最適信号検出過程と量子測定

番　雅司

日立製作所基礎研究所

〒 350-03 埼玉県比企郡鳩山町赤沼 2520

1　はじめに

近年、量子情報理論の研究が欧米を中心に精力的に進められている [1,2]。量子情報理論はその名前が示す通り、量子物理学と情報科学の境界領域に位置する研究分野であり、量子力学、情報理論及びその基礎となる数学の各方面で研究されている。その研究目的は大きく３つからなると考えられる。第一番目は情報理論における諸概念を量子力学に応用し、量子力学の理解に新たな光をあてようというものである。第二番目は量子情報理論の数学的理論体系の研究である。第三番目は量子力学の原理を利用して古典情報理論では不可能である新しい情報通信・処理の研究である。量子暗号や量子計算がこの代表例である。特に量子計算の研究は、AT&T ベル研究所の P. Shor が素因数分解の量子アルゴリズムを発見して以来、多くの研究者の注目を集める所となった [3]。最近では、量子誤り訂正符号に関する論文が多数発表されている。また、量子暗号に関しては光ファイバーを利用した原理実験にも成功している。古典情報理論の基礎は Shannon が発見した情報源符号化定理（Shannon の第一定理）と通信路符号化定理（Shannon の第二定理）[4] であるが、これらの定理の量子力学版（量子情報源符号化定理と量子通信路符号化定理）も最近アメリカやロシアのグループによって証明されている [5–7]。

ところで、古典情報理論と量子情報理論の最も大きな違いは、古典情報理論が情報を担う物理系を分離して物理学とは独立に展開出来たのに対して、量子情報理論は情報を表現する物理系と本質的に不可分なことである。このことを明確に表わした次の２つの標語がＡＩＰ (American Institute of Physics) のホームページ (http://www.aip.org/physnews/1997/qinfo) の量子情報理論の解説記事の中に掲げられている。

"There is no information without representation."

"There is no processing without a process."

量子情報理論は現在数学、物理学、情報科学の各方面において盛んに研究されているが、量子情報理論の研究の歴史は古く、1970年代のHelstrom [8]、Holevo [9,10]、Yuen [11] らの研究にまで遡ることができる。これらの理論は量子決定理論及び量子推定理論と呼ばれ、量子状態の測定過程の研究や量子通信系における信号検出過程（量子受信機）の研究に応用されている。以下では、量子決定理論に関する筆者らの最近の研究結果を報告する [12–16]。

2 量子情報・通信システムにおける信号検出過程

量子通信システムにおける受信信号に対する信号検出過程は物理系に対する量子測定に他ならない。通常の物理学における量子測定との違いは次の点にある。物理学では測定される物理系の量子状態は未知であるが、同一の物理系を複数或いはくり返し準備することによって何度でも測定を行なうことが原理的に可能である。一方、量子通信系における量子測定では、測定される物理系は確率 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $\left(\sum_{j=1}^{n} p_j = 1\right)$ で量子状態 $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \ldots .\hat{\rho}_n$ をとることが予め分かっているが、許される量子測定は一つの信号に対して一回限りである[1]。この意味で $p_1, p_2, \ldots, p_n$ は先験確率と呼ばれる。量子通信系では１回の測定でどの量子状態 $\hat{\rho}_j$ を受信したかを判断しなければならない。

一般に量子測定は確率作用素測度を用いて記述することができる。測定結果から受信された信号の量子状態が $\hat{\rho}_j$ であるとを示す過程を記述する確率作用素測度を $\hat{\Pi}_j$ と表わし、決定作用素と呼ぶ。決定作用素 $\hat{\Pi}_j$ は次の性質を満足する。

$$\hat{\Pi}_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} \hat{\Pi}_j = \hat{I}. \tag{1}$$

ここで、$\hat{I}$ は単位作用素である。このとき、量子状態 $\hat{\rho}_k$ が送られたときに受信された量子状態が $\hat{\rho}_j$ と判断される条件付き確率 $P(j|k)$ や測定結果が量子状態 $\hat{\rho}_j$ である出力確率 $P_{\mathrm{out}}(j)$ はそれぞれ次の式で与えられる。

$$P(j|k) = \mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j \rho_k], \qquad P_{\mathrm{out}}(j) = \sum_{k=1}^{M} P(j|k) p_k. \tag{2}$$

---

[1] もちろん、送信者に同じ信号をくり返し送信してもらうことも可能であるが、そのようなことを行なえば情報伝送速度が低下し、効率的な情報の伝達を行なうことが出来ない。

統計作用素 $\hat{\rho}_j$ と (1) 式で与えられる決定作用素の性質によって、これらの量が確率としての意味を持つことが保証される。量子状態 $\hat{\rho}_k$ が送信されたにも関らず、量子測定の結果、量子状態 $\hat{\rho}_{j\neq k}$ が得られるとき、信号検出誤りが起こる。この場合、信号検出過程の平均誤り確率 P_{e} は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{e}} &= P_{\mathrm{e}}(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\rho}_k]) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq j)}}^{n} P(j|k)p_k \\ &= 1-\sum_{j=1}^{n} P(j|j)p_j \\ &= 1-\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\rho}_j]p_j. \end{aligned} \tag{3}$$

一方、信号検出過程によって得られる情報量 I は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} I &= I(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\rho}_k]) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(j|k)p_k \ln\left[\frac{P(j|k)}{P_{\mathrm{out}}(j)}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\rho}_k]p_k \ln\left[\frac{\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\rho}_k]}{\sum_{m=1}^{M}\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\rho}_m]p_m}\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

したがって、信号の受信側は平均誤り確率 P_{e} が最小になるような量子測定や得られる情報量 I を最大にするような量子測定を行なわなければならない。

ここで簡単な例を考えよう。送信者は信号 0 として偶コヒーレント状態 $|\alpha_1\rangle$ を送り、信号 1 として奇コヒーレント状態 $|\alpha_2\rangle$ を等しい先験確率 $(p_1 = p_2 = \frac{1}{2})$ で送るとしよう。即ち、送信者は偶／奇コヒーレント状態を用いて 1 信号当たり 1 ビットの情報を送る。偶／奇コヒーレント状態 $|\alpha_1\rangle$ と $|\alpha_2\rangle$ は次の式で与えられる。

$$|\alpha_1\rangle = \frac{|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle}{\sqrt{2[1+\exp(-2|\alpha|^2)]}}, \tag{5}$$

$$|\alpha_2\rangle = \frac{|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle}{\sqrt{2[1-\exp(-2|\alpha|^2)]}}. \tag{6}$$

ここで、$|\alpha\rangle$ は通常のコヒーレント状態である。ところで、偶コヒーレント状態は偶数個の光子を含み、奇コヒーレント状態は奇数個の光子しか含まないので、信号の受信者は理想的な光子計数を行ない、偶数個の光子が検出されれば信号 0 を

受信したと判断し、奇数個の光子が検出されれば信号1を受信したと判断すればよい。このような信号検出過程を記述する決定作用素は次の式で与えられる。

$$\hat{\Pi}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |2n\rangle\langle 2n|, \tag{7}$$

$$\hat{\Pi}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} |2n+1\rangle\langle 2n+1|. \tag{8}$$

ここで、$|n\rangle$ は光子数の固有状態である。このとき、条件付き確率は $P(j|k) = \delta_{jk}$ となり、信号検出過程の誤り確率はゼロであり、得られる情報量は1ビットである。

$$P_{\mathrm{e}}(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j \hat{\rho}_k]) = 0, \quad I(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j \hat{\rho}_k]) = \ln 2. \tag{9}$$

ここで、情報量を $\log_2$ を用いて表現するときの単位がビットであり、自然対数 ln を用いて表わすときの単位はナットと呼ばれる。従って、N ナットは $N/\ln 2$ ビットである。本報告では数学的取り扱いが便利なナットを情報量の単位として用いることにする。

上記の例では検出誤りはゼロであり、受信者は送信者が送った情報を全て得ることができる。このような完全な信号検出が可能なのは偶コヒーレント状態と奇コヒーレント状態が互いに直交する為である。即ち、互いに直交する量子状態は適当な量子測定を行なうことによって完全に区別することが出来るからである。一方、非直交量子状態はどのような量子測定を行なっても完全には区別出来ない。この為に、送信者が非直交量子状態を用いて情報伝送を行なった場合、受信者の検出誤りはゼロにはならず、得られる情報量も送信者が送った情報量よりも少なくなる。光通信で用いられるコヒーレント状態や量子暗号で重要な役割を果たす量子状態は殆どすべて非直交量子状態である。そこで、受信者がどのような量子測定を行なえば最も有効であるかという問題が生じる。この問題に解答を与えるのが量子決定理論（量子力学的仮説検定理論）である [8,9,11]。

3　信号検出過程の最適化理論

信号検出過程は決定作用素 $\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2, \ldots, \hat{\Pi}_n$ によって記述され、平均誤り確率 P_{e} や情報量 I はこれらの決定作用素を用いて表現される［(3) 式と (4) 式を参照］。従って、量子決定理論の目的は平均誤り確率 P_{e} を最小にする決定作用素や情報量 I を最大にする決定作用素を求めることである。これらの最適化は形式的に次の式

で表わされる。

$$P_{\min} = \min_{\hat{\Pi}\in\mathcal{S}} P_{\mathrm{e}}(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\rho}_k]), \tag{10}$$

$$I_{\max} = \max_{\hat{\Pi}\in\mathcal{S}} I(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\rho}_k]). \tag{11}$$

ここで、$\mathcal{S}$ は決定作用素全体の集合を表わす。

$$\mathcal{S} = \left\{\hat{\Pi} = (\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2, \ldots, \hat{\Pi}_n) \,|\, \hat{\Pi}_j \geq 0,\ \textstyle\sum_{j=1}^{n} \hat{\Pi}_j = \hat{I}\right\}. \tag{12}$$

即ち、与えられた信号量子状態 $\{\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \ldots, \hat{\rho}_n\}$ と先験確率 $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ の下での平均誤り確率 P_{e} を最小、あるいは情報量 I を最大にする信号検出過程を記述する決定作用素 $\hat{\Pi} = (\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2, \ldots, \hat{\Pi}_n)$ を集合 $\mathcal{S}$ の中から見つけなければならない。

決定作用素 $\hat{\Pi} = (\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2, \ldots, \hat{\Pi}_n)$ が平均誤り確率 P_{e} を最小にする為に満足しなければならない必要十分条件は Holevo [9] や Yuen ら [11] によって次のような形に求められている。

$$P_{\min} = \min_{\hat{\Pi}\in\mathcal{S}} P_{\mathrm{e}}(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\rho}_k]) \iff \begin{cases} \hat{\Pi}_j \left[p_j\hat{\rho}_j - p_k\hat{\rho}_k\right] \hat{\Pi}_k = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k\hat{\rho}_k\hat{\Pi}_k = \sum_{k=1}^{n} p_k\hat{\Pi}_k\hat{\rho}_k \geq p_j\hat{\rho}_j \end{cases} \tag{13}$$

一方、情報量 I の最大化に関しては必要条件は求められているが十分条件は現在のところ分かっていない。決定作用素 $\hat{\Pi} = (\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2, \ldots, \hat{\Pi}_n)$ が情報量 I を最大にする為の必要条件は次の式で与えられる [9]。

$$I_{\max} = \max_{\hat{\Pi}\in\mathcal{S}} I(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\rho}_k]) \implies \hat{\Pi}_j \left[\hat{F}_j - \hat{F}_k\right] \hat{\Pi}_k = 0 \tag{14}$$

ここで、作用素 $\hat{F}_j$ は次の式で定義される。

$$\hat{F}_j = \sum_{k=1}^{n} p_k\hat{\rho}_k \ln\left[\frac{\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\rho}_k]}{\sum_{m=1}^{n}\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\rho}_m]p_m}\right]. \tag{15}$$

これらの条件を満足する最適決定作用素の基本的性質は次のように纏めることができる。

1. 平均誤り確率 P_{e} を最小にする決定作用素や情報量 I を最大にする決定作用素は必ずしも一意的ではない。このことは、最適な信号検出過程を実現する為の量子測定は必ずしも一つとは限らないことを意味する。

2. 2元量子信号系 ($n = 2$) の場合、平均誤り確率 P_e を最小にする決定作用素、及び情報量 I を最大にする決定作用素は射影作用素になる。

$$\hat{\Pi}_j \hat{\Pi}_k = \hat{\Pi}_k \hat{\Pi}_j = \delta_{jk} \hat{I}. \tag{16}$$

勿論、射影空間の次元は信号量子状態の性質に依存する。

3. 信号量子状態が線形独立な純粋量子状態 $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle\}$ で与えられる場合、平均誤り確率 P_e を最小にする決定作用素は1次元射影作用素になる。

$$\hat{\Pi}_j = |\phi_j\rangle\langle\phi_j|, \quad \langle\phi_j|\phi_k\rangle = \delta_{jk}, \quad \sum_{j=1}^{n} |\phi_j\rangle\langle\phi_j| = \hat{I}. \tag{17}$$

従って、$\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \ldots, |\phi_n\rangle\}$ は信号量子状態の Hilbert 空間の一つの完全正規直交系である。即ち、平均誤り確率を最小にする決定作用素を求める問題は適当な完全正規直交系を求める問題に帰着される [15]。

決定作用素に対するこれらの最適化条件 (13)–(15) は作用素の非線形方程式である為に一般に解くことは非常に困難である。現在までのところ、自明な場合や非常に特殊な場合にのみ解が知られている [12]。この為に多くの場合、決定作用素を求めることを諦め、平均誤り確率の最小値を数値的に求めることが行われる。しかし、このようなアプローチでは平均誤り確率の最小値は求めることができても、それを実現する為の量子測定は未知のままである。最適信号検出過程を実現する為の量子測定を系統的に求める為には決定作用素を求めることが必要不可欠である。

4 対称量子信号系に対する最適受信過程の厳密解

この節では、信号量子状態がある対称性を持つ場合、(13)–(15) 式で与えられる最適化条件を満足する決定作用素の厳密な解析解を求めることができる [16]。ここでは送信者が等しい先験確率を持つ n 元対称信号 $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \ldots, \hat{\rho}_n$ を用いて情報を送る場合を考える。このとき量子状態 $\hat{\rho}_j$ は次の性質を満足する。

$$\hat{\rho}_j = |\psi_j\rangle\langle\psi_j| = \hat{V}^{j-1}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{V}^{\dagger j-1}, \tag{18}$$

$$\hat{V}\hat{V}^\dagger = \hat{V}^\dagger\hat{V} = \hat{I}, \quad \hat{V}^n = \hat{I}, \quad p_j = \frac{1}{n}. \tag{19}$$

このように定義された量子状態 $\hat{\rho}_j$ は次の関係式を満足する。

$$\hat{\rho}_{j\pm n} = \hat{\rho}_j. \tag{20}$$

このような性質を満足する信号系の代表的な例としては次のようなものがある。

- 任意の線形独立な純粋量子状態 $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ で表される 2 元信号系。

- n 元 PSK コヒーレント信号系 $\{|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \ldots, |\alpha_n\rangle\}$:

$$|\alpha_j\rangle = \hat{V}^{j-1}|\alpha\rangle, \quad \hat{V} = \exp(-2\pi i\hat{a}^\dagger\hat{a}/n). \tag{21}$$

  ここで、$|\alpha\rangle$ はコヒーレント状態であり、$\hat{a}^\dagger$ と $\hat{a}$ は生成・消滅作用素である。

- n 元スピン信号系 (偏光、量子ビットなど)。

このような対称量子状態信号に対しては、最適検出過程を記述する決定作用素の厳密な解析解を求めることが出来る [16]。次の命題は (18)–(20) 式を満足する信号量子状態 $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle\}$ が線形独立であっても線形従属であっても成り立つ。

命題 1: (18)–(20) 式で与えられる等しい先験確率を持つ n 元対称信号に対して、平均誤り確率が最小になる最適信号検出過程は次の決定作用素で記述される。

$$\hat{\Pi}_j = |\mu_j\rangle\langle\mu_j|, \quad |\mu_j\rangle = \hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}|\psi_j\rangle, \quad \hat{\Phi} = \sum_{j=1}^{n}|\psi_j\rangle\langle\psi_j|. \tag{22}$$

このとき、平均誤り確率の最小値 $P_{\min}$ は次の式で与えられる。

$$P_{\min} = 1 - |\langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}|\psi\rangle|^2. \tag{23}$$

命題 1 の証明: (22) 式で与えられる決定作用素が誤り確率 P_e を最小にする為の必要十分条件 (13) を満足することを示そう。まず、作用素 $\hat{V}$ と $\hat{\Phi}$ の間の関係を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned}
\hat{V}\hat{\Phi}\hat{V}^\dagger &= \sum_{j=1}^{n}\hat{V}|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\hat{V}^\dagger \\
&= \sum_{j=2}^{n}|\psi_j\rangle\langle\psi_j| + |\psi_{n+1}\rangle\langle\psi_{n+1}| \\
&= \sum_{j=2}^{n}|\psi_j\rangle\langle\psi_j| + |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \\
&= \hat{\Phi}.
\end{aligned} \tag{24}$$

従って、作用素 $\hat{V}$ の unitary 性から作用素 $\hat{V}$ と $\hat{\Phi}$ は可換であることが分かる。

$$[\hat{V}, \hat{\Phi}] = 0. \tag{25}$$

そこで、決定作用素 $\hat{\Pi}_j = |\mu_j\rangle\langle\mu_j|$ と統計作用素 $\hat{\rho}_j = |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ を必要十分条件の第1番目の式の左辺に代入し、作用素 $\hat{V}$ と $\hat{\Phi}$ が可換であることを用いると、この左辺は次のように計算することができる。

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_j\left[p_j\hat{\rho}_j - p_k\hat{\rho}_k\right]\hat{\Pi}_k &= \frac{1}{n}|\mu_j\rangle\langle\mu_j|\left(|\psi_j\rangle\langle\psi_j| - |\psi_k\rangle\langle\psi_k|\right)|\mu_k\rangle\langle\mu_k| \\ &\equiv \frac{1}{n}|\mu_j\rangle\mathcal{F}_{jk}\langle\mu_k|.\end{aligned} \tag{26}$$

ここで、$\mathcal{F}_{jk}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{jk} &= \langle\mu_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\mu_k\rangle - \langle\mu_j|\psi_k\rangle\langle\psi_k|\mu_k\rangle \\ &= \langle\psi|\hat{V}^{\dagger j-1}\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}\hat{V}^{j-1}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{V}^{\dagger j-1}\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}\hat{V}^{k-1}|\psi\rangle \\ &\quad - \langle\psi|\hat{V}^{\dagger j-1}\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}\hat{V}^{k-1}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{V}^{\dagger k-1}\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}\hat{V}^{k-1}|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}\hat{V}^{k-j}|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}\hat{V}^{k-j}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}|\psi\rangle \\ &= 0.\end{aligned} \tag{27}$$

従って、平均誤り確率 P_e が最小となる為の必要十分条件の第1番目の関係式が満足される。次に必要十分条件の第2番目の関係式が満足されることを示そう。この為に、$\hat{\Gamma} = \sum_{j=0}^{n} p_j\hat{\rho}_j\hat{\Pi}_j$ と置く。このとき、作用素 $\hat{\Gamma}$ は次のように計算することができる。

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma} &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\mu_j\rangle\langle\mu_j| \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|\psi_j\rangle\langle\psi|\hat{V}^{\dagger j-1}\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}\hat{V}^{j-1}|\psi\rangle\langle\mu_j| \\ &= \frac{1}{n}\langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}|\psi\rangle\sum_{j=1}^{n}|\psi_j\rangle\langle\mu_j| \\ &= \frac{1}{n}\langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}|\psi\rangle\sum_{j=1}^{n}|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{n}\langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}|\psi\rangle\hat{\Phi}\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{n}\langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}|\psi\rangle\hat{\Phi}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{28}$$

従って、$\hat{\Gamma}$ は Hermite 作用素であり、必要十分条件の第2番目の関係式の1番目の等号が成り立つ。この結果を用いると、第2番目の関係式の不等号は次の作用素

が非負であることを意味する。

$$\langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}|\psi\rangle\hat{\Phi}^{\frac{1}{2}} - |\psi_j\rangle\langle\psi_j| = \hat{V}^{j-1}\left[\langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}|\psi\rangle\hat{\Phi}^{\frac{1}{2}} - |\psi\rangle\langle\psi|\right]\hat{V}^{\dagger j-1}$$
$$\equiv \hat{V}^{j-1}\hat{\mathcal{G}}\hat{V}^{\dagger j-1}. \tag{29}$$

非負作用素の unitary 変換は非負であるので、作用素 $\hat{\mathcal{G}}$ が非負であることを示せば十分である。そこで、任意の状態ベクトル $|u\rangle$ に対して、$\langle u|\hat{\mathcal{G}}|u\rangle$ を計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned}\langle u|\hat{\mathcal{G}}|u\rangle &= \langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}|\psi\rangle\langle u|\hat{\Phi}^{\frac{1}{2}}|u\rangle - \langle u|\psi\rangle\langle\psi|u\rangle \\ &= \langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{4}}\hat{\Phi}^{-\frac{1}{4}}|\psi\rangle\langle u|\hat{\Phi}^{\frac{1}{4}}\hat{\Phi}^{\frac{1}{4}}|u\rangle - |\langle\psi|u\rangle|^2 \\ &\geq |\langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{4}}\hat{\Phi}^{\frac{1}{4}}|u\rangle|^2 - |\langle\psi|u\rangle|^2 \\ &= |\langle\psi|u\rangle|^2 - |\langle\psi|u\rangle|^2 \\ &= 0.\end{aligned} \tag{30}$$

ここで、不等号は Schwarz の不等式 $\langle A|A\rangle\langle B|B\rangle \geq |\langle A|B\rangle|^2$ による。従って、必要十分条件の第2番目の関係式が成り立つ。以上のことから、(22) 式で与えられる決定作用素は平均誤り確率 P_e を最小にする信号検出過程を記述する。(証明終)

(22) 式の決定作用素によって記述される信号検出過程を有する量子通信チャンネルを表わす条件付き確率（チャンネル行列）は次の式で与えられる。

$$P(j|k) = \mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\rho}_k] = |\langle\mu_j|\psi_k\rangle|^2 = |(\mathcal{G}^{\frac{1}{2}})_{jk}|^2. \tag{31}$$

ここで、$\mathcal{G}$ は信号量子状態を用いて計算される Gram 行列 ($\mathcal{G}_{jk} = \langle\psi_j|\psi_k\rangle$) である。従って、対称信号系に対する最適化量子通信チャンネルは、信号量子状態の Gram 行列を計算することによって求めることができる。

以上では平均誤り確率の最小化問題を考えたが、(22) 式で与えられる決定作用素は情報量の最大の為の必要条件も満足する。即ち、次の命題が成り立つ。

命題 2: (22) 式で与えられる決定作用素 $\hat{\Pi}_j$ は情報量 I が最大になる為の必要条件 [(14) 式と (15) 式] を満足する。

命題 2 の証明: 信号量子状態と決定作用素の性質から条件付き確率 $P(j|k)$ は差の絶対値 $|j-k|$ にのみ依存する。実際、

$$\begin{aligned}P(j|k) &= |\langle\psi_j|\mu_k\rangle|^2 \\ &= |\langle\psi|\hat{V}^{k-j}\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}|\psi\rangle|^2 \\ &= |\langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}\hat{V}^{k-j}|\psi\rangle|^2.\end{aligned} \tag{32}$$

そこで、$P(j|k)=f(j-k)$ と置けば、信号量子状態の対称性から関数 $f(j)$ は次の性質を満足する。

$$f(j)=f(-j),\quad f(j\pm n)=f(j),\quad \sum_{j=k+1}^{n+k} f(j)=1. \tag{33}$$

このとき、出力確率 $P_{\mathrm{out}}(j)$ はすべて等しくなる。

$$P_{\mathrm{out}}(j)=\sum_{j=1}^{n} P(j|k)p_k=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(j-k)=\frac{1}{n}. \tag{34}$$

これらの関係式を用いると、(14) 式と (15) 式で与えられる必要条件は次のように計算することができる。まず、作用素 $\hat{F}_j-\hat{F}_k$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\hat{F}_j-\hat{F}_k &= \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\hat{\rho}_m\left[\ln f(j-m)-\ln f(k-m)\right]\\ &= \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left[\hat{\rho}_{m+j-1}-\hat{\rho}_{m-k-1}\right]\ln f(m)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left[\hat{\rho}_{m+j-1}-\hat{\rho}_{k-m+1}\right]\ln f(m).\end{aligned} \tag{35}$$

この表式を用いれば、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_j\left[\hat{F}_j-\hat{F}_k\right]\hat{\Pi}_k &= \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\hat{\Pi}_j\left[\hat{\rho}_{m+j-1}-\hat{\rho}_{k-m+1}\right]\hat{\Pi}_k\ln f(m)\\ &\equiv \frac{1}{n}|\mu_j\rangle\left(\sum_{m=1}^{n}\mathcal{F}_{jk}(m)\ln f(m)\right)\langle\mu_k|.\end{aligned} \tag{36}$$

さらに、$\mathcal{F}_{jk}(m)$ は次のように計算することができる。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{jk}(m) &= \langle\mu_j|\psi_{m+j-1}\rangle\langle\psi_{m+j-1}|\mu_k\rangle-\langle\mu_j|\psi_{k-m+1}\rangle\langle\psi_{k-m+1}|\mu_k\rangle\\ &= \langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}\hat{V}^{m-1}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}\hat{V}^{k-j-m+1}|\psi\rangle\\ &\quad -\langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}\hat{V}^{k-j-m+1}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{\Phi}^{-\frac{1}{2}}\hat{V}^{m-1}|\psi\rangle\\ &= 0.\end{aligned} \tag{37}$$

従って、(22) 式で与えられる決定作用素 $\hat{\Pi}_j$ は情報量 I が最大になる為の必要条件を満足することが分かる。(証明終)

(22) 式で与えられる決定作用素で記述される信号検出過程で得られる情報量 $\tilde{I}$ は次の式で与えられる。

$$\tilde{I}=\ln n+\sum_{j=1}^{n} f(j)\ln f(j). \tag{38}$$

この式の右辺の第1項は等しい先験確率の送信系(情報源)がもつ情報量を表わし、第2項は検出誤りによる情報量の損失を表わしている。特に、2元信号系 ($n=2$) の場合には、$\tilde{I}$ は信号検出過程によって得られる情報量の最大値 $I_{\max}$ になる。

$$I_{\max} = \ln 2 + P_{\min} \ln P_{\min} + (1-P_{\min}) \ln(1-P_{\min}). \tag{39}$$

ここで、$P_{\min}$ は2元信号系に対する最小受信誤り確率である。

$$P_{\min} = \frac{1}{2}\left[1-\sqrt{1-|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2}\right]. \tag{40}$$

(22) 式で与えられる決定作用素 $\hat{\Pi}_j$ は情報量 I を最大にする為の必要条件を満足するが十分であるか否かはまだ証明されていない。しかし、Daivicsの結果 [17] を応用することによって、信号量子状態が線形独立だある場合、(22) 式で与えられる決定作用素 $\hat{\Pi}_j$ が十分であることを強く示唆する結果が最近筆者によって得られていることを述べておく。また、(22) 式で与えられる決定作用素 $\hat{\Pi}_j$ の添え字 j に関して連続極限をとったものは量子推定理論における最尤推定の最適解になっていることを証明することができる [16]。

5 2元量子信号に対する最適信号検出過程

ここでは最適化問題が厳密に解ける簡単な例として2つの純粋量子状態を用いた2元量子通信系を考えよう。送信者は量子状態 $|\psi_1\rangle$ と $|\psi_2\rangle$ を先験確率 p_1, p_2 に従って情報伝送を行なうものと仮定する。このとき、(13) で与えられる必要十分条件を満足する決定作用素 $\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2$ は次の式で与えられる [12]。

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_1 = &\frac{R+\frac{1}{2}(1+\lambda)-\lambda\kappa^2}{2(1-\kappa^2)R}|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \frac{R-\frac{1}{2}(1+\lambda)+\kappa^2}{2(1-\kappa^2)R}|\psi_2\rangle\langle\psi_2| \\ &-\kappa\frac{R+\frac{1}{2}(1-\lambda)}{2(1-\kappa^2)R}\left(e^{i\phi}|\psi_1\rangle\langle\psi_2| + e^{-i\phi}|\psi_2\rangle\langle\psi_1|\right),\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_2 = &\frac{R-\frac{1}{2}(1+\lambda)+\lambda\kappa^2}{2(1-\kappa^2)R}|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \frac{R+\frac{1}{2}(1+\lambda)-\kappa^2}{2(1+\kappa^2)R}|\psi_2\rangle\langle\psi_2| \\ &-\kappa\frac{R-\frac{1}{2}(1-\lambda)}{2(1-\kappa^2)R}\left(e^{i\phi}|\psi_1\rangle\langle\psi_2| + e^{-i\phi}|\psi_2\rangle\langle\psi_1|\right).\end{aligned} \tag{42}$$

ここで、各パラメータは次の式で与えられる。

$$R = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\lambda)^2-\lambda\kappa^2}, \quad \lambda = \frac{p_1}{p_2}, \quad \langle\psi_1|\psi_2\rangle = \kappa e^{i\phi}. \tag{43}$$

このとき２つの決定作用素 $\hat{\Pi}_1$ と $\hat{\Pi}_2$ は単位の分解 $\hat{\Pi}_1+\hat{\Pi}_2=\hat{I}$ になっていなければならないが、$\hat{\Pi}_1+\hat{\Pi}_2$ を実際に計算すると次のようになる。

$$\hat{\Pi}_1+\hat{\Pi}_2=\frac{|\psi_1\rangle\langle\psi_1|+|\psi_2\rangle\langle\psi_2|-|\psi_1\rangle\langle\psi_1|\psi_2\rangle\langle\psi_2|-|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\psi_1\rangle\langle\psi_1|}{1-|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2}. \tag{44}$$

この式の右辺が実際に信号量子状態 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ が張る Hilbert 空間上の単位作用素になっていることは容易に確かめることができる。

$$\left(\hat{\Pi}_1+\hat{\Pi}_2\right)|\psi\rangle=|\psi\rangle, \tag{45}$$

$$|\psi\rangle=a|\psi_1\rangle+b|\psi_2\rangle. \tag{46}$$

このとき、信号検出過程における平均誤り確率の最小値 $P_{\min}$ は次の式で与えられる。

$$P_{\min}=\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{1-4p_1p_2\kappa^2}\right]. \tag{47}$$

また、この信号検出過程で得られる情報量 $I_{\rm bin}$ は次のようになる。

$$I_{\rm bin}=H_{\rm input}-H_{\rm error}, \tag{48}$$

$$\begin{cases} H_{\rm input}=-p_1\ln p_1-p_2\ln p_2, \\ H_{\rm error}=-P_{\min}\ln P_{\min}-(1-P_{\min})\ln(1-P_{\min}). \end{cases} \tag{49}$$

ここで、$H_{\rm input}$ は送信者（情報源）が持っている情報量であり、$H_{\rm error}$ は信号検出誤りによる情報量の損失を表わす。

6 信号検出過程における熱雑音の影響

信号検出過程の最適化問題は決定作用素に対する非線形方程式で与えられ、その解を求めることは特別な場合を除いて非常に困難である。特に、信号量子状態が非可換な統計作用素で与えられる混合状態の場合、厳密解を求めることは事実上不可能である。そこで、平均誤り確率 $P_{\rm e}$ の下限や情報量 I の上限を求めることが重要になってくる。そして、これらの上限や下限を用いて量子通信システムの評価が行われる。この節では、信号量子状態が熱雑音を含んだ Gauss 型の量子状態で与えられる場合の最適化された信号検出過程における情報量の上限と平均誤り確率の下限を求める [13,14]。

6.1 信号量子状態

ここでは、まず以下で考える熱雑音を含んだ信号量子状態 $\{\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \ldots, \hat{\rho}_n\}$ について説明する。信号量子状態としては "Gaussian state" と呼ばれる次のような密度行列で与えられるものを考える

$$\hat{\rho}_j = \frac{V_j \hat{\rho}_{\mathrm{th}} \hat{V}_j^\dagger}{\mathrm{Tr}[\hat{V}_j \hat{\rho}_{\mathrm{th}} \hat{V}_j^\dagger]}, \tag{50}$$

$$\hat{\rho}_{\mathrm{th}} = \frac{1}{1+\bar{n}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} \right)^k |k\rangle\langle k|, \tag{51}$$

$$\hat{V}_j = \exp\left[\gamma_j \hat{a}^2 - \gamma_j^* \hat{a}^{\dagger 2} + i\phi_j \hat{a}^\dagger \hat{a} + \mu_j^* \hat{a} + \nu_j \hat{a}^\dagger\right]. \tag{52}$$

ここで、密度行列 $\hat{\rho}_{\mathrm{th}}$ は熱平衡状態を表わし、γ_j, μ_j, ν_j は複素パラメータであり、ϕ_j は実パラメータである。同じ信号量子状態が熱雑音を含まない場合には、密度行列は次のようになる。

$$\hat{\rho}_j^{(0)} = \frac{\hat{V}_j|0\rangle\langle 0|\hat{V}_j^\dagger}{\langle 0|\hat{V}_j^\dagger \hat{V}_j|0\rangle}. \tag{53}$$

(50) 式で与えられる信号量子状態の例としては、"thermal coherent state" や "thermal squeezed state" 等がある。それぞれの量子状態を表わす密度行列 $\hat{\rho}_{\mathrm{co}}$ と $\hat{\rho}_{\mathrm{sq}}$ は次の式で与えられる。

$$\hat{\rho}_j^{\mathrm{co}} = \hat{D}(\alpha_j)\hat{\rho}_{\mathrm{th}}\hat{D}^\dagger(\alpha_j), \tag{54}$$

$$\hat{\rho}_j^{\mathrm{sq}} = \hat{S}(\gamma_j)\hat{D}(\alpha_j)\hat{\rho}_{\mathrm{th}}\hat{D}^\dagger(\alpha_j)\hat{S}^\dagger(\gamma_j). \tag{55}$$

$\hat{D}(\alpha)$ は並進作用素であり、$\hat{S}(\gamma)$ は squeezing 作用素である。

$$\hat{D}(\alpha_j) = \exp[\alpha_j \hat{a}^\dagger - \alpha_j^* \hat{a}], \tag{56}$$

$$\hat{S}(\gamma_j) = \exp[\tfrac{1}{2}(\gamma_j^* \hat{a}^2 - \gamma_j \hat{a}^{\dagger 2})]. \tag{57}$$

このような信号量子状態に対する検出過程の平均誤り確率 P_{e} の下限や情報量 I の上限を求める為に、熱平衡状態を超作用素 (superoperator) を用いて次のように表わそう。

$$\hat{\rho}_{\mathrm{th}} = \hat{\mathcal{L}}\left(|0\rangle\langle 0|\right). \tag{58}$$

ここで、超作用素 $\hat{\mathcal{L}}$ は次の式で定義される。

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathrm{e}^{-\theta}\hat{\mathcal{W}}, \qquad \hat{\mathcal{W}} = \exp[\theta(\hat{\mathcal{K}}_+ - \hat{\mathcal{K}}_+)]. \tag{59}$$

また、超作用素 $\hat{\mathcal{K}}_\pm$ や $\hat{\mathcal{K}}_0$ は任意の作用素 $\hat{A}$ を用いて次の式で与えられる。

$$\hat{\mathcal{K}}_+\hat{A} = \hat{a}^\dagger\hat{A}\hat{a}, \quad \hat{\mathcal{K}}_-\hat{A} = \hat{a}\hat{A}\hat{a}^\dagger, \quad \hat{\mathcal{K}}_0\hat{A} = \tfrac{1}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{A} + \hat{A}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{A}). \tag{60}$$

超作用素 $\hat{\mathcal{K}}_+, \hat{\mathcal{K}}_-, \hat{\mathcal{K}}_0$ は交換関係 $[\hat{\mathcal{K}}_0, \hat{\mathcal{K}}_\pm] = \pm\hat{\mathcal{K}}_\pm$ と $[\hat{\mathcal{K}}_-, \hat{\mathcal{K}}_+] = 2\hat{\mathcal{K}}_0$ を満足するSU(1,1) リー代数の生成作用素である。また、(59) 式に現われるパラメータ θ は $\theta = \ln\sqrt{1+2\bar{n}}$ で与えられ、超作用素 $\hat{\mathcal{W}}$ はユニタリー超作用素である。

$$\hat{\mathcal{W}}\hat{\mathcal{W}}^\dagger = \hat{\mathcal{W}}^\dagger\hat{\mathcal{W}} = \hat{\mathcal{I}}. \tag{61}$$

ここで、$\hat{\mathcal{I}}(\hat{A}) = \hat{A}$ である。さらに、ユニタリー超作用素 $\hat{\mathcal{W}}$ が次の関係式を満足することは容易に確かめることができる。

$$\hat{\mathcal{W}}\hat{a}\hat{\mathcal{W}}^\dagger = \hat{a}\cosh\theta + \hat{b}^\dagger\sinh\theta, \tag{62}$$

$$\hat{\mathcal{W}}\hat{a}^\dagger\hat{\mathcal{W}}^\dagger = \hat{a}^\dagger\cosh\theta + \hat{b}\sinh\theta, \tag{63}$$

$$\hat{\mathcal{W}}\hat{b}\hat{\mathcal{W}}^\dagger = \hat{b}\cosh\theta + \hat{a}^\dagger\sinh\theta, \tag{64}$$

$$\hat{\mathcal{W}}\hat{b}^\dagger\hat{\mathcal{W}}^\dagger = \hat{b}^\dagger\cosh\theta + \hat{a}\sinh\theta. \tag{65}$$

ここで、超作用素 $\hat{b}$ と $\hat{b}^\dagger$ は次の式で定義される。

$$\hat{b}\hat{A} = \hat{A}\hat{a}^\dagger, \qquad \hat{b}^\dagger\hat{A} = \hat{A}\hat{a}. \tag{66}$$

これらの関係式を用いると、作用素 $\hat{V}_j\hat{\rho}_{\rm th}\hat{V}_j^\dagger$ は次のように計算することができる。

$$\begin{aligned}\hat{V}_j\hat{\rho}_{\rm th}\hat{V}_j^\dagger &= \hat{V}_j\hat{\mathcal{L}}(|0\rangle\langle 0|)\hat{V}_j^\dagger \\ &= \hat{\mathcal{L}}\left\{\hat{\mathcal{L}}^{-1}\left[\hat{V}_j\hat{\mathcal{L}}(|0\rangle\langle 0|)\hat{V}_j^\dagger\right]\right\} \\ &= \hat{\mathcal{L}}\left(\hat{U}_j|0\rangle\langle 0|\hat{U}_j^\dagger\right).\end{aligned} \tag{67}$$

ここで、作用素 $\hat{U}_j$ は次の式で与えられる。

$$\hat{U}_j = \exp\left[\gamma_j\hat{a}^2 - \gamma_j^*\hat{a}^{\dagger 2} + i\phi_j\hat{a}^\dagger\hat{a} + \tilde{\mu}_j^*\hat{a} + \tilde{\nu}_j\hat{a}^\dagger\right], \tag{68}$$

$$\tilde{\mu}_j = \frac{(1+\bar{n})\mu_j + \bar{n}\nu_j}{\sqrt{1+2\bar{n}}}, \tag{69}$$

$$\tilde{\nu}_j = \frac{(1+\bar{n})\nu_j + \bar{n}\mu_j}{\sqrt{1+2\bar{n}}}. \tag{70}$$

このとき、作用素 $\hat{U}_j$ と $\hat{V}_j$ の間には次の関係が成り立つ。

$$\hat{U}_j = \hat{V}_j\Big|_{\mu_j\to\tilde{\mu}_j,\nu_j\to\tilde{\nu}_j}. \tag{71}$$

以上のことから、熱雑音を含む信号量子状態と熱雑音を含まない信号量子状態を記述する統計作用素は次のように表わすことができる。

$$\hat{\rho}_j = \frac{\hat{V}_j \hat{\rho}_{\rm th} \hat{V}_j^\dagger}{{\rm Tr}[\hat{V}_j \hat{\rho}_{\rm th} \hat{V}_j^\dagger]} = \hat{\mathcal{L}}(|\psi_j\rangle\langle\psi_j|), \tag{72}$$

$$\hat{\rho}_j^{(0)} = \frac{\hat{V}_j|0\rangle\langle 0|\hat{V}_j^\dagger}{\langle 0|\hat{V}_j^\dagger \hat{V}_j|0\rangle} = |\psi_j^{(0)}\rangle\langle\psi_j^{(0)}|. \tag{73}$$

ここで、状態ベクトル $|\psi_j\rangle$ と $|\psi_j^{(0)}\rangle$ は次の式で与えられる。

$$|\psi_j\rangle = \frac{\hat{U}_j|0\rangle}{\sqrt{{\rm Tr}[\hat{V}_j \hat{\rho}_{\rm th} \hat{V}_j^\dagger]}}, \qquad |\psi_j^{(0)}\rangle = \frac{\hat{V}_j|0\rangle}{\sqrt{\langle 0|\hat{V}_j^\dagger \hat{V}_j|0\rangle}}, \tag{74}$$

$$|\psi_j\rangle = |\psi_j^{(0)}\rangle\Big|_{\mu_j\to\tilde{\mu}_j,\nu_j\to\tilde{\nu}_j}. \tag{75}$$

以下では、(72)–(75) 式を用いて、信号検出過程における平均誤り確率 $P_{\rm e}$ の下限と情報量 I の上限を求める。

6.2 信号検出過程における情報量の上限

全節で求めた信号量子状態の表現 (72)–(75) 式を用いて、熱雑音を含んだ信号量子状態に対する量子測定によって得られる情報量 I の上限を求めよう。信号量子状態が熱雑音を含む場合の情報量 I の最大値は形式的に次の式で与えられる [(4) 式を参照]。

$$I_{\rm max}(\gamma,\phi,\mu,\nu) = \max_{\hat{\Pi}\in\mathcal{S}} I\left({\rm Tr}[\hat{\Pi}_j \hat{\rho}_k]\right). \tag{76}$$

ここで、集合 $\mathcal{S}$ は全ての決定作用素の集合を表わす。

$$\mathcal{S} = \{\hat{\Pi} = (\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2, \ldots, \hat{\Pi}_n)\,|\,\hat{\Pi}_j \geq 0,\, \textstyle\sum_{j=1}^n \hat{\Pi}_j = \hat{I}\}. \tag{77}$$

(76) 式は右辺の値を最大にする決定作用素 $\hat{\Pi} = (\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2, \ldots, \hat{\Pi}_n)$ を集合 $\mathcal{S}$ の中から選ぶことを意味する。また、情報量の最大値が信号量子状態のパラメータ (γ,ϕ,μ,ν) に依存することを明確に表わした。ここで、熱雑音を含んだ信号量子状態が (72) 式で与えられることを用いると、最適化を表わす (76) 式は次のように変

形することができる。

$$\begin{aligned} I_{\max}(\gamma,\phi,\mu,\nu) &= \max_{\hat{\Pi}\in\mathcal{S}} I\left(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\rho}_k]\right) \\ &= \max_{\hat{\Pi}\in\mathcal{S}} I\left(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\mathcal{L}}(|\psi_k\rangle\langle\psi_k|)]\right) \\ &= \max_{\hat{\Pi}\in\mathcal{S}} I\left(\mathrm{Tr}[\hat{\mathcal{L}}^\dagger(\hat{\Pi}_j)|\psi_k\rangle\langle\psi_k|]\right) \\ &= \max_{\hat{\Pi}'\in\mathcal{S}'} I\left(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}'_j|\psi_k\rangle\langle\psi_k|]\right). \end{aligned} \tag{78}$$

ここで、次の関係式を用いた。

$$\mathrm{Tr}[A\hat{\mathcal{L}}(B)] = \mathrm{Tr}[\hat{\mathcal{L}}^\dagger(A)B]. \tag{79}$$

また、(78) 式において、作用素 $\hat{\Pi}'$ と集合 $\mathcal{S}'$ は次の式で与えられる。

$$\hat{\Pi}' = \hat{\mathcal{L}}^\dagger(\hat{\Pi}), \quad \mathcal{S}' = \{\hat{\Pi}' = \hat{\mathcal{L}}^\dagger(\hat{\Pi}) \,|\, \hat{\Pi} \in \mathcal{S}\}. \tag{80}$$

ところで、これらの定義から任意の $\hat{\Pi}' \in \mathcal{S}'$ に対して、関係式 $\hat{\Pi}' = \hat{\mathcal{L}}(\hat{\Pi})$ を満足する或る決定作用素 $\hat{\Pi} \in \mathcal{S}$ が存在して次の関係の成り立つことが分かる。

$$\sum_{j=1}^{M} \hat{\Pi}'_j = \hat{I}, \qquad \hat{\Pi}'_j \geq 0. \tag{81}$$

ここで、超作用素 $\hat{\mathcal{L}}$ に関する次の性質を用いた。

$$\hat{\mathcal{L}}^\dagger(\hat{I}) = \hat{I}, \qquad \hat{\mathcal{L}} \geq 0. \tag{82}$$

以上のことから、作用素 $\hat{\Pi}'_j$ が決定作用素であることがわかる。即ち、$\hat{\Pi}' \in \mathcal{S}' \to \hat{\Pi}' \in \mathcal{S}$ が成り立つので、集合 $\mathcal{S}'$ は決定作用全体の集合 $\mathcal{S}$ の部分集合 ($\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$) である。この結果は最適化問題において次の不等式が成り立つことを意味する。

$$\max_{\hat{\Pi}'\in\mathcal{S}'} I\left(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}'_j|\psi_k\rangle\langle\psi_k|]\right) \leq \max_{\hat{\Pi}\in\mathcal{S}} I\left(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j|\psi_k\rangle\langle\psi_k|]\right). \tag{83}$$

ここで、熱雑音を含まない信号量子状態に対する信号検出過程によって得られる情報量の最大値は次の式で与えられることに注意しよう。

$$I^{(0)}_{\max}(\gamma,\phi,\mu,\nu) = \max_{\hat{\Pi}\in\mathcal{S}} I\left(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j|\psi^{(0)}_k\rangle\langle\psi^{(0)}_k|]\right). \tag{84}$$

また、量子状態 $|\psi_j\rangle$ と $|\psi_j^{(0)}\rangle$ の間には次の関係式が成り立つことを思い出そう。

$$|\psi_j\rangle = |\psi_j^{(0)}\rangle\big|_{\mu_j\to\tilde{\mu}_j,\nu_j\to\tilde{\nu}_j}, \tag{85}$$

$$\tilde{\mu}_j = \frac{(1+\bar{n})\mu_j + \bar{n}\nu_j}{\sqrt{1+2\bar{n}}}, \tag{86}$$

$$\tilde{\nu}_j = \frac{(1+\bar{n})\nu_j + \bar{n}\mu_j}{\sqrt{1+2\bar{n}}}. \tag{87}$$

以上のことから信号検出過程における情報量 I の最大値に関して次の不等式が成り立つことが分かる。

$$I_{\max}(\gamma,\phi,\mu,\nu) \le I_{\max}^{(0)}(\gamma,\phi,\tilde{\mu},\tilde{\nu}). \tag{88}$$

この不等式は、熱雑音を含んだ信号量子状態から得られる情報量 I の上限が熱雑音を含まない場合の最大情報量 $I^{(0)}$ の表式を用いて如何に抑えられるかを表わしている。勿論、不等式 $I_{\max}(\gamma,\phi,\mu,\nu) \le I_{\max}^{(0)}(\gamma,\phi,\mu,\nu)$ は自明である。

ここで、簡単な例として２元ＰＳＫコヒーレント信号を考えよう。この場合、2つの信号量子状態 $\hat{\rho}_1$ と $\hat{\rho}_2$ は次の式で与えられる熱雑音を含んだコヒーレント状態である。

$$\hat{\rho}_1 = \hat{D}(\alpha)\hat{\rho}_{\rm th}\hat{D}^\dagger(\alpha), \quad \hat{\rho}_2 = \hat{D}(-\alpha)\hat{\rho}_{\rm th}\hat{D}^\dagger(-\alpha). \tag{89}$$

熱雑音が存在しない場合の信号量子状態は次の式で与えられる。

$$\hat{\rho}_1^{(0)} = |\alpha\rangle\langle\alpha|, \qquad \hat{\rho}_2^{(0)} = |-\alpha\rangle\langle-\alpha|. \tag{90}$$

この場合の信号検出過程によって得られる情報量 I の最大値 $I_{\max}^{(0)}$ は、(48) 式と (49) 式で与えられる。

$$\begin{aligned} I_{\max}^{(0)} = I_0 &+ \frac{1}{2}\left[1+\sqrt{1-4p_1p_2\exp(-4\bar{n}_s)}\right]\ln\left[1+\sqrt{1-4p_1p_2\exp(-4\bar{n}_s)}\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[1-\sqrt{1-4p_1p_2\exp(-4\bar{n}_s)}\right]\ln\left[1-\sqrt{1-4p_1p_2\exp(-4\bar{n}_s)}\right]. \end{aligned} \tag{91}$$

ここで、p_j は信号量子状態の先験確率であり、$\bar{n}_s = |\alpha|^2$ は平均信号光子数を表わす。また、$I_0 = -\ln 2 - p_1\ln p_1 - p_2\ln p_2$ である。従って、(88) 式から熱雑音が存在する場合の信号検出過程によって得られる情報量の最大値 $I_{\max}$ に対して次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} I_{\max} \le I_0 &+ \frac{1}{2}\left[1+4p_1p_2\sqrt{1-\exp(-D^2)}\right]\ln\left[1+\sqrt{1-4p_1p_2\exp(-D^2)}\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[1-4p_1p_2\sqrt{1-\exp(-D^2)}\right]\ln\left[1-\sqrt{1-4p_1p_2\exp(-D^2)}\right]. \end{aligned} \tag{92}$$

ここで、$D^2 = 4\bar{n}_s/(1+2\bar{n})$ はホモダイン検波における S/N 比を表わす。

6.3 平均誤り確率の下限

次に熱雑音を含んだ量子状態に対する信号検出過程における平均誤り確率 $P_{\rm e}$ の最小値について考えよう。情報量の場合と全く同様にして、平均誤り確率の最小値は次のように計算することができる。

$$
\begin{aligned}
P_{\min}(\gamma,\phi,\mu,\nu) &= \min_{\hat{\Pi}\in\mathcal{S}} P_{\rm e}\left(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\rho}_k]\right) \\
&= 1-\max_{\hat{\Pi}\in\mathcal{S}}\sum_{j=1}^{M} p_j \mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\rho}_j] \\
&= \min_{\hat{\Pi}\in\mathcal{S}} P_{\rm e}\left(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j\hat{\mathcal{L}}(|\psi_k\rangle\langle\psi_k|)]\right) \\
&= \min_{\hat{\Pi}\in\mathcal{S}} P_{\rm e}\left(\mathrm{Tr}[\hat{\mathcal{L}}^\dagger(\hat{\Pi}_j)|\psi_k\rangle\langle\psi_k|]\right) \\
&= \min_{\hat{\Pi}\in\mathcal{S}'} P_{\rm e}\left(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j|\psi_k\rangle\langle\psi_k|]\right) \\
&\geq \min_{\hat{\Pi}\in\mathcal{S}} P_{\rm e}\left(\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_j|\psi_k\rangle\langle\psi_k|]\right) \\
&= P_{\min}^{(0)}(\gamma,\phi,\tilde{\mu},\tilde{\nu}).
\end{aligned} \tag{93}
$$

不等式に関しては、決定作用素の集合 $\mathcal{S}'$ が $\mathcal{S}$ の部分集合であることを用いた。また、$P_{\min}^{(0)}(\gamma,\phi,\mu,\nu)$ は熱雑音を含まない場合の信号検出過程における平均誤り確率の最小値を表わす。従って、次の結果が得られる。

$$
P_{\min}(\gamma,\phi,\mu,\nu) \geq P_{\min}^{(0)}(\gamma,\phi,\tilde{\mu},\tilde{\nu}), \tag{94}
$$

$$
\tilde{\mu}_j = \frac{(1+\bar{n})\mu_j+\bar{n}\nu_j}{\sqrt{1+2\bar{n}}}, \tag{95}
$$

$$
\tilde{\nu}_j = \frac{(1+\bar{n})\nu_j+\bar{n}\mu_j}{\sqrt{1+2\bar{n}}}. \tag{96}
$$

M 元コヒーレント信号の場合、熱雑音を含んだ信号量子状態、及び熱雑音を含まない信号量子状態はそれぞれ次の式で与えられる。

$$
\hat{\rho}_j = \hat{D}(\alpha_j)\hat{\rho}_{\rm th}\hat{D}^\dagger(\alpha_j), \quad \hat{\rho}_j^{(0)} = |\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|. \tag{97}
$$

このとき、(94) 式は次のようになる。

$$
P_{\min}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_M) \geq P_{\min}^{(0)}\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{1+2\bar{n}}},\frac{\alpha_2}{\sqrt{1+2\bar{n}}},\ldots,\frac{\alpha_M}{\sqrt{1+2\bar{n}}}\right). \tag{98}
$$

熱雑音を含まない場合のコヒーレント信号 $\hat{\rho}_1^{(0)},\hat{\rho}_2^{(0)},\ldots,\hat{\rho}_M^{(0)}$ に対する信号検出過程における平均誤り確率の最小値 $P_{\min}^{(0)}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_M)$ は幾つかの具体的な信号に

対して厳密な解析的な表現が求められている [12]。それらの結果を用いれば、直ちに熱雑音を含んだ場合の平均誤り確率の最小値を評価することができる。特に、先験確率が等しい２元ＰＳＫコヒーレント信号に対しては次の結果が得られる。

$$\frac{1}{2}\left[1-\mathrm{erf}(D/\sqrt{2})\right] \geq P_{\min}(\alpha) \geq \frac{1}{2}\left[1-\sqrt{1-\exp(-D^2)}\right]. \tag{99}$$

ここで、上限はホモダイン検波における平均誤り確率である。また、erf(x) は誤差関数である。

7　最後に

以上では量子情報理論の中で、信号検出過程に関する最近の研究結果について報告した。より詳細な解析は文献 [12–16] を参照されたい。また、量子情報理論全般に関しては国際会議報告 [1, 2]、最新の研究結果に関しては Los Alamos 国立研究所の archives (http://xxx.lanl.gov) 等を参考にされたい。

参考文献

[1] V. P. Belavkin, O. Hirota and R. L. Hudson, eds. *Quantum Communication and Measurement* (Plenum Press, New York, 1995).

[2] O. Hirota, A. S. Holevo and C. M. Caves, eds. *Quantum Communication, Computation and Measurement* (Plenum Press, New York, 1997).

[3] P. W. Shor, in *Proc. of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, edited by S. Goldwasser (IEEE Computer Society, Los Alamitos, 1996) p.116.

[4] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory* (Wiley, New York, 1991).

[5] B. Schumacher, Phys. Rev. A **51**, 2738 (1995).

[6] B. Schumacher and M. D. Westmoreland Phys. Rev. A **56**, 131 (1997).

[7] A. S. Holevo, IEEE Trans. Inf. Theory, to be published.

[8] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory* (Academic Press, New York, 1976).

[9] A. S. Holevo, J. Multivar. Anal. **3** (1973) 337.

[10] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1982).

[11] H. P. Yuen, R. S. Kennedy, and M. Lax, IEEE Trans. Inf. Theory **IT-21** (1975) 125.

[12] M. Osaki, M. Ban and O. Hirota, Phys. Rev. A **54**, 1691 (1996).

[13] M. Ban, M. Osaki and O. Hirota, Phys. Rev. A **54**, 2718 (1996).

[14] M. Ban, M. Osaki and O. Hirota, in *Quantum communication, Computing and Measurement* (Plenum, New York, 1997) p. 41.

[15] M. Ban, M. Osaki and O. Hirota, J. Mod. Opt. **43**, 2337 (1996).

[16] M. Ban, K. Kurokawa, R. Momose and O. Hirota, Int. J. Theor. Phys. **36**, 1269 (1997).

[17] E. B. Davies, IEEE Trans. Inf. Theory **IT-24**, 596 (1978).