– 量子ホール効果 – その自然さと不思議さ

東京大学大学院工学系研究科　物理工学　初貝 安弘[1]

1　磁場中の電子と量子ホール効果

1.1　量子ホール効果

量子ホール効果[2] とは文字どおりホール伝導度が量子化される現象でその実験的発見に対して K.V.Klitzing にノーベル賞があたえられています。驚くべきはその精度でそれが 6 桁以上の精度を もつというのです。伝導度ですから電流/電圧なわけで電流と電圧をはかって例えば 34.51231 / 17.25616=1.999999...、67.88631 / 22.62876=3.000001 となったら「これは普通でないなんかがある」、というわけです。こんなぐあいに整数の値にホール伝導度が極めて近くなる現象を 整数量子ホール効果といい、ある場合には、この値が 14.512 / 43.535 = 0.3333 . 等と整数/ 奇数 に極めて近くなるときを分数量子ホール効果といいます。この現象の特異なところは、結果がとてもきれいな数に なるので一見して何かの物理量を摂動論とか○×近似で計算するという 定量的な議論では 不十分だと感じるわけです。つまりこの現象は、何らかの形で整数がらみの理論がその裏にあることを 示唆していると思いませんか。そして実際、量子ホール効果とは 系の細部に依存しない 境界が何個あるか、どんなぐあいにつながってるかといった物理系の位相的性質 にのみ依存した形で 理論としてきれいにまとまり、それが ある意味で現実にも実験として観測にかかっている（と信じられている）ラッキーな現象なのです。[3]

1.2　ベクトルポテンシャルと波動関数の位相

磁場 $\vec{B}$ が存在すると質量 m、電荷 e の荷電粒子は古典的にはローレンツ力 $\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$ が働くが、このローレンツ力を導く古典ハミルトニアンが $H = \frac{1}{2m}(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A})^2$ であることに基づいて量子力学のハミルトニアンとして $H_A = \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A})^2$ を考える。ここで、$\vec{A}$

[1] hatsugai@coral.t.u-tokyo.ac.jp

[2] 有名な教科書として *The Quantum Hall Effect*, edited by R. E. Prange and S. M. Girvin　(Springer-Verlag, Berlin, 1987) 最近はその他にも多くの教科書もあります。私もここでは述べるような視点からの review を数年前書きました "Topological Aspect of the Quantum Hall Effect", J. Phys. C, Condens. Matter 9, 2507-2549 (1997) 。

[3] もちろん数学的に厳密な意味では穴はたくさんあり。乱れが本質である実際の実験をきちんと説明することも少なくともここで述べることだけではできないし、よくよく考えれば物理としも未完の現象といえます。

はベクトルポテンシャル $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ であり、以下の話で最も重要かつ基本的なものである。ここで同じ磁場をあたえるベクトルポテンシャルは一意に決まらず任意の関数 $f(\vec{r})$ をつかって $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$ でもかわまないことはゲージ変換としてよく知られている。この変換をすればハミルトニアンは変化するが、シュレディンガー方程式として $H_A \Psi_A(\vec{r}) = E\Psi_A(\vec{r})$ を考えるとこの固有関数 $\Psi_A(\vec{r})$ はベクトルポテンシャルが $\vec{A}'$ の時のシュレディンガー方程式 $H_{A'}\Psi_{A'}(\vec{r}) = E\Psi_{A'}(\vec{r})$ の解 $\Psi_{A'}(\vec{r})$ と次のように関係している。

$$\Psi_A(\vec{r}) = e^{i\frac{e}{\hbar c} f(\vec{r})} \Psi_{A'}(\vec{r})$$

これは $f(\vec{r})$ が任意関数であったことに対応して波動関数の位相そのものが「不定」であることを意味する。それではその位相にはなんの意味もないかというと、当然そうではなく、空間の閉曲線 C に沿って電子を断熱的に動かした場合に波動関数がうける位相の変化分は[4]

$$\frac{e}{\hbar c}\oint_C d\vec{r}\cdot\vec{A} = \frac{e}{\hbar c}\int d\vec{S}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{A} = \frac{2\pi}{\Phi_0}\int d\vec{S}\cdot B, \Phi_0 = \frac{hc}{e} : (\text{磁束量子})$$

となり閉曲線 C が囲む全磁束により定まるゲージによらない確定した物理的意味を持つ量となる。つまり波動関数の位相は局所的には任意で意味がないが大域的には重要な意味がある。これが磁場の量子力学における本質的な意味であり、アハロノフ・ボーム効果、量子ホール効果における位相幾何学的性質の起因である。

1.3 Hofstadterのバタフライとフラクタル

ここで磁場中の電子系を格子上で議論したい。そうすることにより境界条件、状態の数え上げ等が簡単になり、また通常の連続空間での議論も適当なスケーリング極限の下で再現することもわかる。

第二量子化した表示で以下のハミルトニアンを考える。

$$H = -t\sum_{ij}\{c_i^\dagger e^{i\theta_{ij}} c_j + h.c.\} + V(\{n_k\})$$

ここで c_i は2次元格子上 i サイトの電子の消滅演算子で $(\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij})$、$V$ は電子の粒子数(演算子) $n_k = c_k^\dagger c_k$ により書ける項で電子間相互作用をも含む。θ_{ij} が j サイトから i サイトに電子が飛び移るとき受ける位相の変化で図1のように

$$\sum_{\text{Plaquette}} \theta = \theta^x + \theta^{y'} - \theta^{x'} - \theta^y = 2\pi\phi$$

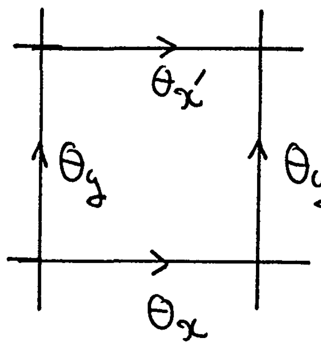
と定める。ここで ϕ は磁束量子を単位としたプラケット当たりの磁束である。

[4] Berry の位相といわれる。

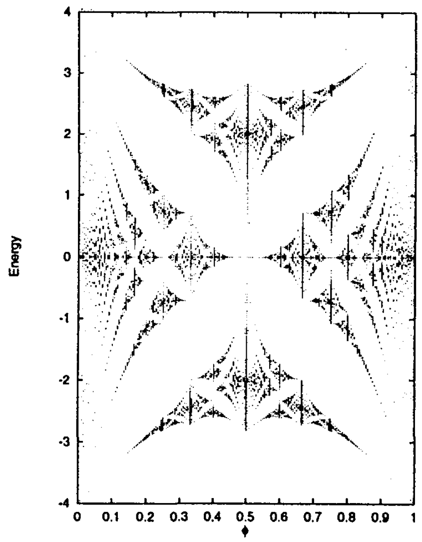
この系は $\{\varphi_i\}$ を任意として次のようなユニタリ変換 (ゲージ変換) で不変であり[5]

$$
\begin{aligned}
c_i &\rightarrow c'_i = c_i e^{i\varphi_i}, \qquad \{c'_i, c'^{\dagger}_j\} = \delta_{ij} \\
\theta_{ij} &\rightarrow \theta'_{ij} = \theta_{ij} + \varphi_i - \varphi_j
\end{aligned}
$$

各 θ_{ij} そのものには不定性があるが、ϕ は確定する。



ここで $V = 0$ とすると問題は一粒子問題となるが、その一粒子エネルギーを ϕ を変えながら図示したものが有名な Hofstadter のバタフライである。(図 2)



横軸は φ：プラケットあたりの磁束
縦軸は 一粒子エネルギー

この図の特徴は $\phi = \frac{p}{q}$ (p, q 整数) のときエネルギーバンドが q 個に分かれていることにあり、見ての通り至る所に入れ子構造がありフラクタルとなっている。また弱磁場の極限を考えると[6] $\phi = \frac{1}{q}$ ($q \rightarrow \infty$, $\phi \rightarrow 0$) のとき非常にバンド幅が狭い[7] バンドが ϕ を変えたとき数本の直線として図に現れているのがわかる。その直線は n を自然数として $E_n = const. + \Delta n\phi$ と書け定数をのぞいて $\frac{E_n}{\phi} \sim \Delta n$ となる。これは、バンド幅が非常に狭いこととあわせて、弱磁場の極限での等間隔のエネルギーギャップをもつランダウ準位の形成を示している。ここで更に有限系での状態数を数えてみよう。1 辺 L の有限な 2 次

[5] $H(\{c_i, \theta_{ij}\}) = H(\{c'_i, \theta'_{ij}\})$

[6] この弱磁場の極限では磁束当たりのプラケット数が非常に多く格子の効果が見えなくなり連続体が再現される。

[7] 以下のスケーリング極限でもそのバンド幅は 0 のままでそれがランダウ縮退に対応する。

元系を考えるとサイト数は L^2 あり全一粒子状態も当然 L^2 個ある。よって q 個のエネルギーバンドの領域は L^2/q 個ずつの状態を含む。つまり弱磁場の極限でランダウ準位の縮退度は L^2/q となる。一方プラケット当たりの磁束が $1/q$ だから系全体を貫く全磁束は L^2/q となり、ランダウ準位の縮退度は系を貫く全磁束として与えられることとなる。このランダウ準位当たり (全磁束当たり) の電子数 N_e、$\nu = \frac{N_e}{L^2/q}$ をランダウ準位の占有率と呼び、量子ホール効果で重要な量である。

2 位相不変量 — バルクとエッジ —

量子ホール効果は占有率 ν が特定の有理数 $\nu = p/q$ (q 奇数) のときのホール伝導度が $\sigma_{xy} = \nu\frac{e^2}{h}$ となり、ν を変えて実験したとき小さい q のところに平らな部分 (プラトー) が現れるというものであり、$\sigma_{xy} = \nu\frac{e^2}{h}$ という表式自体は乱れのない連続系の場合容易にしめせるものでそれほどおどろくべきものではない。驚くべきは ν を上記のマジックナンバーの近傍で変化させても σ_{xy} は変化せずプラトーをつくるという点にあり、乱れの効果の議論も本質的に重要である。ただここではそれには触れず、$\sigma_{xy} = \nu\frac{e^2}{h}$ がある種の位相幾何学的量として書き直せることを紹介したい。

なぜ物理量を不変量で書こうとするのか、その気持ちをここでまとめておこう。ある物理量が本質的に離散的な量 (たとえば何かの個数) で書けたとするとすると乱れの強さ、相互作用等を連続に変化させても離散量の方は連続に変化することはできない。唯一許される連続変化は変化しないこと、というわけである。[8]

なおここでは ν が整数の場合に限って議論し ν が分数の場合は後でこの場合に帰着させるのが方針である。

2.1 無限系 (バルク) — 渦度、チャーン数 —

無限系の場合ホール伝導度を久保公式から書き直すことは有名な TKNN の論文でおこなわれ[9] 結果だけをここで書くと下から j 番目のエネルギーバンドからのホールコンダクタンスへの寄与は次のように書ける。

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{j,\,bulk} &= -\frac{e^2}{h}\frac{1}{2\pi i}\int\int_{T^2_{MBZ}} dk_x dk_y\ [\ \nabla_k \times \mathbf{A}_u^j(\mathbf{k})\ ]_z \\
\mathbf{A}_u^j(\mathbf{k}) &= \langle u^j(\mathbf{k})|\nabla_k|u^j(\mathbf{k})\rangle = \sum_{i=1}^{q} u_m^{j\,*}(\mathbf{k})\nabla_k u_m^j(\mathbf{k})
\end{aligned}
$$

[8] 当然どのくらい変化させても変化しないかという見積もりが重要であり、そこの見積もりをきちんとするのがむずかしい。

[9] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, Phys. Rev. Lett **49** 405 (1982), M. Kohmoto, Phys. Rev. Lett. **51** 1198 (1983)

ここでも詳しいことは文献にゆずるが、$u_m^j(\mathbf{k})$ はブロッホ関数である。この表式は更に以下のようにはブロッホ関数(の任意の) ℓ 番目の成分が定義するゼロ点 (s) まわりの渦度の和として

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{j,\, bulk} &= -\frac{e^2}{h} N_j \\ N_j &= \frac{1}{2\pi} \sum_s \oint_{\partial R_s} d\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \mathrm{Im} \ln u_\ell(\vec{k}) \end{aligned}$$

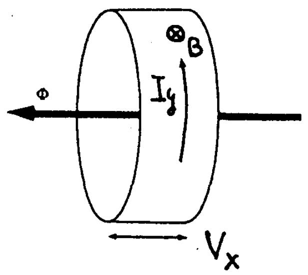
となる。この表式から N_j が整数となることはわかるであろう[10]。なおフェルミエネルギーが下から k 番目のエネルギーギャップにある場合系のホール伝導度は、フェルミエネルギー以下のバンドからの寄与の総和として

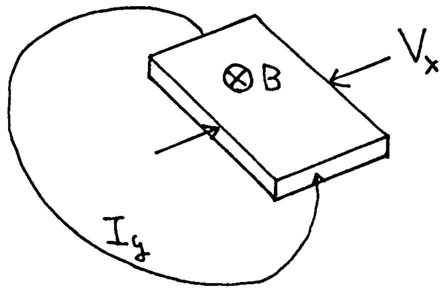
$$\sigma_{xy}^{bulk} = \sum_{j=1}^{k} \sigma_{xy}^{j,\, bulk}$$

となる。

2.2 端のある系 (エッジ) — Laughlin の議論 —

現実のサンプルには必ず境界があることを考え図のようなシリンダー状のいわゆる Laughlin の配置を考えよう。ここで Φ はシリンダーを貫くアハロノフ・ボーム磁束である。





この配置で Laughlin は次のような議論をした。Φ を断熱的に $\Delta\Phi$ だけ変化させる。その過程で系にした仕事量が ΔE であるとしよう。そのときシリンダーの輪方向の電流 I_y はいわゆる Byers-Yang の公式[11] により、

$$I_y = c\frac{\Delta E}{\Delta \Phi}$$

となることをまず認めよう。このとき $\Delta\Phi = \Phi_0$ $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$ は磁束量子の場合を考える。アハロノフ・ボーム磁束を磁束量子変化させた場合、物理系は(大きな)ゲージ変換により

[10] この総和をチャーン数という

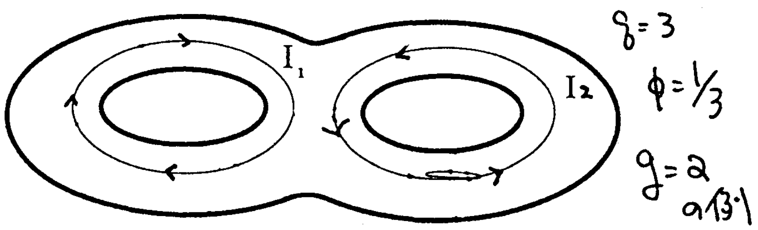
[11] N. Byers and C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. 7, 46, (1961)

もとの状態に戻る。よってこのあいだになされた仕事量は、シリンダーの一方の端から他端へ 何個か (n 個) 電子が移動されたことによると考えられる。そこでこの両端の間の電位差を V_x とすると $\Delta E = neV_x$ となる。これらを代入すれば

$$I_y = n\frac{e^2}{h}V_x$$

これが Laughlin による整数量子ホール効果の説明である。[12] ここでの n は整数ではあるがいくつであるかはこの議論からは定められない。実はこの Laughlin の議論では不定であった整数 n にはバルクの場合とは全く異なる位相幾何学的意味がある。それについてまた結果のみであるが、紹介したい。

まず、シリンダーの両端をつなぐ方向へ増加するランダウゲージで考えると、シリンダーの輪の方向には周期的である。これを用いると 2 次元の問題は、シリンダーの輪の方向の波数 k_y ごとの 1 次元系に帰着することに注意する。この 1 次元系は両端をもつのでその両端に局在した束縛状態をもつ場合がある。この束縛状態を 2 次元系の言葉ではエッジ状態とよぶ。その束縛状態の振る舞いが Laughlin の未定整数 n を定めるわけだが、その振る舞いはこの 1 次元系の複素エネルギー面を考えるとわかりやすい。[13] この複素エネルギー面はやや複雑でエネルギーバンドが q 個 ($\phi = p/q$ の時を考えて。) あることに対応して $g = q - 1$ 個の穴をもつ浮輪となる。(図)



この g 個の穴が $q-1$ 個のエネルギーギャップに対応する。この複素エネルギー面上で束縛状態 (エッジ状態) のエネルギーは g 個存在する。以上はシリンダーの輪方向の波数 k_y を固定しての話だが、次に、k_y を 0 から 2π まで変化させることを考える。すると 0 と 2π は同一視すべきであることを考えると g 個のエッジ状態のエネルギーはこの浮輪上で閉曲線をつくることになる。復習すると浮輪の穴はエネルギーギャップ (下から k 番目のエネルギーギャップとしよう) に対応していたわけだがその穴のまわりをエッジ状態のエネルギーが何回か (I_k 回) まわるわけである。実はここで与えた回転数 I_k がフェルミエネルギーが

[12] R. B. Laughlin, Phys. Rev. **B23**, 5632 (1981).
[13] 量子力学で習う Levinson の定理を思い出してもらうといいかもしれない。

そのエネルギーギャップにある場合の Laughlin の未定整数 n を与えるのである。[14]

$$\sigma_{xy}^{edge} = -I_k \frac{e^2}{h}$$

ここでホール伝導度という物理量に対して 2 通りの位相幾何学的表現が得られたが、その間の関係も次の通りわかっていて以下のようになる[15]

$$\sigma_{xy}^{j,\ bulk} = I_j - I_{j-1}$$

これより当然の結果

$$\sigma_{xy}^{edge} = \sigma_{xy}^{bulk}$$

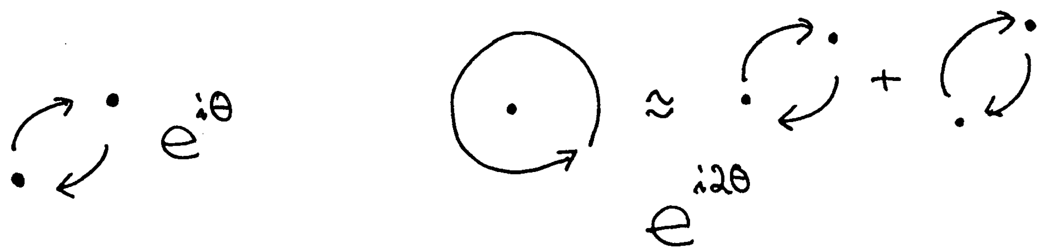
が得られる。つまりホール伝導度はバルクで考えてもエッジで考えても等しい。

3 分数と整数

以上整数量子ホール効果に関する位相幾何学的記述について説明したきたが、この節で分数量子ホール効果との関連を説明したい。(本質的には分数量子ホール効果を整数量子ホール効果に帰着させるのである。)

3.1 分数統計粒子

フェルミ粒子の多体の波動関数は粒子を入れ替えたとき位相が $e^{i\pi} = -1$ 変化し、ボーズ粒子の場合変化しないことを思い出そう。2 次元系の場合それ以外の位相変化も実は許され[16] θ-分数統計粒子系は粒子を入れ替えた時の多粒子系の波動関数の位相変化が $e^{i\theta}$ となる系として定義される。この分数統計にしたがうある粒子が他の粒子のまわりを一周する過程を考えるとこの過程が粒子の入れ替え 2 回と等価であることに注意すると、一周する過程での位相変化は $e^{i2\theta}$ であることを注意しておく。



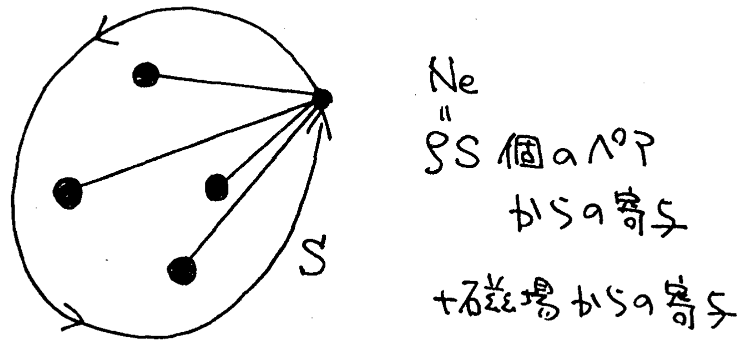
[14] Y. Hatsugai, Phys. Rev. Lett. **71** 3697 (1993) , Phys. Rev. **B48** 11851 (1993)
[15] 部分積分との類似性に注意されたい。
[16] Fermion, Boson に対して Anyon といわれる。

3.2 磁束の切り張り — Adiabatic Heuristic の議論 —

N_e 個粒子密度 ρ の θ 分数統計粒子がプラケット当たり ϕ の磁場の下にある状況を考えよう。このときある粒子が面積 S の閉曲線を囲む運動をする過程を考える。このとき平均的にはこの面積中に粒子は $N_e=\rho S$ 個あり、一つの粒子当たりこの過程で 2θ の位相変化を受けるので統計性からの寄与として $2\theta N_e$ の位相変化を受ける。更に一様磁場からは $2\pi\phi S=2\pi N_\phi$ の位相変化をうけるので総計この過程において

$$2\theta N_e+2\pi N_\phi=2\pi N_e\Big(\frac{\theta}{\pi}+\frac{1}{\nu}\Big),\quad (\nu=\frac{N_e}{N_\phi})$$

の位相変化を受けることとなる。



ここで次の仮定を置こう。

Adiabatic Heuristic Argument: (Jain, Wilczek)[17]
全磁束が変化しない過程においては少なくとも長距離の物理は変化しない。

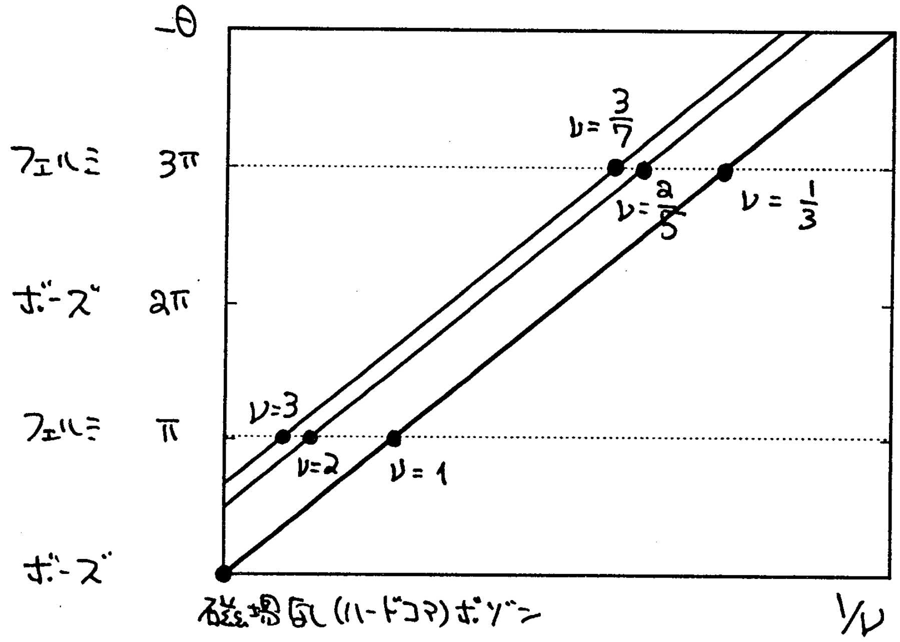
これを信じれば次の微分方程式の解として得られる系は断熱的につながっていることとなり長距離の物理に関しては同等となる。つまり分数統計を与える仮想的な磁束と実際の磁束とをその総和を一定としてやりとり（切り張り）しても物理の本質は変わらないと主張するのである。[18]

$$d(\frac{\theta}{\pi}+\frac{1}{\nu})=0$$

ここで ν は系が量子ホール効果を示す場合には通常のランダウ準位の占有率となる。

この主張に従い、$\theta=-\pi$ (通常のフェルミ統計に従う電子), $\nu=n$:整数 すなわち普通の整数量子ホール状態 $\sigma_{xy}=n\frac{e^2}{h}$ を含む系列を考えよう。具体的には上記微分方程式の $\theta=-\pi$, $\nu=n$ を通る解曲線を求めてみる。この解曲線は容易にわかるとおり $\frac{\theta}{\pi}+\frac{1}{\nu}=-1+\frac{1}{n}$ と $-1/\nu$-θ 図上で直線であらわされる。この直線上に重要な系が含まれているのである。

[17] Jain, Phys. Rev. Lett. 63, 199, (1989)
[18] どのような状況でこの仮定が本当に正当化できるのか、エネルギーギャップの存在、相互作用、特異点の保存、その他この点が本質的に重要ではある。



ここで $\theta=-m\pi$:m は奇数の場合を考えると、2粒子を入れ替えたときの位相が $e^{-im\pi}=-1$ であるから粒子系はやはりふつうのフェルミ統計に従う電子系である。更に、このときのランダウ準位の占有率は

$$\nu=\frac{n}{(m-1)n+1}$$

となるが、分母の $(m-1)n+1$ は奇数であり、これが分数量子ホール効果をおこす状態であると考えられる (Jain の構成法)。すなわち分数量子ホール効果をおこす系は整数量子ホール効果の系と長距離の物理に関しては同等であると主張する。

もう一つのコメントとして $n=1$ の場合、この直線は原点を通るすなわち、$\theta=0, \frac{1}{\nu}=0$ ($N_\phi=0$): 磁場のない (ハードコア) ボゾン系をもその系列に含む。よって $\nu=1/m$ 状態は磁場のない (ハードコア) ボゾン系に帰着することをも主張する。[19]

4 予定していたが省略した話題

いくつか話題にしようと考えていたが時間の関係で省略した話題がいくつかある。それを最後に書き並べたい。[20]

- もう一つの分数統計

量子ホール効果においては先ほどでてきた Anyon としての分数統計の他にパウリの

[19] 2次元ハードコアボゾン系での Quasi Long Range Order をここでの議論から量子ホール効果におけるものへ読み直すことができる。ただそこにでてくる相関関数は近距離の演算子の2体相関という形ではなく切り張りした磁束の効果をとりこむために "ストリング" 型の長距離なものとなる。量子ホール効果においては系にエネルギーギャップがあるため通常の（準）長距離秩序の形成は起こらないが、ストリング型の秩序変数は基底状態の波動関数の位相の構造をうまく拾い出していると考えることができよう。この点で次元さえ異なるが1次元整数スピン系（Haldane 系）でのストリング秩序との類似に注意しておきたい。

[20] 最近の発展もいろいろあるがここでは触れないことにする

排他律を拡張した排他的分数統計があらわれ、これも面白い。

- **磁場中の電子系の代数的側面（量子群）**

最初に触れたように磁場があると電子が運動する際に受ける位相変化がその履歴に依存する。例えば A によってから B にいくのと B によってから A にいくのとで位相が異なることとなる。一方量子群という新しい代数構造が数学、物理で最近話題となっているがそこでの一つの関係式は例えば

$$AB = qBA$$

等とかかれるがこの非可換性は $q = e^{i\phi}$ とすれば今議論してきた磁場中の電子系のものににている（と思いませんか）。この議論はただ似ているというだけでなく、実際使える段階まで現実的なものとしていろいろな話題があるが、[21] 以下すべて省略する。(ベーテ仮設方程式と磁場中の電子、ベーテ仮設方程式が解けた！、ベーテ仮設方程式のフラクタルな解 $\cdots$)

[21] P. B. Wiegmann and A. V. Zabrodin, Phys. Rev. Lett. **72** 1890 (1994),
Y. Hatsugai, M. Kohmoto, and Y. S. Wu, Phys. Rev. Lett. **73** 1134 (1994).