq j$ 。もし k_2 が 0 であれば、剪断応力を表現することができないことは直感的にも明らかであろう。バネモデルによって表現される弾性体は本来的に異方性を持つため、ガラスのように弾性的に等方な物質をこの種のモデルによって表現することは容易ではない。しかしながら、 k_1 と k_2 の大きさを変えることによって弾性的な異方性を調節することは可能である。

バネモデルを使うと、熱歪みを直感的に導入できる。温度による非一様性を考慮するために、バネの自然長 a が局所的な温度 $T(x)$ に線形に依存すると仮定する。

$$a(x, y) = a_0(1 + \alpha T(x)) \quad (13)$$

ここで、係数 α が熱膨張率に他ならない。バネは有限長なので、温度は中点の座標によって評価することにした。簡単のため、温度分布は「高さ」方向の位置のみの関数で、 $x = 0$ に「水面」があるとし

$$T(x) = \frac{\Delta T}{2} \tanh(x/\xi) \quad (14)$$

とおいた。ここで ξ は熱拡散長に相当する長さである。実験では、ガラスの上部と下部がそれぞれヒーターと水によって定温に保たれており、これに近い温度分布であろうと予想される。

ここで対象とする系は音速に比べて亀裂の進行速度が非常に小さいと見込まれるため、静的な弾性場を解けば十分よい近似となろう。よって慣性や粘性などの効果はここでは一切捨象する。バネの自然長が決まると、全てのバネに働く力が釣り合うよう、反復法によって配位を決定する。反復法のスキームについては詳述しない。

このようにして得られた各バネの歪の大きさに応じて破壊を進行させる。14式の温度分布を与え、実験と同様に、結晶を僅かずつ x 方向に移動させる。ここでは準静的破壊プロセスを仮定しているので、沈降速度 V は熱拡散長 $\xi = D/V$ として間接的に現れるのみである。一回あたりの移動距離は格子間隔の 1/10 以下とした。もし、

バネに加わる力がある臨界値 f_c を越える場合には、そのバネを切断する(バネ定数を 0 にする)。切断は非可逆的で、ノード間距離が再び接近するような場合があっても再結合はしない。現実的にはいわゆる healing も生じる得るが、亀裂進行が非常に遅くかつほぼ一定速度と見なせることから、このような効果は重要ではないだろう。破壊の条件を満たすようなバネが複数個見いだされた場合には、「加わる力が最大のものを切断しネットワークを緩和させてから再び判定を行う」手続きを、切断されるバネが無くなるまで繰り返す。バネ切りの順序はそれ以後の亀裂の分岐などに影響を与えやすく、特に次節で述べる振動領域ではバネを切る度に応力を緩和させないと横枝が発生しやすくなってしまふ。

以上のモデリングにおいて、弾性定数、熱拡散長などのパラメータは実験系との対応づけが容易であるが、応力拡大係数についてもエネルギー的な考察から推定できる。単位長さあたりの破壊による解放エネルギーは応力拡大係数を使って 11 式で与えられる。一方、常に臨界値 f_c の力でバネは切断されるから、一本あたりの解放エネルギー f_c^2/k と切れたバネの数から dW_{el}/ds が見積られ、よって、臨界応力拡大係数も評価できる。

2.4 バネモデルによる亀裂パターン

実験と同様にして、二次元結晶の下部中央付近のバネを初期亀裂としてあらかじめ切っておく。沈降速度 V に相当するパラメータを大きくしていくと、初期亀裂が定常的に進行を始め、やがて振動や分岐が見られるようになる(図3)。図では切れたボンドのみを描いた。このように、コンピュータシミュレーションによっても直線亀裂と振動亀裂の転移、さらには互いに平行な多数亀裂が再現でき(図中(d),(e))、これらのパターンは定性的には実験的な相図とよく一致する条件で現れる。応力の分布を調べると、熱拡散長は試料の幅に較べ非常に短い(1/10程度)にもかかわらず、亀裂先端付近の応力は縦方向にも試料の幅程度の長さまで渡って分布していることが分かる。すなわち、系の特徴的な長さは熱拡散長には依存しないように見える。

図3(c)のような定常的分岐パターンは、振動領域と多数亀裂領域の中間的なパラメータ領域で得られるが、ガラスの実験ではこれに相当する亀裂パターンは見られない。バネモデルは離散性が強いいため、亀裂面(線)は凹凸したものとなり、新しい亀裂生成に必要なバリアは比較的小さいと考えられる。ガラスなどの非晶質では亀裂面はミクロに見ても非常に滑らかで、新たな亀裂先端を生成するのは容易でない。この亀裂の「核生成」の容易さ

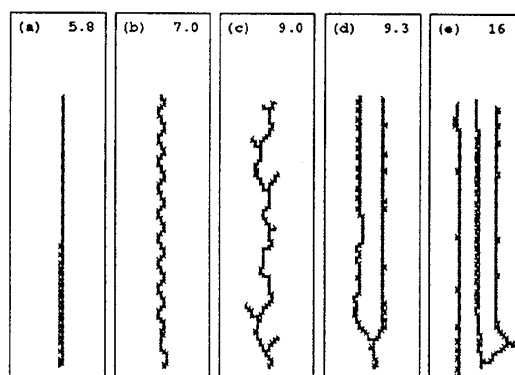


図3: シミュレーションで得られた亀裂。数値は $1/\xi \sim V$ 。

が、定常的な分岐構造の有無を決定する要因であろうと考えている。

バネモデルは非常に異方的であるにも関わらず、亀裂は必ずしも結晶軸に平行には進まず、直進亀裂から振動への転移を見ることができる。このことから、物質の詳細によらず一般的な脆性物質でも振動的亀裂は生じると考えられる。直線亀裂から振動亀裂に転移するパラメータの近傍で亀裂の波長を測定し、実験と同様にして試料の幅に対する依存性を調べたところ、選択波長の試料幅依存性などについても実験とよく一致する結果が得られている。振動のオンセット付近での振幅変化は振動現象の本質を知るうえで重要な情報ではあるが、バネモデルは空間の離散性が強いいためこの種の解析には不利で、現在のところ十分なデータは得られていない。

熱歪みが大きい領域では多数本の亀裂が共存しながら進行し、あらかじめ一方の端でバネをランダム切った状態から始めると、 ξ や ΔT に応じて自然な亀裂間隔が選択されていく(図3(d)(e))。この亀裂の平均的な間隔を λ とおいて、特徴的な亀裂間隔 λ が制御パラメータにどのように依存するかをもう少し詳しく見てみよう。文献[6]にならって二つの独立な無次元パラメータを以下のように定義する。

$$\mu = \frac{\xi}{\lambda} \quad (15)$$

$$R = \frac{\alpha \Delta T E \lambda^{1/2}}{K_I^c} \quad (16)$$

μ は実験パラメータでの速度 V の逆数を、 R は上下の温度差を無次元量で表現したものである。多数に事例についてシミュレーションを行なうと、無次元パラメータの関係には特徴的な二つの領域が存在することが分かる。

熱拡散長に較べて亀裂の間隔が大きい場合には (μ が小), R は μ によらず一定値に漸近する. 他方, μ が比較的大きい場合には, R は μ に比例する. 言うなれば, 熱拡散長 ($\sim 1/V$) が重要である成長様式と, 温度差のみが重要な様式とが存在し, 二つの長さ λ と ξ の比によってこれらの成長様式がクロスオーバーする. 定性的に, このことは, 応力集中が起こる場所が亀裂間隔 λ 程度以下には局在できないという弾性体の性質を反映したもので, 一方向凝固における空間波長選択などでは見られない現象のひとつである.

試料が三次元的な場合には, 温度勾配が集中する場所を外部から制御するような同様の実験は困難である. しかしながら, シミュレーションでは二次元と全く同様にして, 柱状節理のような三次元的亀裂進行を再現することもできる. 図4に三次元モデルでの計算例を示した. 底面が正方形の柱状のバネ結晶を構成し, 初期状態として底面のバネをある程度ランダムに切っておく. そして, 二次元モデルと同様に温度勾配が局在する領域を移動すると, 初期には多数の亀裂が現れるが, 次第に亀裂によって柱がセル状に分かれ, 柱状節理のような構造となる. 岩石の柱状節理では六角柱が有名であるが, シミュレーションでは結晶の異方性を反映して奇麗な蜂の巣構造にはなりにくい. しかしながら, 亀裂面とおしは互いに反発する傾向があるため, 切断面の角形分布は5ないし6が多く選ばれる傾向にある. 二次元の場合と同様にして特徴的な亀裂間隔 (すなわちセルの平均サイズ) を求めると, 定性的には二次元の場合と同様の選択性のあることがわかった.

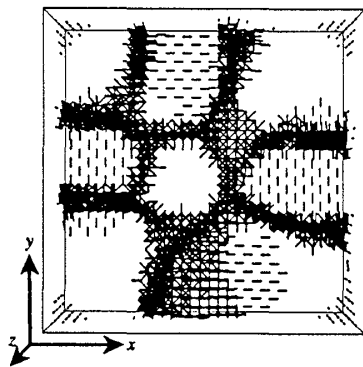


図4: 「柱状節理」形成のシミュレーション. 「上」から見た図.

温度勾配のある領域が一定速度で移動するのではなく, 熱が拡散方程式に従って運ばれるようなシミュレーション

では, 柱状構造を見る事はできず, 熱拡散に伴って亀裂が物体内部に「浸透」し, 亀裂間隔は徐々に広がっていく. このことを考えると, 柱状節理が数十メートルの高さに渡って奇麗な平行線を呈するのは何とも不思議であって, その成因は興味深い.

2.5 ゆっくり進行する亀裂の理論

では, これまでみてきたような遅い亀裂の進展はどのような理論的な枠組みで理解できるのであろうか. 亀裂の平衡条件は式12で与えられている. 亀裂の進展が物体内部の音速に較べて十分遅ければ, 亀裂は常に平衡位置に留まっていると考えられるので, 式12が常に満足されるように亀裂の経路を決めることができれば, 振動を含む亀裂パターンは説明できそうに思われる.

そこで, 熱歪みと亀裂を含む境界条件を考慮して亀裂先端部分の弾性場を求め, 応力拡大係数から亀裂進展の条件を評価することがまず必要である.

ガラスの実験に関連した理論的解析はいくつか報告されているが, ここでは比較的最近の Adda-Bedia と Po-meau の議論 (1995) のアウトラインを追ってみよう.

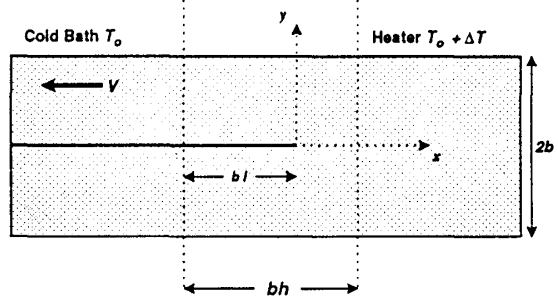


図5: 無限に長いガラス板試料

幅 $2b$ で x 方向に無限に長い二次元平板上に図5のように座標を設定し, b を長さを単位にすると, 境界条件

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, \pm 1) &= \sigma_{xy}(x, \pm 1) = 0, \\ \sigma_{ij}n_j &= 0 \quad (\text{亀裂上で}), \\ \sigma_{ij} &= 0 \quad (x = \pm \infty) \end{aligned} \quad (17)$$

のもとに, 8式から弾性場を解くことができる.

ここでは温度場を

$$T(x) = (1 - e^{-P(x+\ell)})\theta(x + \ell) \quad (18)$$

で近似する。ここで、 $P = bV/D$ は無次元化された熱拡散長、 $\theta(x)$ はヘビサイト関数。また、水面から亀裂先端までの距離を ℓ とおき、亀裂先端で $x = 0$ であるような座標を考えることにする。

まず、板の中央部を直線的な亀裂が走る場合を考えよう。この時、問題の対称性から、境界条件として

$$\sigma_{xy}(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 0 \quad (x \geq 0), \quad (19)$$

を課してよい。これらの境界条件のもとに、応力関数を計算する。式 17, 19 を x 方向にのみフーリエ変換し、 x 方向の空間波数を k とすると、中心軸上での応力はそれぞれ

$$\hat{\sigma}_{yy}(k, 0) = -F(k) \hat{u}_y(k, 0) + D_\ell(k), \quad (20)$$

$$\hat{\sigma}_{xx}(k, 0) = H(k) \hat{\sigma}_{yy}(k, 0) + S_\ell(k). \quad (21)$$

ここで $F(k), H(k)$ は境界条件を満足するような k の関数、 $D_\ell(k)$ と $S_\ell(k)$ は温度場のフーリエ変換と k に依存する。詳細は文献 [7] を参照のこと。上式が解かれれば亀裂先端部での応力場と K_I が評価できるが、変位 $u_y(x, 0)$ は $x > 0$ 上でしか境界条件として与えられておらず、一方で $\sigma_{yy}(x, 0)$ については $x < 0$ でのみ与えられている。

このような場合には、解析関数の性質を巧く応用した Wiener-Hopf の方法が有効である。 $\sigma_{yy}(x, 0) = 0$ ($x < 0$) に注意すると、 $\hat{\sigma}_{yy}(k, 0)$ は $\text{Im}(k) > 0$ の領域では特異点を持たないことが分かる。同様に $\hat{u}_y(k, 0)$ は $\text{Im}(k) < 0$ で特異点を持たない。ここで、20 式で $F(k)$ を $F(k) = F^-(k)/F^+(k)$ と分解する。 $F^+(k)$ は $\text{Im}(k) > 0$ で特異点や零点を持たない関数、 $F^-(k)$ は $\text{Im}(k) < 0$ で同様の性質の関数である。すると、XX 式は

$$F^+(k) \hat{\sigma}_{yy}(k, 0) = -F^-(k) \hat{u}_y(k, 0) + F^+(k) D_\ell(k), \quad (22)$$

と変形できる。両辺を $\text{Im}(k) > 0$ の上半円周で積分してみると、 $F^+(k) \hat{\sigma}_{yy}(k, 0)$ の項はこの積分には寄与しない。よって、

$$\hat{u}_y(k, 0) = \frac{F^+(k) D_\ell(k)}{F^-(k)} = \frac{1}{F^-(k)} \int_{-\infty}^0 dx g_I(x + \ell) e^{ikx} \quad (23)$$

と書いてよい。ここで、

$$g_I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} D_0(k) F^+(k) e^{-ikx}. \quad (24)$$

亀裂近傍での変位 u_i が $u_i \sim K_I \sqrt{r}$ のように振る舞うことから、 $x = 0^-$ 近傍での変位の漸近的挙動を考察すると、

$$K_I = g_I(\ell) \quad (25)$$

が得られる。

無次元化した弾性エネルギーを \tilde{W} とすると、熱応力による弾性エネルギー W_{el} は

$$W_{el} = Eb^2 \alpha^2 (\Delta T)^2 \tilde{W}, \quad (26)$$

と書くことができる。 $-d\tilde{W}/ds = K_I^2$ なる関係より、水面からの距離が ℓ であるような直線亀裂では、弾性エネルギーは

$$\tilde{W} = \tilde{W}_0(P) - \int_{-\infty}^{\ell} dx g_I^2(x) \quad (27)$$

と与えられる。ここで $\tilde{W}_0(P)$ は亀裂のない状態での弾性エネルギーで、解析的に計算できる。この式からエネルギーは ℓ とともに単調に減少することが分かる。

以上の結果に、亀裂の釣り合いの条件を当てはめると、 ℓ に関して最大の $K_I(P, \ell)$ を $K_I^{(s)}(P)$ として

$$\frac{1}{K_I^{(s)}(P)} = \alpha \Delta T \sqrt{\frac{Eb}{\Gamma}}, \quad (28)$$

が亀裂なしと直線亀裂の転移線を与える。

次に、複数本の直線亀裂が進展する場合について考えてみよう。幅が b であるような板が一枚の場合と、幅が $b/2$ の板が二枚の場合の弾性エネルギーの差

$$\Delta \tilde{W} = \tilde{W}_0(P) - 2\tilde{W}_0(P/2)$$

を考える。ここで仮想的にある特徴的な長さ L_c を導入すると、板を二つに分かつような直線亀裂の進展条件は

$$Eb^2 \alpha^2 (\Delta T)^2 \Delta \tilde{W} \sim \Gamma L_c. \quad (29)$$

と書けるであろう。ここで、 \tilde{W}_0 の漸近的な振る舞いから

$$\Delta \tilde{W} \sim P^2 \quad (P \ll 1), \quad (30)$$

$$\Delta \tilde{W} \sim 1 \quad (P \gg 1) \quad (31)$$

が容易に示せる。また、計算モデルの説明でも述べたように、これらいずれの場合も $L_c \sim b$ と考えられるため、

$$b^3 (\Delta T)^2 V^2 \sim \text{Const.} \quad (P \ll 1), \quad (32)$$

$$b (\Delta T)^2 \sim \text{Const.} \quad (P \gg 1) \quad (33)$$

であるような条件で亀裂が進展すると予想される。直線亀裂が n 本走るような場合でも、上記の考察はそのまま適用でき、 b を亀裂間隔 λ と読み替えると、シミュレーションで得られた亀裂間隔の選択則とよく一致していることが分かる。

次に、振動亀裂を考察してみよう。試料の中心部をはしる亀裂の形状が、小振幅 A によって

$$y(x) = A \sin \omega x + O(A^3) \quad (34)$$

で表現されるとき、亀裂周囲の応力と変位は

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + A s_{ij} + A^2 t_{ij} + O(A^3), \quad (35)$$

$$u_i = u_i^0 + A v_i + A^2 w_i + O(A^3) \quad (36)$$

と展開できるであろう。対称性から、 A の偶数次の項がモード I の変形のみに関係し、 A の奇数次の項はモード II の変形のみに関係することは明らかである。

一般に、亀裂先端の応力にモード II の成分が含まれる場合に、その状態から割れ始める亀裂は $K_{II} = 0$ が実現される方向に進展すると考えられている（応力場の local symmetry）[8]。したがって、亀裂が直線からわずかに傾いている場合、もし K_{II}/A が正であれば、亀裂先端は亀裂の傾き $|y'(0)|$ を減じる方向に亀裂は進展し、 $K_{II}/A < 0$ では傾きがさらに増大すると予想される。すなわち、直線から振動亀裂への転移は、亀裂の直線からの僅かなずれによって生じるモード II の応力が深く関係するのである。よって、振動亀裂の場合は、直線亀裂とは異なり、亀裂先端での応力場の対称性 ($K_{II} = 0$) をあらかじめ仮定することはできない。

34式の摂動が進展するかどうかの臨界条件は、亀裂先端でのモード II の応力拡大係数により

$$K_{II}(P, \ell, \omega) = 0, \quad \frac{\partial K_{II}}{\partial \omega}(P, \ell, \omega) = 0, \quad (37)$$

で与えられる。紙数が限られているため、詳細は文献を参照していただくことにして、モード II についても応力拡大係数と弾性エネルギーの ℓ と A 依存性が評価でき、数値的に直線亀裂と振動亀裂の境界、およびその際選択される波長が求められている。

以上のように、直線亀裂から振動亀裂への転移は従来の破壊力学の枠組みでは理解可能と思われる。しかし、実験で見られる振動亀裂は、その波形が正弦関数からは著しく歪んでいたり、カオス的で不規則な振動が観察されたりと多様であるし、場合によっては亀裂が枝分かれする可能性もある。このような、所謂「非線形領域」の亀裂については、ほとんど理解されていないと言ってよい。

2.6 音速程度の亀裂

ガラスをへし折ったり、大掛かりな装置で引きちぎったりする場合、亀裂は物体の音速程度の速度で進行し、

もはや準静的な枠組みは適用できない。このような速い亀裂の進展は、Swinney らのグループの実験 [9] などを契機に物理学者の関心を集めるようになり、いくつものコンピュータシミュレーションや理論研究が報告されている。

切り欠きを入れた板の両側を引っ張って亀裂の進展を調べる実験を行なうと、負荷が小さい状態では亀裂の進展は見られないが、これまでの節で述べたような亀裂の平衡条件が破れると、亀裂はある速度 V をもって進展する。ここで V は外部からは制御不可能で、かつ一定でもない。 V が比較的小さいときに亀裂は直進するが、 V がある大きさを越えると直線的な亀裂は不安定となり、亀裂面は非常に荒れた形状となる。

連続で等方な弾性体中の微小変位を、スカラー場 ϕ の勾配とベクトル場 ψ の発散を用いて

$$\vec{u} = \nabla \phi + \nabla \times \psi \quad (38)$$

と書き直すと、 ϕ と ψ の発展方程式は

$$\begin{aligned} c_d^2 \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= 0, \\ c_s^2 \nabla^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla \cdot \psi &= 0, \end{aligned} \quad (39)$$

で表現される。ここで、 c_d は物体の膨張変形の伝搬速度、 c_s は剪断変形の伝搬速度である。これらの速度の比はポアソン比の関数である。

連続的近似による速い亀裂の進展は、亀裂の存在するような初期条件と境界条件のもとで、これらの方程式から弾性場の変化を評価すれば良いが、完全に閉じた問題設定をおこなうためには、何らかの亀裂の進行条件ないし亀裂の運動方程式が必要である。破壊条件として現在提案されているのは、亀裂の生成エネルギー Γ と亀裂先端に流入する弾性エネルギーの釣り合い条件

$$W(V) = \Gamma \quad (40)$$

で、これは亀裂の平衡条件 (Irwin の関係) の拡張と考えることができる。種々の場合について、弾性論により W の評価を行なってみると、亀裂の進行速度 V に対して W は単調に減少し、 V が自由表面での弾性表面波の音速 V_R に一致するときに $W = 0$ となるような関数が得られる。このことは、亀裂の進展速度 V の理論限界が V_R であることを示す。しかしながら、実験的に得られる亀裂の進行速度は V_R の高々数分の一程度であって、しかも速度や進行方向は必ずしも一定ではない。亀裂速度の選択則や

亀裂の安定性については、まだ理論的にも未解明の部分が多い。

高速破壊のコンピュータシミュレーションの多くは古典的な分子動力学法を用いて行なわれており、最近では一億原子相当にも及ぶ大規模な三次元系も扱われるようになってきている [10]。こうしたモデルに基づいた数値シミュレーションでも実験に近い振る舞いが再現されており、特に最近のシミュレーションでは、亀裂の進展に伴い、亀裂先端部から次々と格子欠陥が生成されループ状に周囲に放出される様子が捕らえられている。こうしたシミュレーションでのダイナミックな欠陥の生成と、亀裂先端に可塑領域を仮定した理論的解析 [11] とは、近い将来に互に関連付けて議論できるようになるかもしれない。

3 衝撃によってモノはどの様に碎けるか

3.1 様々な衝突過程と破片の統計性

硬い物体が衝突などによる衝撃的な外力によって碎ける現象を、我々はよく目にする。大きいスケールの例として、宇宙に無数に漂っているであろう小惑星に注目してみよう。それらはかつてその母天体の破壊によって形成されたと考えられており、まさに星の破片と考えられる。それらの多くは火星と木星の間の軌道にあり、小惑星帯(アステロイドベルト)を形成しているのは御存じの通りである。

この種の破壊では、個々の亀裂の運動よりも、生成された破片の性質が問題となるケースが多い。そこで、ここでは破片の累積質量分布関数について考察してみよう。まず、破片(小惑星)を質量の大きい順に並べ換え、大きい順に1から番号をふる。質量を横軸に、その番号を縦軸にプロットすれば累積質量分布が得られる。質量分布関数 $n(m)$ を使うと累積分布 $N(m)$ は

$$N(m) = \int_m^{\infty} n(m') dm' \quad (41)$$

と定義できる。データのばらつきの影響を受けにくく、統計的な傾向を把握しやすいため、実験結果の解析には分布関数よりも累積分布の方が良く使われている。質量の代わりに物体のサイズ(直径など) s の累積分布関数を用いる場合も多いが、単純な形状の均質な物体では $m = cs^d$ であるので(ここで d は空間次元)、サイズ分布と質量分布に本質的な差はない。

各種観測によって知られている小惑星の累積質量分布をグループ毎にとると、それらがべき乗関数

$$N(m) \sim m^{-b} \quad (42)$$

でよく表現されることは比較的古くから知られていた。しかも興味深いことに、べき指数 b の値はでたらめではなく、 $2/3$ に近い値を取るグループと $5/6$ に近い値を取るグループに大きく分けられると報告されている [12]。例えば、Fujiwara は Themis, Eos, Koronis と呼ばれる族(これらは軌道の特徴による分類である)についてサイズ分布を調べ、Themis と Koronis 族は b が $2/3$ に近いのに対して Eos 族では $5/6$ に近いとのデータを得ている [13]。同じグループに属する小惑星は同じ母天体由来の破片であると考えられるから、この結果は壮大な衝突実験の結果生じた破片の分布の傾向であると解釈することができる。

累積質量分布がべき乗関数になる場合には、累積サイズ分布関数もべき乗関数 $N(s) \sim s^{-b'}$ となる。ここで言うサイズは、小惑星の径を考えればよい。一様な物体を仮定すると、累積質量分布の指数を b と累積サイズ分布の指数を b' の間には $b = b'/d$ なる関係があることは簡単に示せる。実際の観測結果の解析には、サイズ分布が使われることも多い。

衝撃破壊は実験室レベルでも比較的容易に試してみることができる。衝突破壊実験は、岩石や氷、ガラスなどの標本に高速の物体を衝突させる、あるいは標本を硬い壁に衝突させる方法で行われ、その際に標本全体が飛散しないようゲルなどで覆って生成された破片の回収率の向上が図られる場合もある。こうして得られる破片の累積質量分布は、多くの場合にべき乗的であって、実験によりかなりのばらつきはあるものの、指数 b が小惑星と同じく $2/3$ に近い値を取る報告例が多い。

ここでは、デンマークの Oddershede らが行った興味深い実験を紹介しよう [14]。彼らは、試料となる物質の種類、および物体の形状を様々に変えて衝突破壊の実験を行い、その分布を調べた。試料を固い床の上に落とすだけの非常に簡単な実験ではあるが、得られる質量分布が非常に綺麗なべき乗形を示す。試料として一週間程度固めた石膏を使い、立方体ないし球に近い形状の試料については $b = 2/3$ に非常に近い値を得ている(図2参照)。さらに、ジャガイモ、石けん、パラフィンを凍結させた試料についても同様の実験をし、結果が物質に依存しないことを確かめた。ところが、指数は試料の全体的な形状には依存性を示し、辺の長さが A, B, C であるような直方体の落下実験で得られる指数は

$$b = 2(AB + BC + CA)/(A^2 + B^2 + C^2) \quad (43)$$

という実験式でよく近似できると報告している。そこで彼らは、衝撃伝搬の様式によって、指数そのものが変わり得るのではないかと考察した。

ところがその後、デンマークの他のグループが同様の実験を行い、指数は43式で与えられるように物体の形状に関して連続に変化するのではなく、試料の次元性だけに依存すると主張した [15]。すなわち、アスペクト比の大きな試料を使うと、累積分布関数に折れ曲がりが見られ、異なる分布形のクロスオーバーが見られる。つまり、指数が一見連続的に変化するのは、分布関数のオーバーオールな勾配を測定したことによる可能性が高い。このことはまた、指数が試料の次元性だけに依存するという、ある種のユニバーサリティを持つ可能性をも示唆している。

3.2 破片生成のシナリオ

生成される破片の性質は壊される前に物体に仕込まれていた性質を反映している可能性もあるし、あるいは衝撃による歪みの伝搬や壊れ方等のダイナミクスに何か特徴があるのかもしれない。ここではまず、二つの比較的単純な確率的破壊のシナリオとその結果生じる破片の分布から考察してみよう。

まず、今世紀半ばにコルゴモロフが提案したシナリオを考えよう [16]。物体になんらかの衝撃力が加わると、大きな歪みを生じた箇所がまず壊れるであろう。その時、その位置はランダムであると仮定する。強い歪みが継続すれば、第一段階で生成された断片の中でも同様な破壊が繰り返して進行し、やがて小さな破片の集合が生成されるであろう。簡単のため一次元系を考えると、この結果生じる破片のサイズ(長さ)分布は対数正規分布となることが中心極限定理を使って示すことができる。Ishiiらは金属管中に長いガラスロッドを入れ、高所から硬い床に落下させる実験を行い、回収したガラス片の質量分布を調べた [17]。この実験では、落下による衝突でガラスロッドが幾度にもわたり繰り返して折られると考えられ、状況はコルゴモロフのシナリオに近い。事実、比較的大きなサイズの破片については、対数正規分布が実験結果を良く再現すると報告されている。

二つ目のシナリオは、マイクロクラックのランダムな活性化である [18]。どのような物質でも、その内部には無数の欠陥が存在し、物質の強度はそうしたマイクロクラックに大きく左右される。事実、マイクロクラックを考慮せずに原子間の結合のみから物質の強度を見積もると、現実の物質と比較して遥かに大きな値になってしまうと言われている。こうしたマイクロクラックがあらかじめ物質内に分布すると仮定しよう。衝撃を契機にしてこれらの小さな亀裂がランダムに活性化し、大きな亀裂に発展し破壊に至る様なプロセスを考えると、ある長

さの中で活性化される亀裂数はポアソン分布に従うため、結局サイズ(長さ)分布は指数分布となる。指数関数型の分布関数は、金属等に急激な負荷を一様に加える実験等で実際に見られている。例えばMottらが提案した分布関数 $n(m) \sim \exp(-cm^{1/d})$ (Mott分布) は岩石や金属を粉碎する実験の結果をよく再現する。このシナリオが成立するためには、マイクロクラック分布の一様性だけでなく、負荷も一様に加えられるという条件が必要である。

いずれにせよ、こうした全くランダムな破壊プロセスは衝撃破壊のモデルとしては単純すぎる様に思えるし、我々が期待するようなべき乗則も見いだし難い。では、衝撃破壊はどのようなプロセスを経て進行するのだろうか? 衝撃破壊は三次元的でしかも音速程度で進行する高速な現象であるため、実験的にその詳細を捕らえることは容易ではないが、高速度撮影装置などを駆使してその動的過程を直接測定する試みが行われている。ガラスを使った実験によると、加えられた衝撃により発生した歪みは圧縮波として試料を進行するが、それより遅れて亀裂発生が局在する領域が平面波的にほぼ等速度で進行する様子が観察されている [19]。こうした領域は failure wave と呼ばれており、failure wave の通過後に破片が飛散し始める様子が捕らえられている。failure wave は衝突破壊のみならず爆破に際しても観察されている。こうした知見から、音速程度の速いダイナミクスが重要らしいこと、亀裂生成は物体内で一様に生じるのではなく「破壊面」とでも呼べる面上に局在すること、が理解の鍵になると思われる。

3.3 動的破壊のモデル

高速度カメラの撮影などによって破壊進行の素描は得られるものの、実験的な制約を越えた理想系に近い実験としてのコンピュータシミュレーションは非常に有力な研究手法であることは言うまでもない。ここでは高速破壊の数値シミュレーションの例として、最近筆者が行った簡単なバネモデルによるモデリングとその計算例を紹介しよう [20]。

まず壊されるべき物体を以下のような簡単なモデルで記述してみる。まず考慮せねばならないのは、物体の慣性と弾性である。準静的破壊の場合と同様に、数値シミュレーションも容易な「バネモデル」をここでも採用してみよう。質量 m の質点が三次元立方格子状に配置されており、それぞれ六つある最近接と第二最近接どうしの質点がバネで結ばれている。すなわち、原子 i の位置を \vec{r}_i と

すると、原子間力を

$$\vec{F}_i = \sum_{j \in n.n.} k_1 \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} (a_1 - |\vec{r}_i - \vec{r}_j|) + \sum_{j \in n.n.n.} k_2 \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} (a_2 - |\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (44)$$

で与える。なお、この場合、それぞれのバネは線形であるものの、歪みが大きい領域では歪みと応力は非線形である。

現実の物体は、高速な変形に対してある程度のエネルギー散逸が伴うと考えられるため、ここでは各バネにダッシュポットを付加し、相対速度に比例した抵抗力が発生すると仮定した。各原子の運動方程式は

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\gamma \sum_{j \in n.n.n.} (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) + \vec{F}_i + \vec{F}_i^{ext}. \quad (45)$$

破壊の条件は、準静的破壊と同様である：「もしある時刻でのバネの伸び Δl が、限界的な長さ Δl_c を越えたら、そのバネを切断する。一度切れたバネは、二度ともとは戻らない。」ここで、 Δl はバネの自然長の 10% 程度に設定した。この破壊のルールに従うと、物体が割れた後には割れ目同士は互いに影響を及ぼさないし、破片同士が出会っても衝突せずにすり抜けてしまう。これは一見非現実的に思えるが、実は破片生成に関しては本質的ではない。

初期条件として、大きな変位ないし速度をモデル結晶の表面に加え、それぞれの質点をニュートンの運動方程式に従って時間発展させると、内部に歪みが伝搬し、破壊条件を満たすバネは非可逆的に切れる。図 6 は $33 \times 33 \times 33$ 個の質点からなる立方体の、向かって左側の面に瞬間的に力を加えて破壊させた例である。こうした一連の過程は、初期条件として与える若干のランダムネスを除けば全く決定論的に進行するが、結果として得られる破片の対称性は低い。進行する亀裂には不安定性が内在するため、決定論的な破壊のルールであっても結果は十分に複雑になり得るのである。

衝撃による破壊の進行をシミュレーションで観察すると、実験からは得にくいであろう情報も容易に解析できる。この系ではモデル結晶内にはマイクロクラックは仕組まれていないため、新たな亀裂の生成によって破壊は進行する。亀裂が生成される位置は、ごく薄い層を成して面状に局在し、それが結晶の縦波の音速程度で走り抜ける。これは前節の failure wave に相当すると思われる。モデル結晶にインパクトが与えられてから粉々に碎けるまでの間は、おおまかに言って幾つかの特徴的な段階に

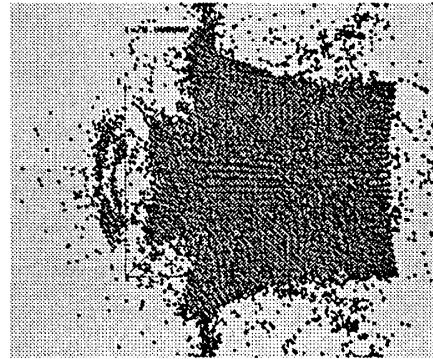


図 6: 衝撃破壊の三次元シミュレーション例

分けられる。(i) 試料の表面にインパルス的な負荷が与えられ、破壊が始まるまで、(ii) 亀裂の生成面が音速程度で試料内を移動し、試料の他端に到達する間、(iii) 破片が飛散する最終的な段階。最終的に切れるバネの総数のうち、その大部分は(ii)の段階で既に切れてしまう。つまり、物体の各所はヒビだらけの状態になっている。段階(iii)では、亀裂の入った物体が、僅かに残った接合点を引きちぎりながら飛散する。数値的にエネルギー収支を調べると、衝撃によって得たエネルギーのうち殆ど(95%以上)は生成された破片の運動エネルギーに転化している。

破片同士の二次衝突過程が一切考慮されていないなど、かなり単純化されたモデルによるシミュレーションではあるが、これらは実験的な知見をよく再現している。しかも、破片の累積質量分布を調べると、最終的にべき乗関数の裾がはっきりと現れ、べき指数は $2/3$ に非常に近い値を取る。

3.4 べき乗則

では、べき乗的な質量分布はどのようにして生じるのであろうか?十分に大きい試料の一端に衝撃を加えて破壊実験を行った場合、これまで述べた知見から、破壊面は音速程度で試料内を進行し、それが通過した部分では骨格となる亀裂がすでに出来上がってしまうと考えられる。そこで、破壊を破壊面上で発生した亀裂による物体の分割過程としてとらえよう。Inaokaらはこうした点に着目し、三次元衝撃破壊を擬二次元 + 一次元系に単純化したモデルを考案し、シミュレーションによって奇麗なべき乗分布を得ており、さらに安定分布の議論からべき指数 $b = 2/3$ を導出している[21]。これは、亀裂の浸透

(パーコレーション)とも言える視点である。パーコレーションの問題では、サイトやボンドの占有確率をある臨界値にとると、連結クラスターのサイズ分布がべき乗分布に従うことが知られている。ところが衝突破壊においては、占有確率に相当するパラメータは外部から制御されているわけではなく、むしろ系が自らを臨界的な状態に調整した結果べき乗分布が達成されてされている(自己組織臨界現象)と見ることもできる。しかしながら、そのメカニズムについてはまだ十分に明らかにされていない。

ここではべき乗分布をまず仮定して、現象論的に質量分布関数のべき指数を導出してみよう [20]。ここで破壊面の移動距離を L とする。十分大きな試料を考えると、歪みの伝搬距離は L 程度であり、弾性振動を特徴付けるマクロな長さも L のみとなる。破壊面の「厚み」は十分時間が経過した後では L に較べて無視できであろうし、また原子スケールの現象がマクロな破壊プロセスに直接影響するとは考えにくい。つまり、唯一 L がこの系のマクロな長さのスケールを規定する。そこで、破壊面が通過してしまった場所(距離が L より十分小さい範囲)では分布関数はべき乗的に、破壊面がまだ通過していない部分では破片が生じないことを考慮して、質量分布関数 $n(m, L)$ を以下のように書いてみる。

$$n(m, L) = m^{-\beta} f(L/m^\gamma) \quad (46)$$

ここで $f(x)$ は $x \gg 1$ で 0 , $x \ll 0$ で定数になるようなクロスオーバー関数である。系の唯一の長さのスケールは L であるから、これは破片の特徴的な長さ(最大破片サイズ)もまた L 程度であることを意味する。したがって、破片が単純な形状である限り $\gamma = 1/d$ でなければならない。

破壊面が L だけ進行した場合に、すでに壊れてしまった部分の質量は、分布関数の定義から

$$M(L) = \int_0^\infty m n(m, L) dm \quad (47)$$

である。変数変換により、上記の積分の L 依存性は

$$M(L) \sim L^{d(2-\beta)}$$

であることが分かる。一方で、破壊面が平面波で進行する場合には $M(L)$ は L に比例しなければならないので、両者の指数を比較すると

$$\beta = 2 - 1/d \quad (48)$$

なる簡単な関係式が得られる。三次元 ($d = 3$) では $\beta = 5/3$, 累積分分布が分布関数の積分であることを思い出すと、

累積分分布の指数 $b = \beta - 1 = 2/3$ が得られる。以上の議論は破片の総和が壊れる前の質量に等しいということを表現したにすぎず、物理的な論点はマクロな特徴的な長さが L のみであるということだけである。すなわち、ジャガイモも岩石も、同じように壊れる限り、同じ指数の値を持つべき理由がここにある。この結果は質量分布が試料の次元性 d に依存しており、試料の形状によって異なる質量分布の指数が得られるという実験結果 [14, 15] をよく反映している。

指数 β は破壊面の広がり方には依らないのであろうか? 破壊面が円筒状の試料の中心軸から円筒状に広がるケースを考えると、上の議論で $M(L)$ は L^2 に比例すべきであって、同様に指数の比較を行うと、 $\beta = 4/3$ が得られる。また、球面状の破壊面の場合は $\beta = 1$ となるべきである。このことは、破片の質量分布が試料の次元性ととも、波面の広がり方、すなわち衝撃の加え方にも強く依存する可能性を示唆している。事実、岩石や氷などの破壊実験においては β の値が条件によって大きくばらつく事例もあり、シミュレーションにおいても衝撃の与え方がべき指数に大きく影響することが分かっている。

4 おわりに

かなりの駆け足で、準静的な破壊から衝撃破壊までを、サブゼミ講師のかなり偏った知識を基に概観してみた。ここまで読み進まれた方は、導入部で述べた素朴な疑問にこのテキストは何も答えていないことに気づかれたことだろう。実際のところ、亀裂の運動が関係するような現象については、物理的に十分明解な描像はまだ得られていない。この夏の学校の参加者の中から「破壊」に挑む者が現れることを願って、この小文を終わりたい。

参考文献

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz: *Theory of Elasticity* (Pergamon, N.Y., 1959).
- [2] L. B. Freund: *Dynamic Fracture Mechanics* (Cambridge Univ. Press, N.Y., 1990).
- [3] A. Yuse and M. Sano: *Nature* **362**, 329 (1993).
- [4] M. Marder: *Phys. Rev. E* **49**, R51 (1994).
- [5] Y. Hayakawa: *Phys. Rev. E* **49**, R1804 (1994); *Phys. Rev. E* **50**, R1748 (1994).
- [6] S. Sasa, K. Sekimoto, and H. Nakanishi: *Phys. Rev. E* **50**, R1733 (1994).
- [7] M. Adda-Bedia, and Y. Pomeau: *Phys. Rev. E* **52**, 4105 (1995).

- [8] B. Cotterell and J. R. Rice: *Int. J. Fract.* **16**, 155 (1980).
- [9] J. Fineberg, S. P. Gross, M. Marder, and H. L. Swinney: *Phys. Rev. Lett.* **67**, 457 (1991); *Phys. Rev. B* **45**, 5146 (1992).
- [10] V. Bulatov, F. Abraham, L. Lubin, B. Devincre, and S. Yip: *Nature* **391**, 669 (1998).
- [11] E. S. C. Ching, J. S. Langer, and H. Nakanishi: *Phys. Rev. E* **53**, 2864 (1996).
- [12] J. Klačka: *Earth, Moon and Planets* **56**, 47 (1992).
- [13] A. Fujiwara: *Icarus* **52**, 434 (1982).
- [14] L. Oddershede, P. Dimon, & J. Bohr: *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3107 (1993).
- [15] A. Meibom & I. Balslev: *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2492 (1996).
- [16] A. N. Kolmogoroff: *Doklady Akad. Nauk. SSSR* **31**, 99 (1941).
- [17] T. Ishii & M. Matsushita: *J. Phys. Soc. Jpn.* **61**, 3474 (1992).
- [18] D. E. Grady & M. E. Kipp: *J. Appl. Phys.* **58**, 1210 (1985).
- [19] N. S. Brar & S. J. Bless: *Appl. Phys. Lett.* **59**, 3396 (1991).
- [20] Y. Hayakawa: *Phys. Rev. B* **53**, 14828 (1996).
- [21] H. Inaoka & H. Takayasu: *Physica A* **229**, 5 (1996).