メゾスコピック系における永久電流の半古典理論

通産省 電子技術総合研究所 電子基礎部

川畑史郎*

1961年ByersとYangによって、位相相関長よりも短いリングに磁束ϕを印加することにより散逸を伴わない電流（永久電流）が流れることが予言された[1]。それ以来、メゾスコピック系を中心に多くの理論的実験的研究がなされてきた[2]。しかし、それらの研究のほとんどは、単純な可積分系ビリヤード（二重円構造）や拡散領域を対象としてなされていた。そこで、ここでは、古典的にカオス的な二重連結構造ビリヤードに流れる永久電流について半古典理論を用いて解析を行う。（但し、ϕはビリヤードの中心部分にのみ印加すると仮定する。）そして、Richterら[3]の量子可積分系の半古典理論との比較を行い、「バリスティック系における永久電流は量子カオスの実験的なプローブとなりうるのか？」という命題について考察を行ってみた。

平衡状態の熱力学量である永久電流は、

$$I = -c\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\phi}\right)_{T,\mu} \tag{1}$$

で定義される。ここで、Ωは熱力学ポテンシャルで、一粒子状態密度$d(E,\phi) \approx d_0(E) + d^{osc}(E,\phi)$を用いて次式で与えられる。

$$\Omega(T,\mu,\phi) = -\frac{1}{\beta}\int dEd(E)\ln\left(1+\exp\left[\beta(\mu-E)\right]\right) \tag{2}$$

式(1)を半古典的に評価するために、d^{osc}をGutzwillerトレース公式[4]

$$d^{osc}(E,\phi) = \frac{1}{\pi\hbar}\sum_s \frac{\tau_s}{|\det(M_s-I)|^{1/2}}\cos\left(\frac{S_s}{\hbar}-\sigma_s\frac{\pi}{2}\right) \tag{3}$$

を用いて表し、積分を定常位相近似を用いて計算する。(τ_sは周期軌道sの周期、M_sは安定性行列、S_sは作用積分、σ_sはMaslov指数である。）結局、永久電流の半古典的表式として次式が得られる。

$$I(\phi) = \frac{e\hbar}{\pi m}k_F\sum_t \frac{R_t(\tau_t)\omega_t}{L_t|\det(M_t-I)|^{1/2}}\cos\left(k_F L_t - \sigma_t\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2\pi\omega_t\frac{\phi}{\phi_0}\right) \tag{4}$$

ここで、tは時間反転対称な関係にある古典軌道のペアを表す（$R_t(\tau_t) \equiv (\tau_t/\tau_c)/\sinh(\tau_t/\tau_c)$ ($\tau_c = \hbar\beta/\pi$)、L_tは軌道長、ω_tは巻き数)。この式からわかることは、永久電流の振幅はフェルミ波数k_Fに比例し、k_Fの値により正にも負にもなるということである。一方量子可積分系[3]の場合は、振幅は${k_F}^{3/2}$に比例するので、振幅のk_F依存性に可積分性の違いが反映されるということがわかる。

式(4)を直接計算するのは、孤立周期軌道の数え上げの問題もあり、一般に困難である。そこで、永久電流の振幅の具体的な値を見積もるために、永久電流の平均二乗振幅$I^{(t)} \equiv \sqrt{\bar{I}^2}$を計算する。($\bar{I}$は

*住所:〒305-8568 つくば市梅園1-1-4、E-mail: shiro@etl.go.jp, URL: http://www.etl.go.jp/~shiro/

フェルミ波数で平均した永久電流である。）このように、平均された量の計算は近似的ではあるが解析的に実行できる。（詳細については文献 [5] を参照されたい。）結果は、以下の通りである。

$$I^{(t)} = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2}ev_F}{\pi L_c} \dfrac{e^{1/\omega_C}}{(1-e^{2/\omega_C})\sqrt{1+e^{2/\omega_C}}} & T > T_c \\ 0.184\dfrac{ev_F}{\sqrt{A}} & T \ll T_c \end{cases} \tag{5}$$

ここで、$L_c = v_F\hbar/\pi k_B T$, $T_c = v_F\hbar/\pi k_B L^*$, $\omega_C \approx \sqrt{0.215L_c/\sqrt{A}}$ である (v_F はフェルミ速度、A はビリヤードの面積、L^* は古典周期軌道の特徴的長さ)。

また、ビリヤードのアンサンブルの平均永久電流は ($T > T_c$ の時) 以下のようになることがわかった。

$$\overline{I(\phi)} = \frac{eh}{4\pi^2 mA\omega_c}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{\omega_c}n\right)e^{-\frac{2}{\omega_c}n}\sin\left(4\pi n\frac{\phi}{\phi_0}\right) \tag{6}$$

これらの結果と可積分系の結果 [3] との比較を行ったところ、量子カオス系の永久電流は量子可積分系に比べて小さな値になることがわかった。この違いの原因は、量子可積分系においては周期軌道がファミリーを形成し、それらが同位相で強め合う干渉を行うため大きな磁気応答を示すが、量子カオス系の場合は全ての周期軌道は (正のリアプノフ指数を持つために) 孤立しており、小さな磁気応答しか示さないためである。

従って、永久電流の k_F 依存性及び振幅に可積分性の違いが反映され、これらを測定することにより実験的に可積分性の違いをとらえることが可能であることがわかった。現在のところ、バリスティック系の永久電流の実験は、二重円構造の可積分ビリヤードに対してしか行われていない [6]。そのため、今後実験的に上記の結果が検証されることが期待される。

参考文献

[1] N. Byers and C.N. Yang: Phys. Rev. Lett. **7** (1961) 46.

[2] メゾスコピック系における永久電流の Review としては、吉岡大二郎: 固体物理 **28** (1993) 741; 川畑史郎、中村勝弘: 固体物理 **32** (1997) 913 など。

[3] K. Richter, D. Ullmo and R.A. Jalabert: Phys. Repts **276** (1996) 1; R.A. Jalabert, K. Richter and D. Ullmo: Surf. Sci. **361/362** (1996) 700.

[4] M.C. Gutzwiller: *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, (Springer-Verlag, New York, 1991).

[5] S. Kawabata: preprint.

[6] D. Mailly, C. Chapelier and A. Benoit: Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2020.