

渋滞の研究：超離散的アプローチ

山形大学工学部 西成 活裕

Abstract

決定論的なオートマトン (CA) を用いた交通流の解析は、ウルフラムのルール 184 CA を用いたものが有名である。本研究では、バーガス方程式の CA を超離散化の手法で研究し、得られた CA はルール 184 の多値拡張版になっていることを明らかにした。さらにそれを多近傍に拡張することにより、より現実の交通流の渋滞・非渋滞相転移に近い CA を得ることができることを示した。

1 はじめに

交通流や粉体、生物の群などの運動は離散粒子多体系として捉えることができるが、それらはこれまでの物理学の理論では最も扱いにくい対象の一つであるといえる。物理的に見てもある時は固体、またあるときは流体のように振る舞い、その基礎方程式は通常、現象に応じた個別的なものにならざるを得ない。また解析手法の観点からも、連続体の式を用いれば解析はしやすくなるが、それではもとの系が持つ離散性をきちんと捉えることは難しい。逆に離散的な式から出発すると、我々の手持ちの理論解析手法はほとんど役立たず、数値計算に頼らざるを得ない。しかし逆に離散粒子多体系にはいくつかの共通の現象が起こることは良く知られている。渋滞相転移、パターン形成、密度揺らぎのスペクトルなどはユニバーサルな現象として知られている [1]。ここでは、物理系として交通流を取り上げ、この離散粒子多体系を扱う一つの新しい方法とその渋滞相転移について考えてゆきたい。

交通流の渋滞解析は古くから様々な研究がなされており、それは直接的に社会的意義も大きいものである。ここではその総合的なレビューはせずに、離散モデル、特にセルオートマトン (CA) を用いた解析についての話に限定してゆく。なお、全体的な解説記事としては湯川の記事を参照されたい [2]。

CA は近年様々な分野で活発に研究手法として用いられているものである。それは従来の微分方程式系に比べて数値計算が容易であり、また、単純なルールを設定してもその時間発展は極めて複雑な様相を示す。従って、微分方程式による扱いが困難な複雑な物理系に対して非常に有力な解析手法であるが、大きな問題点がある。それは「CA の単純なルールをどのように設定すればよりよく物理系を記述できるか」という点である。このルールの設定は通常、力学的なイメージでセルの整数値を動かすというものであり、その検証はとにかく計算機で動かして出来るパターンを見ておこなう、というものである。理論的にこの検証を行うことは、連続と離散の間を正確に行き来しなければならず、一般に非常に困難が伴う。これに関連して、ウルフラムが論文に書いている CA における 20 の問題のうちの 9 番目に、CA と連続系の対応は？ というものがある [3]。実はソリトン方程式に関してはこれが可能になる、「超離散」という手法が近年発見された [4]。それによりこれまで様々なソリトン方程式が対応する CA に厳密に変換された。その際に、ソリトン方程式の持つ解構造をうまく利用してそれを保つような超離散化を行うのが特徴である。ソリトン方程式に関してはうまくいくこの手法であるが、では解構造の十分分らない方程式に対してこの手法が使えるのであろうか。これは現時点では大変難しいと言わざるを得ない。ソリトン系でない非線形方程式のうち、対応するセルオートマトンが超離散法で得られた例として以下の章でバーガス方程式をとりあげる。これは変数変換により

線形化出来る方程式であり、その解構造を利用して超離散化したものである [5]。さらにそこで得られたCAは実はウルフラムのルール184CAの多値拡張版になっていることが示される。通常、CAを0、1以外の整数に拡張することは大変な困難を伴う。しかし超離散法ではこれが自然に行えることが特徴である。

ルール184CAとは、交通流の決定論的CAモデルとして良く用いられている [6]。交通流のCAモデルは確率を入れたものとして Nagel らのモデルが有名であるが [7]、解析を厳密に進めていく上で、確率無しの決定論的モデルについて今回は考えたい。この決定論的ルール184CAモデルの欠点は、その渋滞・非渋滞相転移が単純すぎることである。渋滞・非渋滞相転移を見るには通常、交通工学では基本図といわれる関係図を調べる。これは横軸に車の密度、縦軸に交通流率を取ったものとして定義される。現実の交通流とルール184CAモデルの基本図を見比べてみよう [8]。図1(a)が現実の交通流の実測データであり、図1(b)がルール184CAのものである。現実のものは基本的に揺らぎが入っているが、平均化して考えると、「人型」のような図形になっていることに気付く。つまり、右上がりの非渋滞相から右下がりの渋滞相への移行はそう単純ではなく、現実には非渋滞相のオーバーシュートが存在すると考えられる。これは物理的に考えても明らかであり、ある程度車間を詰めて高速で走る一団が道に存在すれば、オーバーシュート部を作ることができる。したがって現実の交通流の特性を表すにはこれらの様子を表現できるCAが望ましく、何らかの更なる工夫が必要である。今回、バーガス方程式のオートマトンをさらに多近傍に拡張することにより、初めてそのようなCAを得ることが出来た。そして、そのCAモデルを通して基本図の人型や渋滞・非渋滞相転移を理解しようというのが本論文の目標である。

2 バーガスセルオートマトン(BCA)

2.1 BCAの導出と基本図

まず、超離散の手法の紹介を兼ねてバーガス方程式を対応するオートマトンに変換してみよう [5]。バーガス方程式は

$$u_t = 2uu_x + u_{xx} \quad (1)$$

である。これをコウル=ホップ変換

$$u = \frac{f_x}{f} \quad (2)$$

によって線形化すると、次の熱伝導方程式

$$f_t = f_{xx} \quad (3)$$

になることは良く知られている。(1)をCAに直すためにはまず、第一ステップとしてその空間・時間変数を差分化する必要がある。そこで、差分方程式でもこの線形化可能という構造を不変に保つために、まず熱伝導方程式から差分してゆく。

$$f_j^{n+1} - f_j^n = \delta(f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n) \quad (4)$$

ただし、 $\delta = \Delta t / \Delta x^2$ である。そして、(2)の離散版として

$$u_j^n \equiv c \frac{f_{j+1}^n}{f_j^n} \quad (5)$$

というものを考える。ただし c は定数であり、(5) から c を引いて $c \sim 1/\Delta x$ とおくと極限で (2) に一致することはすぐ分かる。次に (5) を用いて (4) を u のみで表すと

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n \frac{\frac{1}{c}(1-2\delta)u_j^n + \delta(1 + \frac{1}{c^2}u_{j+1}^n u_j^n)}{\frac{1}{c}(1-2\delta)u_{j-1}^n + \delta(1 + \frac{1}{c^2}u_{j-1}^n u_j^n)} \quad (6)$$

となる。これが時間・空間の差分されたバーガス方程式である。次にこれを CA に変換する。そのために従属変数を離散化する操作が必要あり、これが超離散と言われる手法である。まず、

$$u_j^t = \exp\left(\frac{U_j^t}{\varepsilon}\right) \quad (7)$$

とにおいて、あたらしく小さい変数 ε を導入する。さらに

$$\begin{aligned} \frac{1-2\delta}{c\delta} &= \exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right) \\ \frac{1}{c^2} &= \exp\left(-\frac{L}{\varepsilon}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

とにおいて、 δ, c の代わりに L, M を導入する。そして極限 $\varepsilon \rightarrow +0$ を考える。すると、公式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log\left(\exp\left(\frac{A}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{B}{\varepsilon}\right)\right) = \max(A, B) \quad (9)$$

より、(6) は

$$\begin{aligned} U_j^{t+1} &= U_{j-1}^t + \max(0, U_j^t - M, U_j^t + U_{j+1}^t - L) \\ &\quad - \max(0, U_{j-1}^t - M, U_{j-1}^t + U_j^t - L) \end{aligned} \quad (10)$$

となる。これがバーガス方程式の CA (BCA) である。後のためにこの式を min で表すと、

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(M, U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(M, U_j^t, L - U_{j+1}^t). \quad (11)$$

を得る。この BCA はもし $M > 0, L > 0$ であり、かつ全ての j に対して $0 \leq U_j^t \leq L$ ならば、全ての j に対して $0 \leq U_j^{t+1} \leq L$ が成り立つことが示せる。よって (11) は $\{0, 1, \dots, L\}$ の値をとる CA と見なすことができる。ここで重要なのは $L = M = 1$ とすれば (11) はルール 184 CA

$$\frac{U_{j-1}^n U_j^n U_{j+1}^n}{U_j^{n+1}} = \frac{000}{0}, \frac{001}{0}, \frac{010}{0}, \frac{011}{1}, \frac{100}{1}, \frac{101}{1}, \frac{110}{0}, \frac{111}{1}$$

に一致するということである。したがって BCA はルール 184 CA を特別な場合として含む事が分かる。

ルール 184 CA は交通流の基本的なモデルとして使われているので、この BCA も自然に交通流モデルとして (11) より次のように解釈できる。

「一つのサイトに最大 L 台の車が入るとして、現在の時刻から次の時刻でサイト j の空きにサイト $j-1$ からの車を詰められるだけ詰め、前のサイト $j+1$ の空きにサイト j の車を詰められるだけ詰める。ただし、一度に動ける車の上限は M 台である。」

次に、この (11) の基本図を書いてみよう。まず、道路は周期的、つまりサーキットとし、そのサイト数を K とする。すると平均密度は

$$\rho \equiv \frac{1}{KL} \sum_{j=1}^K U_j^t \quad (12)$$

となり、交通流率は

$$q^t \equiv \frac{1}{KL} \sum_{j=1}^K \min(M, U_j^t, L - U_{j+1}^t). \quad (13)$$

で定義される。図2がこのBCAの基本図である。これは適当な初期条件を沢山選んで各々定常状態になるまで計算し、それらを $q - \rho$ グラフ上に重ねてプロットしたものである。図2 (a) は $L < 2M$ の場合であり、図2 (b) は $L > 2M$ の場合である。図2 (a) は、図1 (b) のルール184CAのそれと全く同じ形を示している、 $\rho < 1/2$ の時 $q = \rho$ 、 $\rho > 1/2$ の時 $q = 1 - \rho$ 上に定常状態があり、 $\rho = 1/2$ が渋滞・非渋滞相転移密度である。相転移は示すが単純であり、前節の議論から残念ながらこの多値拡張版のCAはまだ交通流モデルとしては不十分である。しかし、図2 (b) では、「台形」状の形になる。これはフローを制限する M が効いている結果であり、湯川らのルール184CAに確率的にボトルネックを入れた結果の図と一致している [9]。BCAでは、自然にこのボトルネックの表現が可能であることが興味深い。

2.2 BCAにおける縮退

$L < 2M$ の時のBCAの基本図とルール184CAの基本図は同じ形をしているが、果たして本当に両者は同じものなのだろうか？ 実は、BCAの方はその多値性のために同じ q, ρ の値をとる異なった状態が存在する。これを「縮退」と呼ぶことにする。この縮退の様子を詳しく見てみよう。以下、簡単のため、 $L < 2M$ かつ $L = 2$ として考えよう。真理値表は (11) より、まず $U_j^n \in \{0, 1\}$ の時、

$$\frac{U_{j-1}^n U_j^n U_{j+1}^n}{U_j^{n+1}} = \frac{000}{0}, \frac{001}{0}, \frac{010}{0}, \frac{011}{0}, \frac{100}{1}, \frac{101}{1}, \frac{110}{1}, \frac{111}{1}$$

となり、 U_j^{n+1} も集合 $\{0, 1\}$ 内に属していて、この集合内で閉じた時間発展になっている。そしてこの規則はウルフラムの分類でルール240であり、任意のパターンが右に平行移動する規則になっている。次に $U_j^n \in \{0, 2\}$ の時、

$$\frac{U_{j-1}^n U_j^n U_{j+1}^n}{U_j^{n+1}} = \frac{000}{0}, \frac{002}{0}, \frac{020}{0}, \frac{022}{2}, \frac{200}{2}, \frac{202}{2}, \frac{220}{0}, \frac{222}{2}$$

となり、同様に U_j^{n+1} も集合 $\{0, 2\}$ 内に属していて、この規則はウルフラムの分類でルール184である。次に $U_j^n \in \{1, 2\}$ の時、

$$\frac{U_{j-1}^n U_j^n U_{j+1}^n}{U_j^{n+1}} = \frac{111}{1}, \frac{112}{2}, \frac{121}{1}, \frac{122}{2}, \frac{211}{1}, \frac{212}{2}, \frac{221}{1}, \frac{222}{2}$$

となり、同様に U_j^{n+1} も集合 $\{1, 2\}$ 内に属し、この規則はルール170である。これは任意のパターンが左に平行移動する規則になっている。以上により、この拡張されたオートマトンは、ルール170、240とルール184を含むものであることが分かった。そして、この3状態は図2 (a) における基本図でそれぞれ $A-B$ 、 $O-A$ 、 $O-A-B$ で表されることが分かる。つまり、 $O-A$ はルール240と184、 $A-B$ はルール170と184とが縮退していると見なせる。これがBCAの多値性から来る特徴であり、次の節で多近傍に拡張したときに重要な意味を持つ。

3 拡張 BCA について

BCAは隣接3近傍のモデルであり、別の表現をすれば最高速度が1とみなす事ができる。では次にこのBCAを最高速度2のモデルに拡張してみよう。つまり、前が空いていれば単位時間で2サイト動けるとするのである。その数は $a_j^t \equiv \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t, L - U_{j+2}^t)$ として与えられる。ここで、 $L - U_{j+1}^t$ や $L - U_{j+2}^t$ は、それぞれサイト $j+1$ とサイト $j+2$ の空きを表す。そして、単位時間に動きうる車の最大台数を $b_j^t \equiv \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t)$ で定義する。つまり、サイト $j+1$ の「隙間」の分だけ動けるとするのである。この条件の下では、1サイトだけ動く車の数は $\min(b_j^t - a_j^t, L - U_{j+1}^t - a_{j-1}^t)$ で与えられる。したがって、サイト j に出入りする車の台数を勘定して、発展則は

$$\begin{aligned} U_j^{t+1} &= U_j^t + a_{j-2}^t - a_j^t \\ &\quad + \min(b_{j-1}^t - a_{j-1}^t, L - U_j^t - a_{j-2}^t) - \min(b_j^t - a_j^t, L - U_{j+1}^t - a_{j-1}^t) \\ &= U_j^t + \min(b_{j-1}^t + a_{j-2}^t, L - U_j^t + a_{j-1}^t) - \min(b_j^t + a_{j-1}^t, L - U_{j+1}^t + a_j^t) \end{aligned} \quad (14)$$

となる。これが多近傍に拡張されたBCA (EBCA) である。そしてこのEBCAは $L = M = 1$ とした時、福井・石橋らのルール184CAの多近傍拡張の結果 [6] を含んでいる事が示せる。

それではこの拡張モデルでの基本図を見てみよう。条件はBCAの時と同じであるが、交通流率はこの場合

$$q^t \equiv \frac{1}{KL} \sum_{j=1}^K \min(b_{j-1}^t + a_{j-2}^t, L - U_j^t + a_{j-1}^t) \quad (15)$$

で定義される。以下、簡単のために $L = 2$ の場合を詳しく調べる。図3が全てのパターンの初期値をふって描いた基本図である。これから、基本図は人型を示していることが分かる。これはより現実の交通流に近いモデルであることを意味する。そして、密度が $1/3 \leq \rho \leq 1/2$ の範囲内で基本図が多価性を示している。

では、新しい分岐についてBCAと比較しながら詳しく調べてみよう。まずBCAにおける基本図で、三角形の各辺は状態が縮退していたが、それがEBCAではどうなったかを考える。例えば図2(a)で、A点では $\dots 111111111 \dots$ と $\dots 20202020 \dots$ とが縮退していて、それぞれ、ルール240、184の状態である。速度増加により $\dots 111111111 \dots$ はそのまま全ての1が速度2になるので、密度は $\rho = 1/2$ のままで速度 $v = 2$ より、 $q = \rho v = 1$ になる。しかし、 $\dots 20202020 \dots$ は空きのないサイト2が一つおきにあり、EBCAにおいても速度を上げられず、結局 $q = 1/2$ のままである。したがって速度増加で、縮退の分離がおきて、それぞれ図3のDとAになる事が分かる。同様に考えてゆくと、図2(a)でO-AはEBCAにおいてO-Dになり、O-A-Bは図3のO-C-Bになり、A-Bは不変になっていることが分かる。従って、 $1/3 \leq \rho \leq 1/2$ の範囲でBCAの縮退が分離し、基本図における多価性を出現させたといえる。

次に、基本図の新しいオーバーシュートしている枝について、その安定性を調べてみよう。例えば、Dでは $\dots 111111111 \dots$ という状態があるが、これに対して「摂動」状態 $\dots 111120111 \dots$ を考える。これは一様に走っている車のうち、一台の車が減速した状態と考えることができる。この後の時間発展は図5に示した通りで、図3のAに近づくことが分かる。そして、D近傍の状態は全てこのような摂動に対して不安定でありC-Aラインに移行することが分かる。これは高密度で高速のフローは不安定で、少しの擾乱で渋滞化する、という物理的な事実とよくあっている。この意味でも、EBCAの振る舞いは現実の交通流を良く反映したCAモデルであるといえる。最後にCに近いC-D上の点に

については、上記の摂動で $C-A$ 上に移るが、逆に C に近い $C-A$ 上の点も摂動で $C-D$ 上に移ることが示せる。例えば 110110111110 は $C-D$ 上の定常状態であり、これに摂動を加えた 110110120110 はそのまま $C-A$ 上の定常状態になり、図 4 の時のように 2 が広がってゆかない。つまり、 C に近い $C-D$ 上は逆に安定であることが結論出来る。

4 基本図の「人型」について

以上から、現実の交通基本図に現れる人型に対して次のような解釈が可能である。前節の結果より、オーバーシュートしている枝は確かに物理的な根拠があり、まず、非渋滞相から少し高密度高速の安定フローが伸び、次に十分高密度で高速の不安定フローが伸びてゆくことになる。少しだけ高密度高速の安定フローはなぜ生じるのかというと、渋滞領域（この場合 2 のサイト）が他の交通の流れを邪魔せず、その他の非渋滞領域である程度高密度高速を保てれば、全体として安定なオーバーシュート部の状態になるからである。そして密度がある程度高くなると、渋滞領域が少しでも形成されるとその影響が全体に伝わってゆき、全体が渋滞相に変わってしまいうので不安定状態となるのである。そして、オーバーシュート部のこの解釈は他の良く研究されている OV モデル [10] と一致することも示すことができる [11]。

それでは、現実にこのようなオーバーシュート部はきれいに観測されるかという事について触れてみたい。確かに図 1 (a) では僅かにオーバーシュートしているが、EBCA ほど伸びていない。この原因はまず、オーバーシュート部を与える状態数がその他の三角形部を与える状態数よりも極めて少ない、ということがあげられる。道の長さを十分長く取ればこの比は極めて小さくなってゆくことが分かる。つまり、現実にこのような状態に出会う確率が低い、ということである。もう一つはオーバーシュート部の高密度付近は極めて不安定であり、長時間の平均でみると、ほとんど見ることが出来なくなるという事実である。さらに今までの研究は周期系においてなされていたが、開放系で考えると、ある区間を考えるのでさらに密度揺らぎがあり、そのためにますます観測しにくくなる。実際、EBCA を開放系において計算したのが図 5 である。ある区間を考え、ランダムに車が入車し、自由に出ていくモデルを考える。初期状態はランダムに与え、その時間発展を基本図上にプロットする。図 5 より、時間が経てばオーバーシュート部が短くなってゆくのが分かる。

5 まとめと課題

新しく得られた EBCA は交通渋滞相転移の様子を非常に良く表したモデルであることが明らかになった。今後はこの EBCA をさらに詳しく解析し、現実の交通流を扱うためのソフトウェア化も考えてゆきたい。以下に EBCA の解析について 2 つの補足しておく。

(1) 一般の L, M について

EBCA において L が 3 以上のときの基本図を図 6 に示す。このように沢山の小枝が出現していることが分かる。これは EBCA の多値性から来る階層構造の反映である [11]。

(2) 逆超離散について

逆超離散とは、CAから逆に対応する差分方程式を導く方法である。これは2節の手法を逆にたどればよい。その際に、(9)を逆に用いて、

$$\max(A, B) \rightarrow \varepsilon \log(\exp(\frac{A}{\varepsilon}) + \exp(\frac{B}{\varepsilon})) \quad (16)$$

という置き換えをするのが特徴である。しかし注意しなければならないのは、どんなオートマトンの式でもこの置き換えをすればよいという訳ではないことである。(9)以外にも極限で $\max(A, B)$ に収束する公式はいくらでも存在する。従って解構造がある程度知られていないと(16)は意味がない。今回のEBCAはBCAより作ったものであり、BCAの特徴をそのまま持っているものである。実際、(14)中の \min の中を詳しく調べると、(11)の時の項は全てそのまま存在し、いくつかの新しい項が付け加わったものであることが分かる。これからEBCAに関しては(16)は正当化されると考えられ、その結果、EBCAを逆超離散し、差分方程式

$$u_j^{t+1} = u_j^t \frac{q_{j+1}^t}{q_j^t}. \quad (17)$$

を得る。ただし、

$$q_j^t = m^2 + ml u_j^t + ml u_{j-1}^t + \frac{m}{u_{j-1}^t} + \frac{m}{u_{j-2}^t} + \frac{1}{u_{j-1}^t u_{j-2}^t} + l + l \frac{u_j^t}{u_{j-2}^t} + l \frac{u_j^t}{u_{j-1}^t} + l^2 u_{j-1}^t u_j^t + l^2 (u_j^t)^2 + l^2 u_{j+1}^t u_j^t \quad (18)$$

ここで、変数は

$$\exp(\frac{U_j}{\varepsilon}) \equiv u_j^t, \quad \exp(-\frac{L}{\varepsilon}) \equiv l, \quad \exp(-\frac{M}{\varepsilon}) \equiv m \quad (19)$$

とおいた。この差分方程式は連続極限で高次バーガス方程式に対応し、厳密に解けるバーガスヒエラルキーに属していることが分かる[11]。つまり、BCAの多近傍化によりEBCAを得たわけであるが、多近傍化とは微分階数をあげることであり、そのためにバーガスヒエラルキーが得られたということになる。

今回は超離散の方法によりBCAとEBCAが得られたが、これを超離散を経由せずに導くのはまず困難であろう。その意味で超離散の方法は今回の解析に十分威力を発揮したと言える。しかし、この手法を解構造の分からない他の非線形散逸系に応用するのはまだ遠い道のりである。そのためには非線形散逸系を特徴づけるもう一つの指導原理が必要であり、この新しい原理と超離散との結びつきこそが最も期待される超離散の新展開であると考えられる。

References

- [1] O. Moriyama, N. Kuroiwa, M. Matsushita and H. Hayakawa, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) p.2833.
- [2] 湯川 諭、物性研究 65-1 (1995-10) p.117.
- [3] S. Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata* (World Scientific, Singapore, 1986).

- [4] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) p.3247.
- [5] K. Nishinari and D. Takahashi, to appear in J. Phys. A.
- [6] M. Fukui and Y. Ishibashi, J. Phys. Soc. Jpn., **65** (1996) p.1868.
- [7] K. Nagel and M. Schreckenberg, J. Phys. I France **2** (1992) p.2221.
- [8] Traffic Engineering (in Japanese), T. Sasaki and Y. Iida, Eds. (Kokumin Kagakusha, 1992).
- [9] S. Yukawa, M. Kikuchi and S. Tadaki, J. Phys. Soc. Jpn., **63** (1994) p.3609.
- [10] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, Phys. Rev. E. **51** (1995) p.1035.
- [11] K. Nishinari and D. Takahashi, preprint.

Fig1(a)

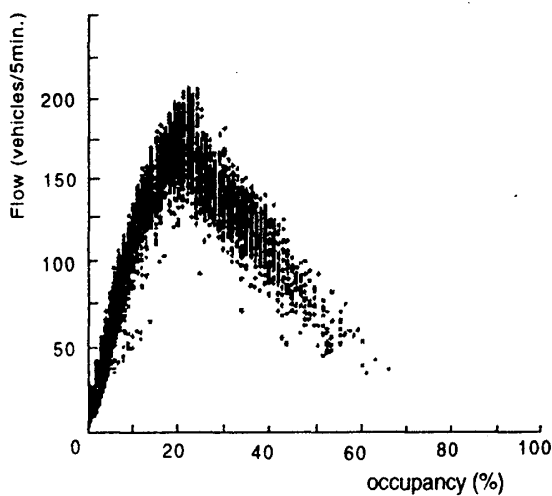


Fig1(b)

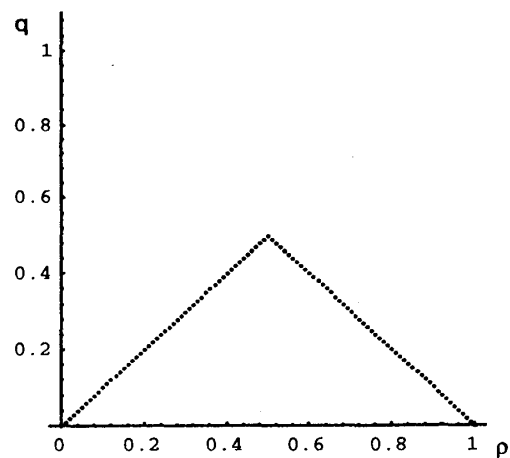


Fig2(a)

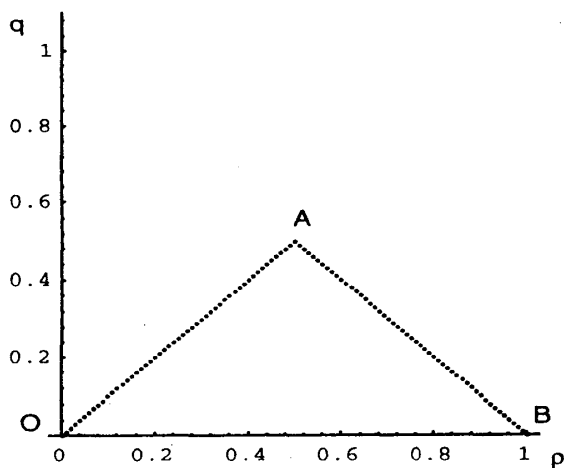


Fig2(b)

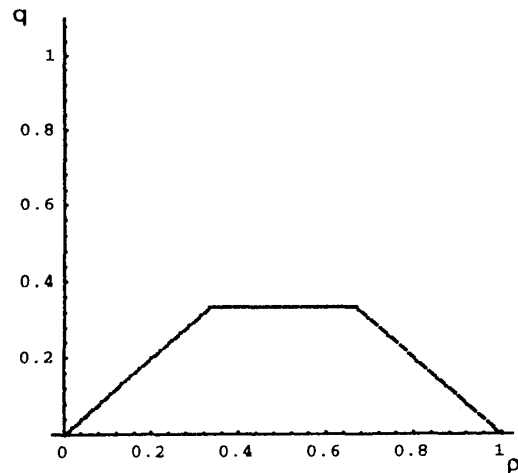


Fig.3

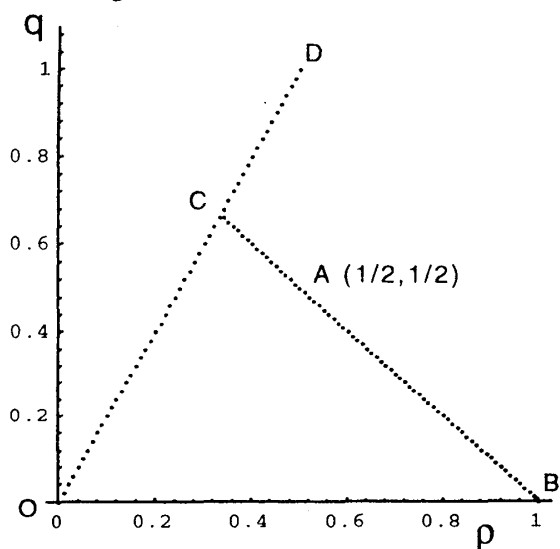


Fig.4

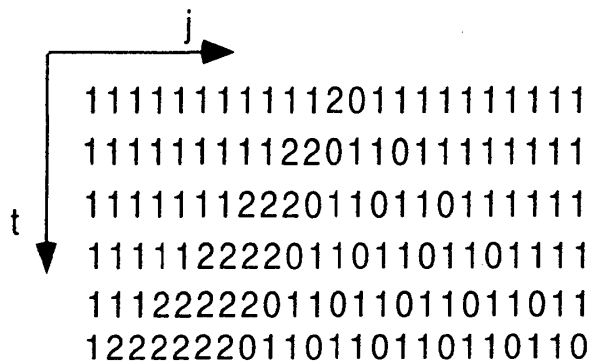


Fig.5

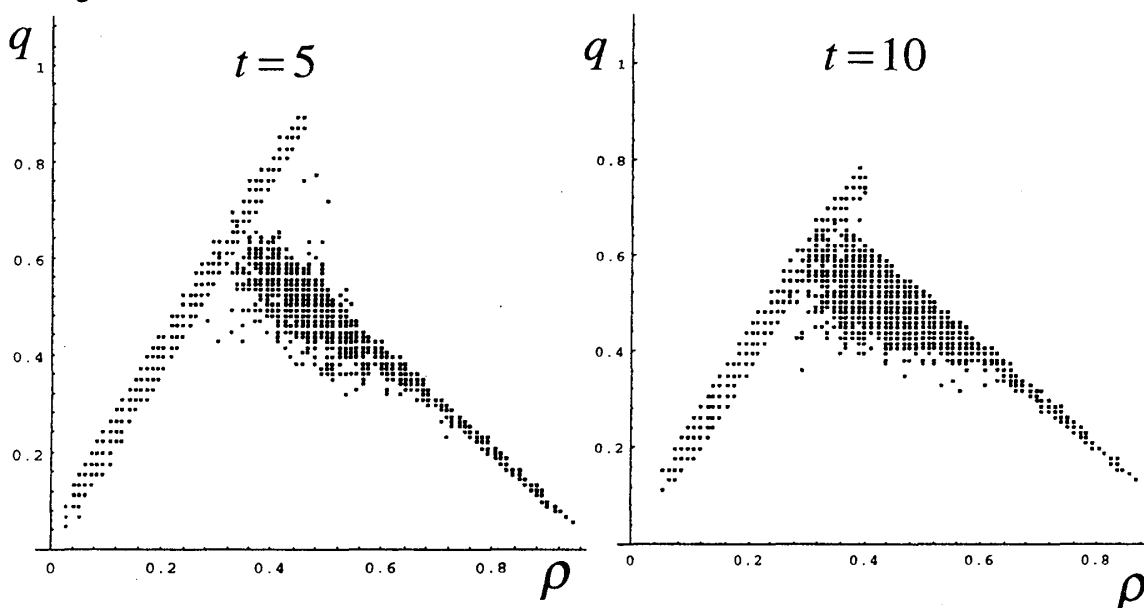


Fig.6

