

カオス力学系のトポロジカルな取り扱い

本池 巧, 有光 敏彦*

湘北短期大学 電子情報学科

*筑波大学 物理学系

1 アトラクタのトポロジカルな特徴付け

19 世紀末、E. ポアンカレは微分方程式の解の性質を調べるために、解全体を流れのある断面上での写像に置き換え、その写像の不動点やリミットサイクルなどの性質によって解を特徴付ける方法を考案した。その後、この方法はポアンカレ断面法と呼ばれ、微分方程式で記述される連続力学系の解析方法の主流となった。しかし、ポアンカレ断面法ではとらえきれない更に詳しい軌道の性質を知るためには、軌道全体の性質を解析する方法が必要となる。我々は、そのような手段の一つとして、軌道の持つトポロジカルな量によって軌道の特徴付ける方法について考える。

我々が主な対象とするのは、力学系のアトラクタである。連続力学系のアトラクタとしては、大別して、不動点、周期軌道、ストレンジアトラクタの三種類がある (図 1)。これ

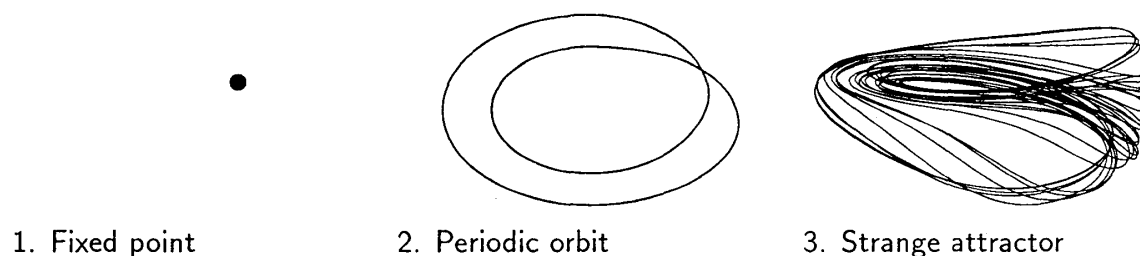


図 1: 三種類のアトラクタ

ら三種類のアトラクタのトポロジカルな特徴付けについて考えて見よう。一番目の不動点に関しては、単なる点であるためトポロジカルな構造は自明であり、特徴付けは不動点近傍の流れの安定性により行うことができる。二番目の周期軌道では、結び目と同様な特徴付けが可能であり、様々な結び目不変量によって周期軌道の特徴付けることができる。三番目のストレンジアトラクタに関しては、今のところ直接特徴付ける方法は見付かっていない。しかし、ストレンジアトラクタに埋め込まれているいくつかの不安定周期軌道を用いて、間接的に特徴付けることが可能である (図 1)。

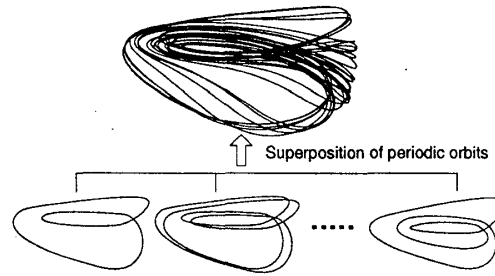
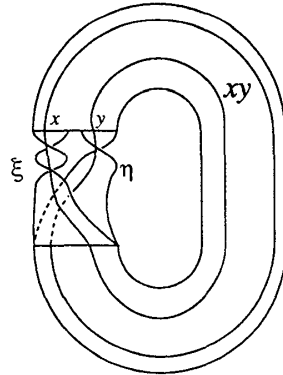


図 2: ストレンジアトラクタの特徴付け

ここでは、二番目の周期軌道のトポロジカルな特徴付けを簡単に触れた後、三番目のストレンジアトラクタの特徴付けについて述べ、さらに厳密計算可能な連続区分線形系を例に、この手法の有効性について議論していく。

2 周期軌道のトポロジカルな特徴付け

交差点数 c_0 の n -周期軌道が、周期倍分岐により様々な $n \times 2^n$ 周期軌道が作り出されている場合を考えてみよう。このような状況に対し、我々は、Holmes-Williams[3] の考案したテンプレートを拡張し、 (ξ, η) -テンプレートを導入した [1, 2]。拡張されたテンプレート上

図 3: (ξ, η) -テンプレートと xy と記述される周期軌道

に周期軌道を配置し、その軌道がテンプレートの x または y の枝をどのような順に通過するかを、 x または y の二つの記号からなる列によって記述する。したがって、全ての軌道は x, y からなる記号列で特徴付けられることになる。我々は、全ての周期倍分岐における軌道は、このテンプレートと二文字の記号力学において許される記号列

$$W = \{y, xy, xy^3, xy^3(xy)^2, xy^3(xy)^2(xy^3), \dots\}, \quad (1)$$

により特徴付け可能であることを示した [1, 2]。

テンプレートを特徴付ける二つのパラメータ (ξ, η) を実験や数値計算のデータより求めるには、分岐前の軌道に沿った分岐後の軌道の半捻り (図 4) の数である局所交差数を用いると便利である。

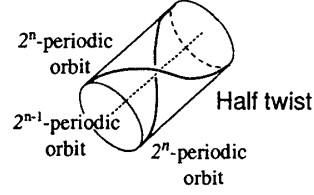


図 4: 分岐前の軌道に沿った分岐後の軌道の半ひねり

(ξ, η) は、2 周期および 4 周期軌道の局所交差数 C_1 と C_2 より、

$$\xi = C_2 - C_1, \quad \eta = C_1, \quad (2)$$

で与えられる。

2.1 軌道の絡み数、交差点数

C_n を 2^n -周期軌道の局所交差数、 c_n を 2^n -周期軌道の交差点数、 $\ell_{n+1,n}$ を 2^{n+1} -周期軌道と 2^n -周期軌道の絡み数とする。これら三つのトポロジカルな量は、漸化式

$$\begin{aligned} C_{n+2} &= C_{n+1} + 2C_n, \quad n > 1, \\ C_1 &= \eta, \quad C_2 = \xi + \eta, \end{aligned} \quad (3)$$

$$c_{n+1} = 4c_n + C_{n+1}, \quad n > 0, \quad (4)$$

$$\ell_{n+1,n} = 2c_n + C_{n+1}, \quad n > 0. \quad (5)$$

を満たし、これらを解くと、

$$C_n = \lambda_n \xi + \lambda_{n+1} \eta, \quad (6)$$

$$c_n = 4^n c_0 + \frac{1}{8} \xi (\kappa_{n+1} - \lambda_{n+2}), \quad (7)$$

$$\ell_{n+1,n} = 2 \cdot 4^n c_0 + \xi \kappa_n + \eta \kappa_{n+1}, \quad (8)$$

を得る。ただし

$$\lambda_n = \frac{1}{3} (2^n - (-1)^n), \quad (9)$$

$$\kappa_n = \frac{1}{5} (4^n - (-1)^n) \quad (10)$$

である。

3 ストレンジアトラクタの特徴付け

ストレンジアトラクタは不安定周期軌道と非周期軌道の集まりとみなすことができ、非周期軌道は不安定周期軌道の極限として捉えることができる。このような観点より、不安定周期軌道をストレンジアトラクタの骨格とみなし、ストレンジアトラクタを不安定周期軌道の性質を用いて特徴付けることにする。

周期倍分岐の場合と同様にテンプレートを用いて不安定周期軌道の特徴付けるのだが、その際、 (ξ, η) -テンプレートを、 x でラベルされた枝と y でされた枝が互いに絡みあうように拡張したテンプレートを用いる(図5)。各周期軌道は、周期倍分岐の時と同様に二文字の記号力学において許される記号列によって特徴付けることにする。

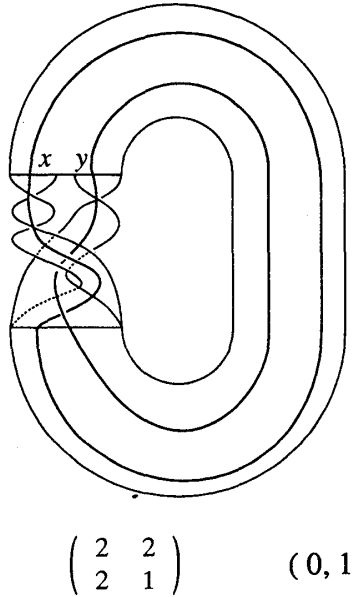


図 5: 拡張されたテンプレート

拡張したテンプレートを、Mindlin ら [4]-[6] により導入されたテンプレート行列:

$$\begin{pmatrix} \xi & 2\ell(x, y) \\ 2\ell(x, y) & \eta \end{pmatrix}, \quad (0, m), \quad (11)$$

により特徴付ける。 ξ と η は (ξ, η) -テンプレートと同じものである。 $\ell(x, y)$ は周期軌道 x と y の絡み数で、 m は、 y の枝が x の枝の上に重なる $m = 1$ であり、下に重なる場合 $m = -1$ である。

ここで我々は、「周期倍分岐カスケードにおいて観測された周期軌道は不安定化した後も、そのトポロジカルな構造は保ったままカオス領域においても存在し続ける」という仮説をたてる。周期倍分岐領域およびカオス領域での2周期および4周期の絡み数を等しいとして得られる関係式:

$$\ell_{1,0} = \ell(xy, y), \quad (12)$$

$$\ell_{2,1} = \ell(xy^3, xy), \quad (13)$$

より、テンプレート行列 (11) の二つの数 $\ell(x, y)$ と m を以下のように求めることができる [7, 8]:

$$\ell(x, y) = 2c_0 + \frac{\xi}{2}, \quad (14)$$

$$m = \xi - \eta. \quad (15)$$

この仮説の正当性を示す例として、損失変調レーザーモデル [9] の数値シミュレーションにおいて観測されるストレンジアトラクタを考える。ストレンジアトラクタ中に埋め込まれた不安定周期軌道の絡み数 $L(i, j)$ の結果を表 1 に示す [7, 8]。

表 1: 損失変調レーザーモデルでの不安定周期軌道の絡み数 $L(i, j)$

	1	2	4	5	6
1	0				
2	1	1			
4	2	5	7		
5	3	6	12	12	
6	3	7	14	16	16

このストレンジアトラクタを生み出す周期倍分岐カスケードにおいて観測される周期軌道は、(2, 1)-テンプレートで特徴付けることができることが分かっている [1, 2]。周期倍分岐での結果、

$$\xi = 2, \quad \eta = 1, \quad c_0 = 0, \quad (16)$$

を (14) および (15) 式に代入すると、

$$\ell(x, y) = 1, \quad m = 1 \quad (17)$$

を得る。この値を用いて各周期軌道間の絡み数 $L(i, j)$ を求めた結果と、表 1 の結果を比較すると、 $L(6, 5)$ および $L(6, 6)$ を除いて全て一致する。長い周期の周期軌道間の絡み数のずれは数値計算による誤差が原因と思われるため、我々の仮説は正しいと推測される。

4 テンプレートと流れの関係

周期倍分岐領域でのテンプレートによる特徴付けの正当性は既に確かめられている [1, 2]。しかし、カオス領域において先の仮説に基づいたテンプレートによる特徴付けが本当に正しいかどうか不明である。そこで、厳密計算可能な連続区分線形系 [10, 11] を用いて、テンプレートによる記述および仮説の正当性を調べることにする。

4.1 連続区分線形版 Duffing 方程式

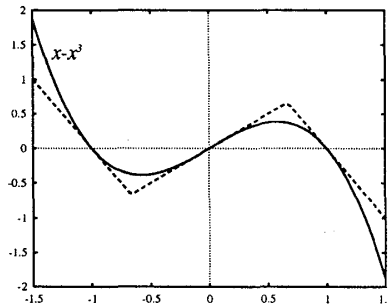


図 6: $x - x^3$ の折れ線近似

図 6 のように、Duffing 方程式 $\ddot{x} + k\dot{x} - x + x^3 = \delta \cos \omega t$ の非線形項 $x - x^3$ を折れ線近似した方程式:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + 2x - \frac{3}{2} \left| x - \frac{2}{3} \right| + \frac{3}{2} \left| x + \frac{2}{3} \right| = \delta \cos \omega t, \quad (18)$$

を考える。図 7 は、 $k = 0.1$ 、 $\omega = 1.0$ に固定し、外力の振幅 δ を変化させて得られる分岐図である。シンボルでプロットした点が厳密計算の結果で、点によるプロットおよび実線による表示は数値シミュレーションによる結果である。

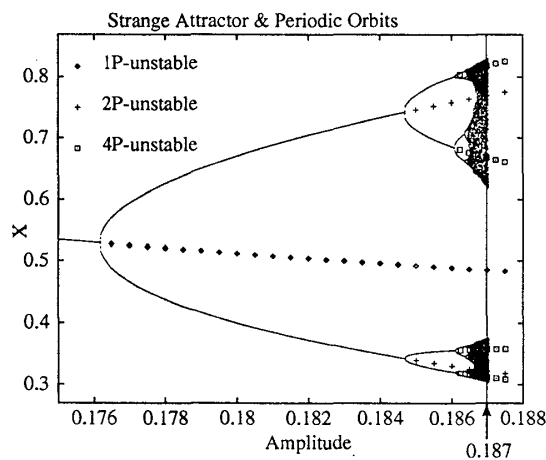


図 7: 区分線形 Duffing 方程式の分岐図

当然の結果ではあるが、両者の結果はよく一致している。ただし、厳密計算では、数値シミュレーションで得られない不安定化後の周期軌道がうまくとらえられている。

4.2 周期倍分岐領域

周期倍分岐で求められた 2^n 周期軌道のデータをもとに各軌道間の絡み数を求めると、表 2 のようになる。この値より、テンプレートの特徴付けるパラメータは

$$\xi = 2, \quad \eta = 1, \quad c_0 = 0, \quad (19)$$

と求まる。このパラメータで与えられるテンプレートは図 3 で示したテンプレートと同じものである。

表 2: 各周期軌道間の絡み数

n	0	1	2	3
$\ell_{n+1,n}$	1	5	19	-
c_n	0	1	7	33

4.3 カオス領域

カオス領域 $\delta = 0.1870$ において、六つの不安定 1, 2, 4, 6, 8, 10 周期軌道を厳密に求めることができた。このデータをもとに各軌道間の絡み数を求めると、表 3 のようになる。

表 3: 不安定周期軌道の絡み数 $L(i, j)$

	1	2	4	6	8	10
1	0					
2	1	1				
4	2	5	7			
6	3	7	14	17		
8	4	10	19	28	33	
10	5	12	24	35	48	53

周期倍分岐軌道の不変性の仮説に基づく関係式 (14) と (15) より、 $\ell(x, y)$ と m は、

$$\ell(x, y) = 1, \quad m = 1, \quad (20)$$

となる。したがって、テンプレート行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (0, 1), \quad (21)$$

となり、これは図5で示したテンプレートと同じものを与える。このテンプレートをもとに、各周期軌道に対し二文字の記号力学で許される記号列を総当たりであてはめた結果、表4のように記号列を割り当てると、表3の絡み数の結果を全て矛盾なく説明できることが分かった。

表 4: 総当たりで求めた各不安定周期軌道に対する記号列

周期	1	2	4	6	8	10
記号列	\bar{y}	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{y}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{y}\bar{y}\bar{y}\bar{y}$ または $\bar{x}\bar{y}\bar{y}\bar{y}\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{y}\bar{y}\bar{x}\bar{y}\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{y}\bar{y}\bar{x}\bar{y}\bar{x}\bar{y}\bar{y}\bar{y}$ または $\bar{x}\bar{y}\bar{y}\bar{y}\bar{x}\bar{y}\bar{x}\bar{y}\bar{x}\bar{y}$

4.4 テンプレートの構造と不安定多様体の比較

カオス領域における流れの構造は、1周期軌道の不安定多様体によって支配されていると考えられる。このことは、全ての不安定周期軌道およびストレンジアトラクタが1周期軌道の不安定多様体の近傍に存在することから確認されている。したがって、不安定多様体の構造を調べることによりストレンジアトラクタを作り出している流れの大まかな構造を知ることが可能となる。図8は、1周期軌道を中心に不安定多様体の構造を図示したものである。底面および上面がそれぞれ $t = 0$ および $t = 2\pi$ のポアンカレ断面になっており、軌道は下から上へと進む。

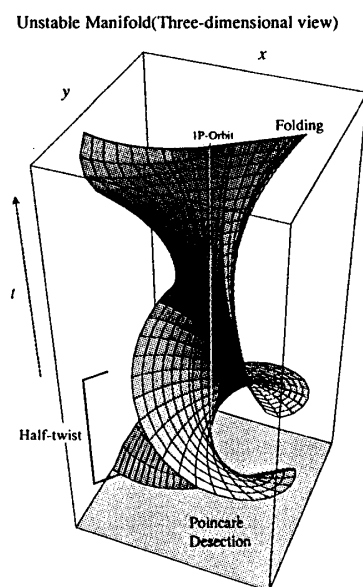


図 8: 1 周期軌道の不安定多様体

図8のテンプレートの構造を簡略化したものが図9(a)である(ただし、テンプレートの図と整合性をとるため上下を逆にしてある)。図9に示されるように変形していくと、最終的に図9(e)の多様体を得られる。図9(e)の多様体は(21)のテンプレート行列で特徴付け

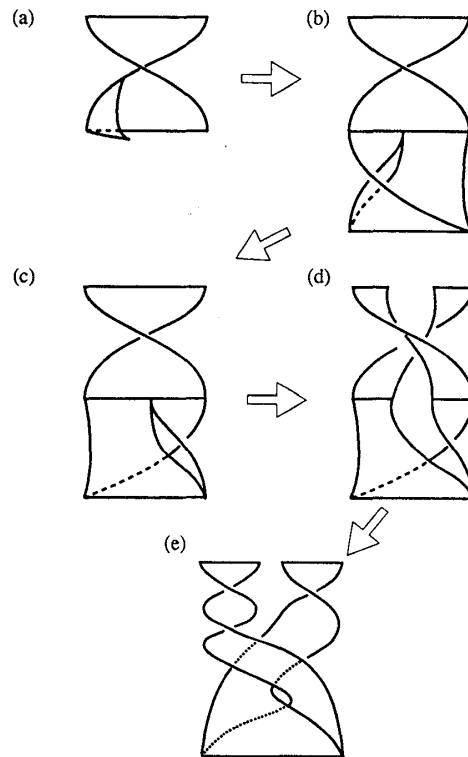


図9: 不安定多様体の折れ畳み構造

られる図5のテンプレートと全く同じ構造を持つ。したがって、テンプレートによる記述は、実際の流れの持つ捻りと折れ畳み構造を簡略化したモデルになっていることが確認できた。

4.5 不安定多様体上のダイナミクスの検証

最後に、各周期軌道のデータと1周期軌道の不安定多様体の構造から各周期軌道に対し x および y からなる記号列を割り当て、その結果と二文字の記号力学の結果を比較することで、テンプレートと記号力学を用いた解析方法の妥当性を確認する。

不安定多様体は、一周周期軌道に沿った捻りと降り曲げの二つの構造を持つ。不安定多様体のポアンカレ断面上の点に対して、以下の規則で軌道に x と y を割り当てる:

- 不安定多様体の折り曲げられる部分の点には文字 x を割り当てる。
- 不安定多様体の折り曲げのない部分の点には文字 y を割り当てる。

軌道の時間発展より、各周期軌道に対して記号列を割り当てた結果を表5に示す。

表 5: 軌道データより構成した記号列

周期	1	2	4	6	8	10
記号列	\bar{y}	\overline{xy}	\overline{xyyy}	\overline{xyyyyy}	$\overline{xyyyxyxy}$	$\overline{xyyyxyxyyy}$

この結果は表4の総当たりで求めた結果と一致するので、記号力学による特徴付けは正しいものと思われる。しかし、偶然の一致の可能性もあるため、間接的な方法ではあるが、記号力学を生み出す一次元写像の存在を示すことにする。

そのためには、記号力学で定義される記号列の順序と軌道のポアンカレ断面上での幾何学的な順序が一致することを示さなければならない。各軌道とポアンカレ断面との交点を、不安定多様体の折曲げを無視した曲線(図10中の点線の曲線)を考え、その曲線に沿って左側の点が右側の点より大きくなるように順序付けることにする。

図10は、ポアンカレ断面上において各不安定周期軌道の交点の中の最小の点をプロットしたものである。この図から、各周期軌道の点は、

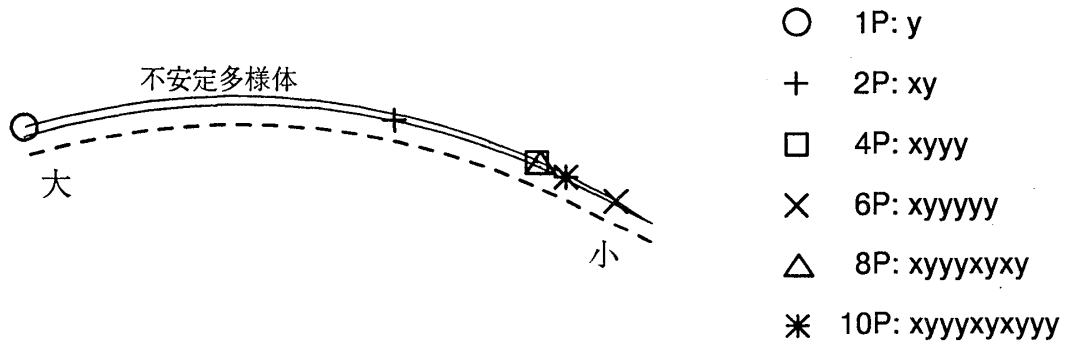


図 10: 周期軌道の順序

$$\bar{y} > \overline{xy} > \overline{xyyy} > \overline{xyyyxyxy} > \overline{xyyyxyxyyy} > \overline{xyyyyy} \quad (22)$$

と順序付けられていることになる。この順序は、記号力学での順序と一致する。このことは、「各周期軌道の運動が、点線で示されるの曲線に沿った一次元写像により構成できる」ことを示唆する。

5 まとめ

我々は、結び目の不変量を用いて周期軌道のトポロジカルな特徴付けを行い、さらにそこに埋め込まれている不安定周期軌道を用いてストレンジアトラクタを特徴付けた。その際、テンプレートおよび記号力学を導入することで軌道の性質の記述が簡略化され、周期倍分岐領域からカオス領域にわたる全ての周期軌道のトポロジカルな性質の特徴付けがテンプレートにより実現可能であることを示した。テンプレートの構造を決める四つのパラ

メータ $\xi, \eta, \ell(x, y), m$ は、周期倍分岐の初めの二つの周期軌道から得られる局所交差数 C_1 と C_2 および 1 周期軌道の交差点数 c_0 によって、

$$\xi = C_2 - C_1, \quad \eta = C_1, \quad \ell(x, y) = 2c_0 + \frac{C_2 - C_1}{2}, \quad m = C_2 - 2C_1, \quad (23)$$

で与えられることを示した。このことは、周期倍分岐領域からカオス領域にかけて存在する全ての周期軌道のトポロジカルな性質およびストレンジアトラクタの構造が、周期倍分岐カスケードの初めの二つの分岐により決定されることを意味する。最後に、以上のことを厳密計算可能な区分線形系を用いて検証した。そこで得られた 1 周期軌道の不安定多様体はテンプレートと類似の構造を持っており、テンプレートが流れの構造をうまく反映していることを示した。さらに、テンプレートおよび記号力学の一貫性を確認した。

参考文献

- [1] T. Motoike, T. Arimitsu and H. Konno, Phys. Lett. A **182** (1993) 373.
- [2] T. Arimitsu and T. Motoike, Physica D **84** (1994) 290.
- [3] P. Holmes and R. F. Williams, Arch. Rat. Mech. and Anal. **90** (1985) 115.
- [4] G. B. Mindlin, X. J. Hou, H. G. Solari, R. Gilmore and N. B. Tufillaro, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 2350.
- [5] G. B. Mindlin, H. G. Solari, M. A. Natiello, R. Gilmore and X. J. Hou, J. Nonlinear Sci. **1** (1991) 147.
- [6] G. B. Mindlin and R. Gilmore, Physica D **58** (1992) 229.
- [7] H. Yamazaki, M. Thesis (in Japanese), University of Tsukuba (1995) unpublished.
- [8] H. Yamazaki, T. Motoike and T. Arimitsu, 物性研究 **66** (1996) 460.
- [9] J. R. Tredicce, F. T. Arecchi, G. P. Puccioni, A. Poggi and W. Gadomski, Phys. Rev. A **34** (1986) 2073.
- [10] M. Komuro, Japan J. Ind. Appl. Math. **9** (1992) 269.
- [11] M. Komuro, R. Tokunaga, T. Matsumoto, L. O. Chua and A. Hotta, Int. J. Bifurcation and Chaos, **1** (1991) 139