

## 2次元 $q$ -state Potts 模型の large- $q$ 展開

大阪工大            田畑謙二  
大阪府立高専       有末宏明

相転移を起こす系の転移の次数を決めることは重要であるが、系が1次転移と2次転移の境界近傍にあるときには一般にこれは難しい問題となる。したがって1次相転移系のこの境界近傍での振舞いを明らかにしておくことは意義深いことである。2次元  $q$ -state Potts 模型はこの問題を考える上で格好の材料を与えてくれる。この系については  $q > 4$  で1次相転移、 $q \leq 4$  で2次相転移であることが知られているからである。すなわちこの系の転移点  $\beta = \beta_t$  上での潜熱や相関距離は厳密に解かれており、これらの量は  $q > 4$  で有限で  $q \rightarrow 4_+$  の極限で前者はゼロになり後者は発散する。

さて、Bhattacharya 達 [1] はエネルギー・キュムラント  $F^{(n)} = d^n F(\beta)/d\beta^n$  ( $F(\beta)$ : 自由エネルギー) について以下のような重要な仮説を提示した。まず、 $q \leq 4$  での2次相転移の場合  $q$  を固定すると、 $\beta \rightarrow \beta_t$  で相関距離は  $\xi \simeq \mu|\beta - \beta_t|^{-\nu(q)}$  また比熱に比例する  $F^{(2)}$  は  $F^{(2)} \simeq \lambda|\beta - \beta_t|^{-\alpha(q)}$  と発散し、 $F^{(2)}$  と  $\xi$  の間に、 $F^{(2)} \simeq A\xi^{\alpha(q)/\nu(q)}$ 、特に1次転移との境界の  $q = 4$  では  $\alpha(q)/\nu(q) = 1$  なので、

$$F^{(2)} \simeq A\xi. \quad (1)$$

が成り立つことはよく知られている。Bhattacharya 達の仮説は、 $q > 4$  での1次相転移点上を  $q \rightarrow 4_+$  と動いたときにも、 $F^{(2)}$  と  $\xi$  の間のこの関係 (1) が成り立つというものだ。彼らは  $n \geq 3$  の  $F^{(n)}$  についても相関距離との間に同様の関係が成り立つことを予測している。 $q > 4$  ではパラメータ  $\theta$  を  $2 \cosh \theta \equiv \sqrt{q}$  で定義して ( $q \rightarrow 4_+$  のとき  $\theta \simeq \sqrt{q-4}/2$ )、さらに  $x \equiv \exp\left(\frac{\pi^2}{2\theta}\right)$  と置くと、厳密解から  $\beta = \beta_t$ 、 $q \rightarrow 4_+$  で  $\xi \simeq x/8\sqrt{2}$  と振舞うことが知られているので、Bhattacharya 達の仮説は、 $\beta = \beta_t$ 、 $q \rightarrow 4_+$  での  $F^{(n)}$  の漸近的振舞いとして、

$$F^{(n)} \simeq BC^{n-2} \frac{\Gamma(n-4/3)}{\Gamma(2/3)} x^{\frac{3}{2}n-2} \quad (2)$$

を予言する ( $B, C$  は定数)。Bhattacharya 達はさらに  $F^{(n)}$  ( $n \leq 6$ ) の large- $q$  展開を  $z = 1/\sqrt{q}$  について10次まで求め、上記 (2) の漸近的振舞いを仮定して Padé 解析を行い  $F^{(n)}$  の値を求めた結果、 $q \gtrsim 7$  で数値シミュレーションや高温展開・低温展開の結果より1桁以上精度の高い値を出すことができた。このことは上記の仮説が正しいことを強く示唆しているが、残念ながら large- $q$  展開の10次まででは  $q \lesssim 7$  での収斂が悪く、 $q \rightarrow 4_+$  の漸近的振舞いについて上記仮説の当否を判定するには不十分であった。

そこで我々は  $F^{(n)}$  ( $n \leq 6$ ) の large- $q$  展開を有限格子法を用いて  $z = 1/\sqrt{q}$  について23次まで求めた。Bhattacharya 達が使ったのは通常ダイアグラム(グラフ)に基づく

方法だが、その場合各次数に寄与するダイアグラムを細大漏らさず全て数え上げなければならないので、次数が高くなると計算は極めて複雑で膨大なものになる。これに対して有限格子法では、計算は単純でしかも実際の計算においてはダイアグラムを一切使わなくてよい。例えば無限系(熱力学極限)の自由エネルギー密度の展開は、求めたい次数で決まるあるサイズ以下の全ての有限サイズの長方形格子の自由エネルギーの簡単な一定の線形結合により得られる。これに必要な有限系の自由エネルギーはその系の分配関数を transfer matrix の方法で site by site に積分して求めてその対数をとればよいので、ダイアグラムを数え上げる作業は不要である。有限格子法は従来はスピン系の高温度展開・低温度展開や格子ゲージ理論の強結合展開に使われて、少なくとも低次元では他のアルゴリズムに比べてはるかに長い級数を与えている。この有限格子法を large- $q$  展開 のようなスピン変数がとる値の数(の逆冪)に関する展開に応用したのはこれが初めてである。

得られた 2 3 次までの級数を上記の仮説に基づいて Padé 解析すると、 $F^{(2)}$  の値は  $q = 5$  (このとき相関距離はすでに  $\xi = 2500$ ) で 0.1 パーセント、 $q \rightarrow 4_+$  の極限でも数パーセントの精度で求めることができ、その精度の範囲で漸近的振舞いに関する仮説(2)が正しいことを示すことができた。

上記の仮説はエネルギー・キュムラントに関するものだが、今度は 2 次相転移点で発散する他の諸量についても、 $\beta = \beta_t$ ,  $q \rightarrow 4_+$  の極限で同様のことが成り立つのではないかと考えるのは当然である。例えば磁化に関するキュムラントを考えると、これは外部磁場  $H$  が存在するときの自由エネルギーを  $F(\beta, H)$  として  $M^{(n)} = d^n F(\beta, H)/dH^n$  で与えられる ( $M^{(1)}$  は自発磁化, 帯磁率  $M^{(2)}$  は帯磁率).  $q = 4, \beta \rightarrow \beta_t$  (2 次相転移) で、磁化キュムラントの臨界指数の既知の値から、 $M^{(n)}$  と相関距離  $\xi$  の間に  $M^{(n)} \simeq D^{(n)}(\xi)^{\frac{15}{8}n-2}$  の関係があることが知られている ( $D^{(n)}$  は定数) が、エネルギー・キュムラントの場合と同様に、この関係が  $q > 4$  での 1 次相転移点上を  $q \rightarrow 4_+$  と動いたときにも成り立っているという仮説を立てることができる。これは、この極限での相関距離  $\xi$  の上述の漸近的振舞いより、

$$M^{(n)} \simeq E^{(n)} x^{\frac{15}{8}n-2} \quad (3)$$

を意味する ( $E^{(n)}$  は定数). そこで我々はこの仮説を確かめるために、磁化に関するキュムラント ( $n \leq 3$ ) の large- $q$  展開を再び有限格子法を用いて  $z = 1/\sqrt{q}$  について 2 1 次まで求めた。相転移点上を  $q \rightarrow 4_+$  と近づくときの漸近的振舞い(3)を予想してこの級数を Padé 解析すると、やはりエネルギー・キュムラントの場合とほぼ同じ精度で磁化キュムラントを求めることができ、その結果からこの仮説の正しさを示すことができた。

詳細は文献[3]をご覧ください。

## 参考文献

- [1] T. Bhattacharya, R. Lacaze and A. Morel, Nucl. Phys. **B435**, 526 (1995).
- [2] T. Bhattacharya, R. Lacaze and A. Morel, J. Phys. I (France) **7**, 1155 (1997).
- [3] 比熱に関しては H. Arisue and K. Tabata, Preprint hep-lat/9807005.  
一般のエネルギー・キュムラントと磁化キュムラントについては現在執筆中。