N-River Meander Problem

北里大学 理学部 物理学科 守 真太郎[1]

メアンダー問題とは無限の長さの川に対し $2n$ 個の橋をかけ、自己交差しない k 本の道で結ぶすべての場合の数であり、M_n^k と書くものとする。また、セミメアンダーとは、半無限の長さの川に対し n 個の橋をかけ、メアンダーと同様自己交差せずに、k 本の道で結ぶすべての場合の数であり、SM_n^k と書くものとする。この数え上げの問題は、物理的には自己排除ポリマーの配位の数え上げの問題とも関連しており、近年さかんに研究されつつある。我々は、メアンダー問題の数学的な拡張として N-River Meander を考え、計算機を用いて解析を行なった。

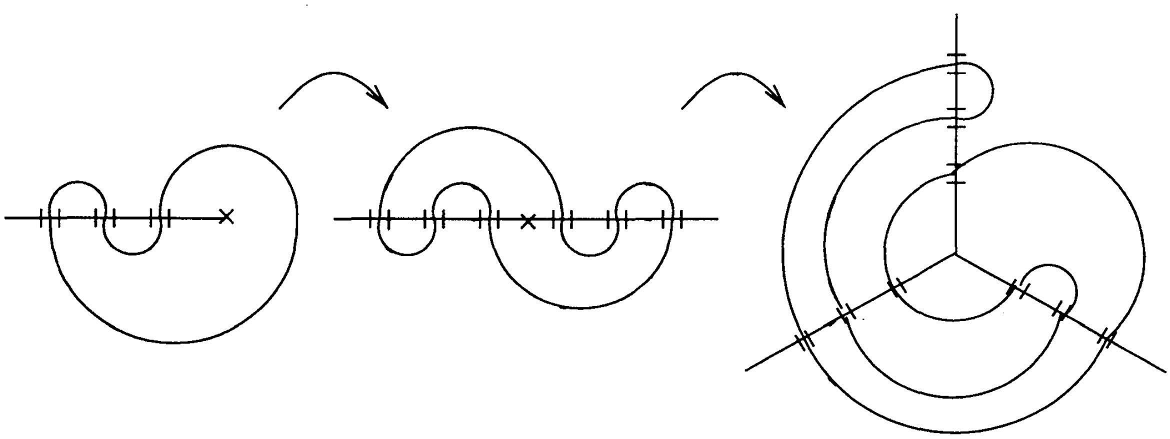

図 1: N リヴァーメアンダーの定式化の流れ:川に 3 本の橋が架かっている場合

まず、セミメアンダーは池から半無限の長さの川が流れ n 個の橋が架かっている場合、メアンダーは無限の長さの川に $2n$ 個の橋が架かっている場合であった。これは n 個の橋を持った半無限の川が池から 2 本流れていると思うこともできるであろう。そうすると、N リヴァーへの拡張は、池から n 個の橋を持った半無限の川が N 本流れている場合というのが自然である。

この問題を数値的に解析する手順はつぎのようなものである。まず、1 : $2n$ 本の橋に対してアーチを構成する。2 : メアンダーの構成。図 2 のように、各領域であらゆる種類のアーチを考え、それらを組み合わせて N-River メアンダーを作る。3 : メアンダー数の計算。2 で構成したメアンダーにある道の数を数える。図の場合なら、道の数は 1 本である。

以下に 3 リヴァーメアンダーのテーブルの一部を示す。

[1] e-mail:mori@jet.sci.kitasato-u.ac.jp and http://hokusai.sci.kitasato-u.ac.jp/mori/index.html

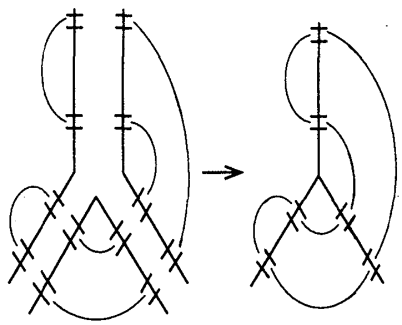

図 2: アーチの組み合わせからメアンダーを構成する:3 リヴァーの場合

表 1: The numbers T_n^k of inequivalent Three-river meanders of order n with k connected components for $1 \leq n \leq 5$, obtained by exact enumeration on the computer.

k \ n	1	2	3	4	5
1	1	3	26	318	5362
2	0	4	54	895	18060
3	0	1	37	949	24645
4	0	0	8	469	17536
5	0	0	0	105	6916
6	0	0	0	8	1444
7	0	0	0	0	125

こうして得られた表をもとにメアンダーのエントロピーを評価する。M_n^N で N-River Meander の種類の数を表すものとし、また道の数は 1 本と固定する。$(k=1)$ すると、橋 1 個あたりのエントロピーは、次の式で定義される。

$$S(N) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log M_n^N \tag{0.1}$$

我々の求めた表（$1 \leq N \leq 6 and n = 11 - N$）により計算すると、

$$S(N) \sim S(1) \times N \tag{0.2}$$

の振舞を示す。

以上が、数値的な解析の結果である。残された課題として、こうした数値的な結果を理論的に解析することがあるが、セミメアンダーの場合なら漸化式的な解析が有効であることが知られているが、$N \geq 2$ ではそれもうまくいかず、課題は多い。また、物理的な応用、特に高分子の折り畳み経路の記述やゲル中のポリマーの泳動など、ついてもなすべきことは多く残されている。