定常プラズマの統計力学

東京大学工学系研究科・伊藤伸泰

1 流体系と統計力学

複雑な定常状態にある流体系の構造を、統計力学的な手法で調べようとする試みは古くから続けられている。しかし、今のところ、大きな成功をおさめているとはいい難い。なぜだろうか？

例えば、ナビエストークス乱流を扱う時には、一様等方な系に発達したどの方向にも並進対称な乱流場を対象とする。一方、流体系にとって境界条件は、移流非線形項とともに重要な要素である。このため、一様等方な状況からのアナロジーだけでは捉え切れない部分があるのではないだろうか？それならば、一般の形の領域についての統計理論を構成してみればうまくゆくのではないだろうか？実はこれまで、一般の領域での流体の統計理論を構成するために必要な状態空間（位相空間）が見つからなかったために、これは試みられてこなかった。

筆者は、吉田善章（東大工）、Richard Jordan(Michigan 大数学) とともに、一般の領域でのある種の流体の運動を統計力学的に扱うことのできる状態空間を発見し、自己組織化したプラズマの構造などへの応用を試みた。以下で簡単に紹介しよう。詳細、実際の応用については、参考文献 [1], [2] を参照されたい。

2 流体系の状態空間と不変測度

ある定常状態の統計理論を構成するためには、力学的な性質として

- 系の状態の集合である状態空間
- 系の運動方程式の不変測度
- 定常状態を特徴付ける保存量・状態量

が必要となる。保存量・状態量は、注目する状態の巨視的な性質から選ぶ必要がある。ここでは、状態空間と不変測度とを扱う。

流体系の運動状態は、ベクトル場によって指定される。領域に閉じ込められた湧き出しのないベクトル場は、ベクトル演算子ローテーション (rot) の固有ベクトル場で展開すると便利である。つまり、考えている領域をΩとして、

$$\Omega\text{の中で}\quad \mathrm{rot}\vec{\varphi}_i = \lambda_i \vec{\varphi}_i,\quad \mathrm{div}\vec{\varphi}_i = 0,\quad \Omega\text{の表面で}\quad \vec{\varphi}_i \cdot \vec{n} = 0 \qquad (1)$$

なる rot の固有ベクトル場を考える。このような固有関数は連続個ではなく可算個であることがわかる。Ωに閉じ込められた湧き出しのないベクトル場$\vec{V}$は、$\vec{\varphi}_i$によって$\vec{V}=\sum_i c_i\vec{\varphi}_i$ と展開できることが示されている。$\vec{\varphi}_i$は、L^2内積で正規直交完全系をなすようにとれる。

オイラー方程式に従う非粘性非圧縮の流体の速度場を$\vec{V}$とし、系内に湧き出しがないとする。この時、$\vec{V}=\sum_i c_i\vec{\varphi}_i$ と展開できる。さらに、この展開係数のルベーグ測度 $\mathrm{d}\mathcal{M}=\prod_i \mathrm{d}c_i$ が、オイラー方程式$\partial_t\vec{V}+(\vec{V}\cdot\ \mathrm{grad}\ )\vec{V}=\vec{F}-\ \mathrm{grad}\,p$ の不変速度であることがわかる。

また、理想電磁流体の磁場を$\vec{B}$、流れの速度場を$\vec{V}$とすると、$\vec{B}=\sum_i b_i\vec{\varphi}_i$、$\vec{V}=\sum_i c_i\vec{\varphi}_i$ と展開できる。さらに、この展開係数のルベーグ測度 $\mathrm{d}\mathcal{M}=\prod_i \mathrm{d}\ b_i\prod_i \mathrm{d}\ c_i$が、理想 MHD 方程式

$$\partial_t\vec{B}=\ \mathrm{rot}\,(\vec{V}\times\vec{B}),\quad \partial_t\vec{V}+(\vec{V}\cdot\ \mathrm{grad}\ )\vec{V}=(\ \mathrm{rot}\ \vec{B})\times\vec{B}-\ \mathrm{grad}\ p \tag{2}$$

の不変測度であることがわかる。

3 自己組織化したプラズマの統計力学

プラズマを領域Ωに閉じ込め、適当な初期状態から放置する。すると、プラズマは自己組織化しゆく。電気抵抗が小さいプラズマの場合、初期条件からまず急激な緩和し、その後しばらく定常状態に留まる。この定常状態がどういう構造を記述する統計力学を考えよう。全節 (2) の理想 MHD 方程式を運動方程式として使う。

粒子の流れが磁場と比べて無視できるようなプラズマの場合（太陽コロナや宇宙論的なプラズマ）、流れ$\vec{V}$を無視して磁場$\vec{B}$ のみを扱ってよいだろう。巨視的な保存量として、磁場のエネルギー $E=\int_\Omega B^2\mathrm{d}\vec{x}$と磁場のヘリシティ$H=\int_\Omega\vec{B}\cdot\vec{A}\mathrm{d}\vec{x}$ を扱う。ここで、$\vec{A}$はベクトルポテンシャルである。全節の相空間、不変測度を使って統計分布を作ろう。磁場$\vec{B}$を、rot の固有ベクトル場で展開して、

$$\vec{B}=\sum_i c_i\vec{\varphi}_i+\sum_{j=1}^{\nu}\check{c}_j\vec{h}_j \tag{3}$$

と書く。ここで、$\vec{h}_j$は固有値$\lambda=0$となる固有ベクトル場、すなわち、コホモロジー場である。νは領域Ωの第一ベッチ数を表す。$\vec{\varphi}_i$は、固有値が0でない固有ベクトル場である。 rot $\vec{g}_j=\vec{h}_j$なるベクトル場$\vec{g}_j$をつかって、$\vec{B}$のベクトルポテンシャルは、

$$\vec{A}=\sum_i\frac{c_i}{\lambda_i}\vec{\varphi}_i+\sum_{j=1}^{\nu}\check{c}_j\vec{g}_j \tag{4}$$

と書き表される。ここで、$\vec{g}_j$は$\vec{\varphi}_i$と直交しているとは限らないことに注意されたい。内積$\Delta_{i,j}=(\vec{\varphi}_i,\vec{g}_j)$ は、コホモロジーと各モードをヘリシティーを

通して結び付ける係数の役割を果たす。$L_i = \sum_{j=1}^{\nu} \check{c}_j \Delta_{i,j}$ を、コホモロジー係数と呼ぶ。また、力学変数は c_i、$\check{c}_j$であるが、$\check{c}_j$は運動方程式と境界条件とから不変であることがわかる。エネルギー、ヘリシティーは、

$$E = \sum_i c_i^2 + \sum_j \check{c}_j^2, \quad H = \sum_i \frac{c_i^2}{\lambda_j} + \sum_j L_j \check{c}_j \tag{5}$$

と書き表される。

統計分布を作るに際して、エントロピーを選択する必要がある。プラズマの場合、部分系の統計的記述がどの程度可能か明らかではないため、一般にはレニエントロピーを使う必要がある。が、ここでは簡単のため、シャノンエントロピーを仮定する。すると、分布は

$$\exp[-\beta(E-\lambda H)]\mathrm{d}\mathcal{M} = \prod_i P_i(c_i)\mathrm{d}c_i \quad P_i(c_i) = \sqrt{\frac{\lambda_i}{\pi\beta(\lambda_i - \lambda)}}\exp[-\beta(1-\frac{\lambda}{\lambda_i})(c_i - c_i^0)^2], \tag{6}$$

となる。ここで、

$$c_i^0 = \frac{\lambda\lambda_i L_i}{2(\lambda_i - \lambda)} \tag{7}$$

とした。この分布関数から、領域の種数が 1 以上でコホモロジー磁場がある場合、各モードは 0 ではない平均値
$< c_i >= c_i^0$をとることがわかる。

この古典統計では、黒体輻射の場合のレーリー・ジーンズの発散（紫外発散）と同様の発散があり、エネルギーやヘリシティは収束しない。何らかの方法でこの発散を除く必要がある。

係数 c_iを量子化することにより収束させることが考えられる [1]。c_iがボゾンとなるとし、線形分散を仮定するとして得られるボーズアインシュタイン統計から、エネルギー、ヘリシティ、およびヘリシティのゆらぎの空間波数 k依存性が、それぞれ、$1/k^2$, $1/k^2$,$1/k^1$ と予想される

また、ミクロカノニカルアンサンブルとして収束させることもできる [2]。この場合は、流れ場$\vec{V}$も含めて理想 MHD 方程式を扱うことが可能である。すると、系の全エネルギーは、流れ場の分も加えて $E = \int_\Omega (B^2 + V^2)/2\mathrm{d}\vec{x}$となる。さらに、磁場と流れ場のクロスヘリシティー $K = \int_\Omega \vec{B}\cdot\vec{V}\mathrm{d}\vec{x}$ も巨視的な保存量としてつかう。このミクロカノニカル理論からは、巨視的な状態が $\delta(E - \zeta H - \xi K) = 0$ から決まること、コホモロジー場があると粒子の巨視的な流れが生じること（定量的な関係も含めて）などが予想される。

4 最後に

ここで扱った状態空間は、運動方程式の不変測度を与えるとともに運動領域の形状を自然に反映しているという特徴がある。今後、さまざまな流体系

への応用が期待される。プラズマの統計力学として、ここに述べたどういう場合にどの理論が妥当なのかは、各理論からの予想の当否を実験によって検証することにより決定できるであろう。

謝辞 この研究は、国際高等研究所ワークショップ「複雑系の秩序と構造」から始まった。

[1] N. Ito and Z. Yoshida, "Statistical mechanics of magnetohydrodynamics, " Phys. Rev. **E53** (1996) 5200. この論文中で、MHD の統計理論の一つの可能性として、現象論的量子化を使った量子統計を定式化している。これを使って、十分に半径の大きいトーラスの場合について、具体的な計算を行なっているが、その規格化因子の計算に誤りがある（正しい表式は、次の文献 [2] 中に与えてある)。

[2] R. Jordan, Z. Yoshida and N. Ito, "Statistical Mechanics of Three-Dimensional Magnetohydrodynamics in a Multiply Connected Domain, " Physica **D114** (1998) 251.