

カオスと量子トンネル現象

東京都立大学理学研究科 首藤 啓
立命館大学理工学部 池田 研介

■多自由度系のトンネル現象

多自由度系のトンネリングには、大きく分けて2つの場合が考えられる。まず第一に、トンネルに関与する自由度は一次元で、熱浴などの多自由度系と結合している、という場合である。このような問題に対しては、インスタントを用いた解析が有効性を発揮することがよく知られている。最近の実験を交えたトンネル現象の新しい展開が話題に上がる際にも、このような意味での多自由度トンネリングが対象とされることが多い [1]。

第2の状況として、トンネリングする自由度自体が多自由度である場合がある。このようなトンネルに関係する自由度が本質的に多自由度であるような問題も、前者の意味での多次元トンネリングと同様自然界に数多く存在する。

ところで、原子・分子など少数多体系は、対称性の高いごく限られた場合を除いて、ほとんどの場合、古典力学的に分類すれば非可積分系に属し、大なり小なり必ずカオスを内在する。そう考えると、後者の意味での多自由度系のトンネリングは、対応する古典力学でカオスが存在する状況下で起こっているはずである。

例えば、化学反応は反応物と反応生成物を結ぶ遷移状態を通して起こり、しばしばトンネルに因る遷移を伴う。この化学反応の動力学を力学系としてみると、遷移状態は不安定な周期軌道に対応し、そのまわりの統計的な性質はカオスにより発生する。RRKM理論に代表される化学反応の統計理論がその成立要件を系のカオス性に置いていることからわかるように、多くの化学反応はカオスの海を通過して起こる。従って、化学反応を量子動力学として捉える際、トンネル効果とカオスとの関係は避けて通ることのできない問題となってくる。

このように、カオス系でのトンネル現象は、多自由度系のトンネリングの中でもごくありふれた現象と考えることができる。ここでは、対応する古典力学が非可積分でカオスを発生している場合、量子論のトンネル現象がカオスが存在しない場合と比較してどのような特徴をもつか、それが古典論のいかなる性質の反映か?といった問題を考える [2]。

■モデル、カオス的トンネリングの諸特性

通常、量子論のトンネリングは、古典粒子がエネルギー的に運動が禁止されている領域への波動効果による遷移のことを指すことが多いが、ここでは、動力的に形成された障壁 (KAM トーラス) から波動が滲み出る“動的トンネリング (Dynamical Tunneling)”を考える。動的トンネリングとは、もう少し詳しく言うと次のようなものである。一般に、自由度が2以上の力学系では多くの場合、規則的運動を示す軌道が不規則運動を示すカオス軌道と共存する状況が実現されている。しかし、カオス軌道は規則的軌道と棲み分けており、規則運動がカオス運動に遷移することはあり得ない。位相空間は規則的軌道のトーラスによって仕切られ、カオス運動は位相空間全域には広がれないし、逆にカオスに隔てられたトーラスは孤立したグループに分かたれている。しかし量子力学の世界ではトンネル効果によってこれら孤立した領域が結ばれる可能性がある。そのような、動力的に形成された孤立グループ間の遷移をここでは、“動的トンネリング”と呼ぶ。エネルギーも動力的な保存量であるか

ら、通常のエネギー障壁を越えるトンネリングも、広い意味では、“動的トンネリング”と見做すことができる。ただし、これが位相空間に散らばるトーラス間のトンネリングと果たして同じ機構を持つものか、という問題に関しては注意深い検討を要するようである [3]。

ここでは、この動的トンネリングに対するカオスの影響を純粋な形で取り出すために、以下のようなモデルを考える。

$$H = H_0(\hat{p}) + V(\hat{\theta}) \sum_n \delta(t - n). \quad (1)$$

ただし、

$$H_0(p) = \frac{p^2}{2} \frac{(p/p_d)^{2\nu}}{(p/p_d)^{2\nu} + 1} + \omega p \quad (2)$$

$$V(\theta) = K \sin \theta, \quad (3)$$

ここで、 ν, K, ω は系のパラメータである。図1に示された古典位相空間を見ればわかるように、この系ではパラメータを適当に調節することにより、規則領域（トーラス）と不規則領域（カオス）とが完全に分離された状況を実現することができる。

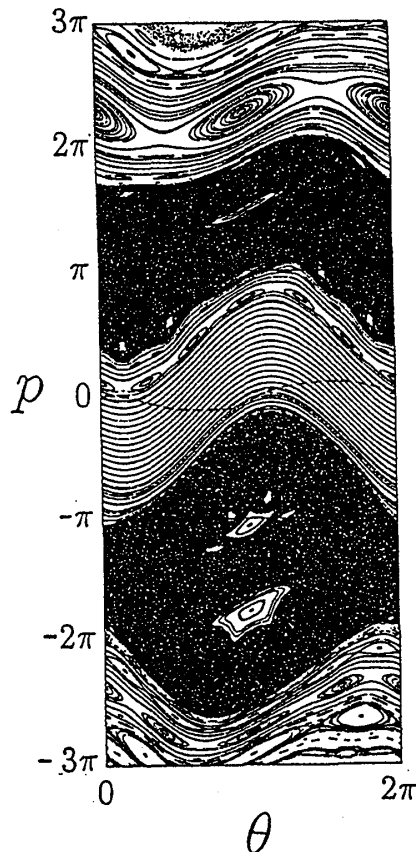


図1 周期的撃力系 (1)-(3) のポアンカレ写像。用いたパラメータは、 $\nu = 3$, $K = 1.2$, $\omega = 1$ 。 ν をある程度大きくとると、中央 $p \sim 0$ 付近に KAM の帯ができる。 $p \sim 0$ 周辺の破線は、 $t = 0$ で $p = 0, \theta \in [0, 2\pi]$ にあった古典ラグランジュアン多様体の 6 ステップ後。

一般に、系を適当に選び、勝手な初期条件から波束を走らせると、その波束による遷移を、古典的運動に乗った遷移とトンネルを含めた純量子論的な遷移とに、明確に分離することは困難である。

しかし、上記モデルにおいては、量子論の初期波束を運動量状態の固有関数 $p_0 = 0$ におくと、それに対応する古典軌道はすべて中央の KAM 帯のなかにおさまっているため、時間が経っても決して KAM 帯の外に出ることはできない。一方、量子波束は上で述べた動的トンネル効果により KAM 帯からしみだすことが可能であり、従って、KAM 帯の外側に広がるカオスの領域への遷移はすべてトンネル効果によって起こっていると見做すことができる。

ただし、以下カオス・トーラス共存下で起こるトンネル現象に関する諸特性およびその発生機構は、選んだモデルの特殊性によるものではなく、一般の非可積分系、例えば、

$$H_0(p) = \frac{p^2}{2} \quad (4)$$

$$V(\theta) = K \sin \theta, \quad (5)$$

で与えられる、いわゆる標準写像の場合でも、定性的にはまったく変わらないことは最初に注意しておく。

図 2 にトーラス領域からカオス領域にしみ出していく波束 ($p_0 = 0$ からスタートし、1 ステップから 8 ステップまで) の波動関数を伏見表示で示した。ただし、図の等高線は、トンネル領域の様子を強調するため、log スケールでプロットしてある。時間発展初期には、波動関数は KAM 帯の上を振動するだけであるが、次第に波動関数が折れ曲がっているあたりからしみ出しが見られるのがわかる。さらに時間が進むと、波動関数のしみ出しが激しくなり、しみ出し口も増えてくる。6,7,8 ステップ目あたりでは、 $p < 0$ の領域でしみ出した波動関数どうしの干渉が現れる (伏見関数のゼロ点は、波動関数の干渉の結果出現するが、この場合、トンネル領域にゼロ点が現れているのが見られる)。また、KAM 帯上の領域は振動を繰り返すだけであるが、トンネル領域ではいったんしみ出した波動関数は時間が経っても戻ることはない。

図 3 には、図 2 と全く同じタイムステップの波動関数を p 表示 (運動量表示) した。仮に外側にカオス領域が存在していない場合のトンネルの裾と比較すると、以下のような際立った特徴がある。

1. KAM 帯の中では、急速かつ単調に減少する。その減少率は、ちょうど KAM 帯が p 方向にどこまでも広がった可積分振動子のそれに等しい。
2. KAM 帯内での減衰は、カオスの海に近づくにしたがって次第に緩やかになり、cliff-崖-と呼ばれる急峻な落ち込み、あるいは平坦な棚-plateau-などの構造を作る。
3. 棚の上に不規則な振動をつくる。
4. 棚は崖をつくって急速に減少するが、しばらく減少した後再び棚をつくる。全体として振幅を減少させながら、棚→崖→棚→崖→…の構造を繰り返す。
5. 棚構造をつくるため、可積分振動子すなわちこれまで知られているトンネル過程に比べると、古典的運動不可能領域へのトンネルによる遷移確率は圧倒的に大きい。

カオス領域が存在することによって、トンネル確率が異常に増大する過程は、**Chaos-assisted tunneling** と呼ばれる [4]。エネルギー領域では、エネルギースピリティングにトンネル現象を観測す

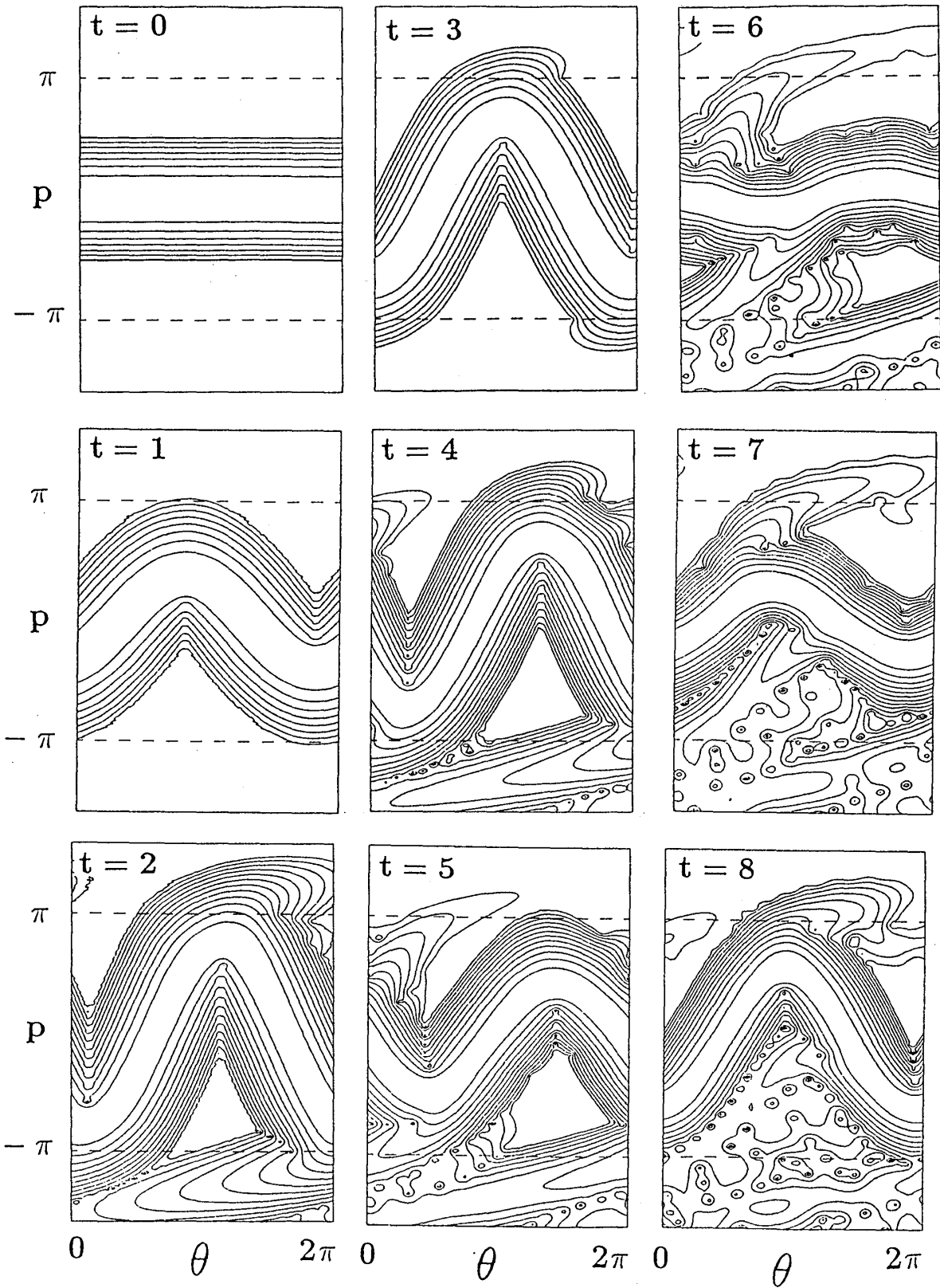


図2 波動関数の時間発展（伏見表示）。ただし、等高線は対数スケール。

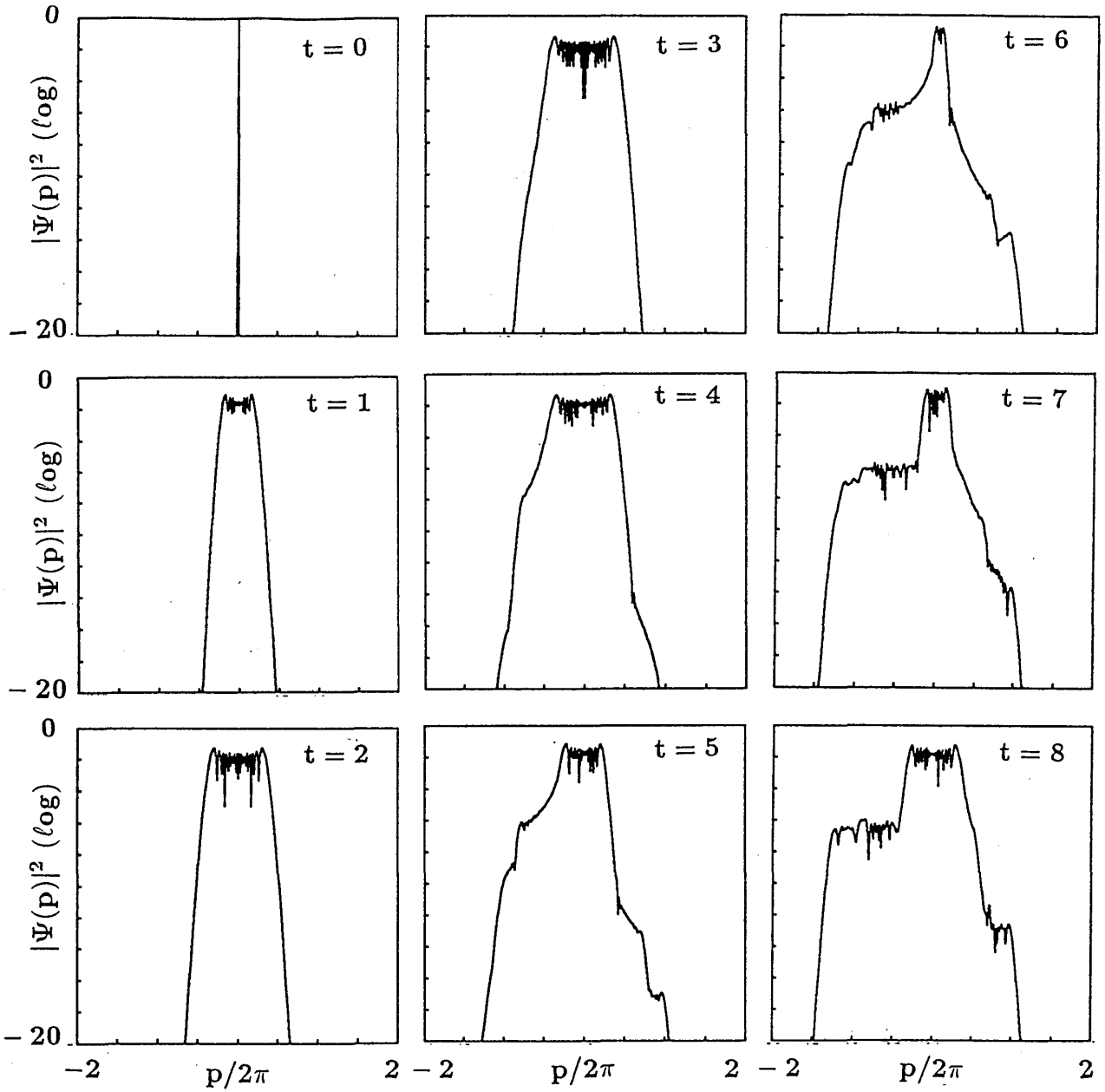


図3 波動関数の時間発展 (p (運動量) 表示)。縦軸は対数スケール。

ることができる。カオスが存在することによって生じるエネルギースプリッティング ΔE のオーダーは、通常の1次元のトンネルで評価される、 $\Delta E \sim e^{-const/\hbar}$ のよりも遥かに大きい。また、連続的なパラメータの変化（例えば、外場の連続的变化）により、1次元トンネリングによるエネルギースプリッティングは、単調な変動しか示し得ないが、非可積分系では、エネルギースプリッティング自身が不規則に変化する。このパラメータの変化に対するエネルギースプリッティングのランダムな変動は、図3に見られるようなトンネル領域にある波動関数のランダムな振動構造に起因する。

以上の純量子論で観測された、可積分領域→カオス領域の動的トンネリングの最も素朴な解釈は、

- (1) 最初、可積分領域にあった波束が可積分領域をトンネリングで通過し、その後、
- (2) カオス領域にはいると、カオス領域の古典軌道によって p 方向に遷移していく。

というものである。しかし、この解釈では説明できないことが幾つかある。実際、図2を見てもわかるように、可積分領域からのしみ出し口は1つではなくたくさんのしみだし口がある。通常の可積分トンネリングでは古典的転回点から発する1つのしみだししかあり得ないはずであるから上記の解釈では説明不可能である。また、いったんカオス領域に出た後でも、上で cliff と呼んだ崖構造が何段にもあり、カオス領域に出たからといって、実古典軌道によって p 方向に単純に遷移するというわけではない。

■複素半古典論

ここでは、以上の非可積分系で見られるトンネル現象が、どのような機構を背景に発生しているか、ということ複素半古典論を用いて解析する。

カオスが軌道の示す性質であることを考えると、それは粒子像に基づく古典力学の概念である。一方、トンネル効果は量子力学においてはじめて現れる波動現象であるから、そのままではカオスと結び付けることはできない。ここで量子論と古典論の間をつなぐ翻訳言語が理論的道具として必要になってくる。そのためには半古典論が現在考えられ得る唯一で最も有効な方法である。量子論によると波束の運動は経路積分で表すことができる。半古典論とはさまざまな経路のうち、古典運動方程式を満たす経路がもっとも経路積分に有効であるとして、古典経路とその近傍の量子揺らぎで経路積分を近似する理論である [5]。トンネル現象を古典軌道で記述するとき、最もよく使われるのは複素古典経路を用いる方法である [6]。

離散的な時間発展をする周期外力系 (1) の1ステップの時間推進のプロパゲータは、

$$\hat{U} = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}H_0(\hat{p})\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}V(\hat{\theta})\right\}, \quad (6)$$

で与えられる。運動量 p 表示では、

$$\begin{aligned} \langle p' | \hat{U} | p \rangle &= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}H_0(p')\right\} \langle p' | \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}V(\hat{\theta})\right\} | p \rangle \\ &= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}H_0(p')\right\} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(p' - p)\theta\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}V(\theta)\right\}, \quad (7) \end{aligned}$$

である。ただし、 θ 方向に対して、 2π 周期であることから、 p と p' は、 \hbar の整数倍でなければならない。

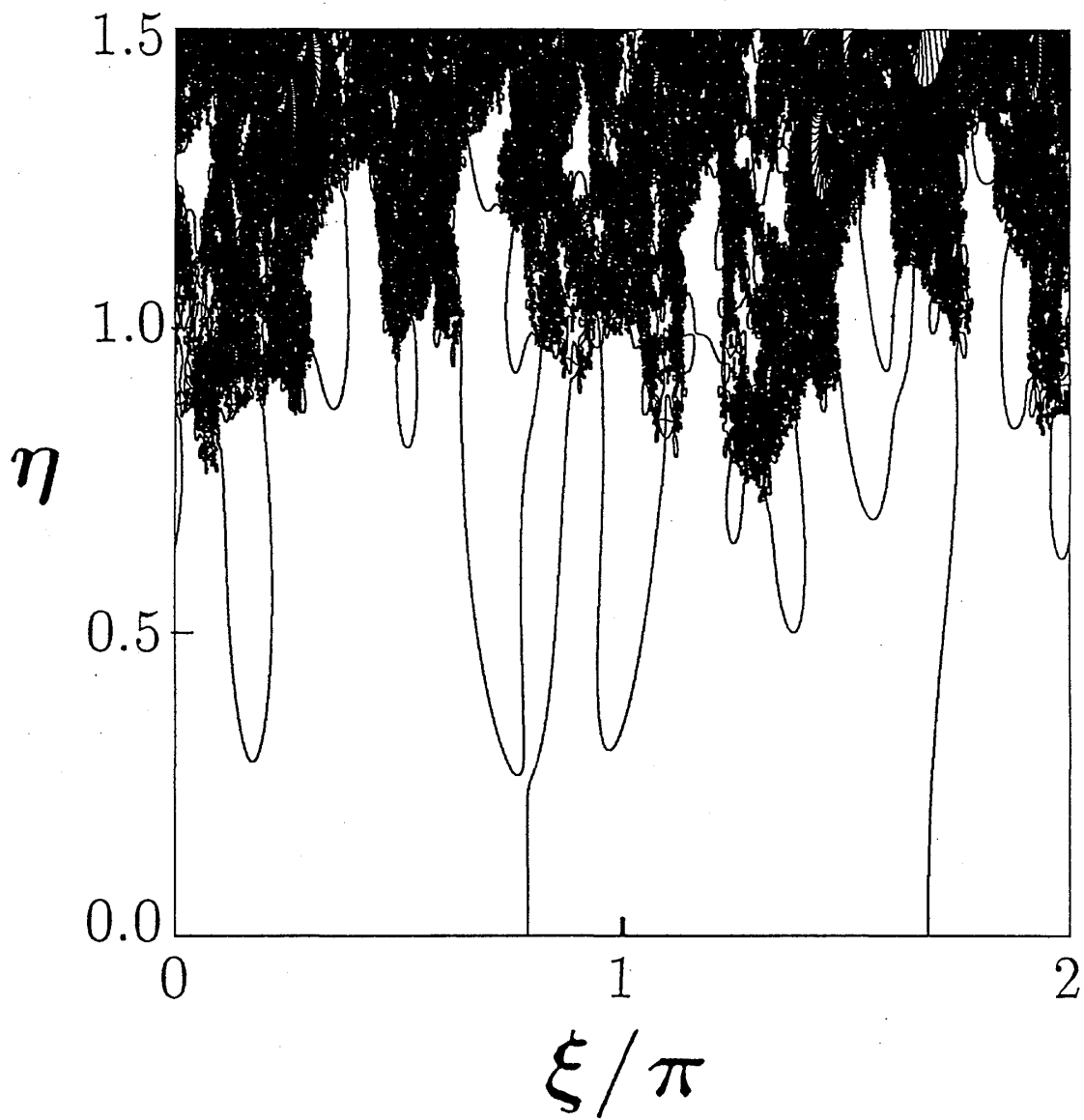


図4 半古典的な波動関数に寄与する複素経路の初期条件の集合 \mathcal{M}_t (但し $t=6$)。ここでは、経路積分に寄与する軌道を実軌道から複素軌道に拡張するため、初期座標 θ_1 を複素領域に解析接続した。 $\text{Im}\theta_1 = 0$ 軸は実軌道の初期値の集合を表し、それ以外の複素領域に存在する夥しい数の紐状の構造は、一本一本がすべて半古典論的に寄与し得る複素経路の初期値集合である。 $\text{Im}\theta_1 = 0$ の実軌道に接着し上に伸びる分枝が通常の古典的展開点から発する複素経路に対応する、

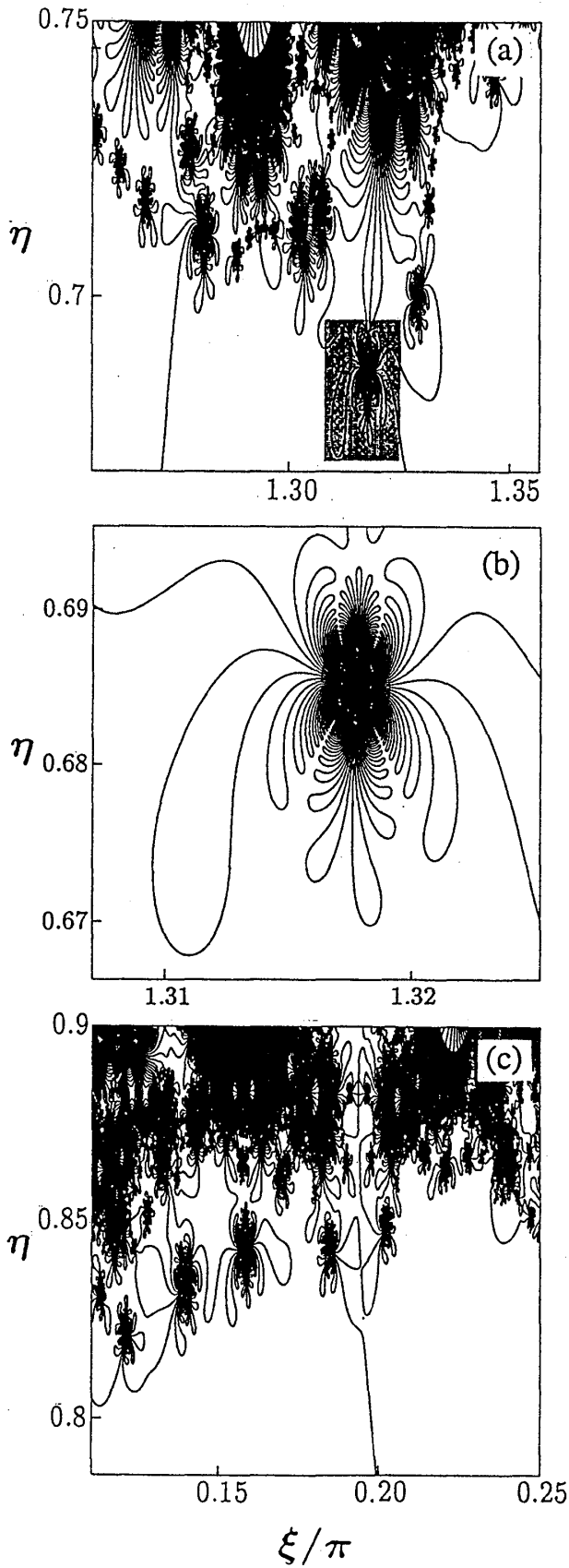


図5 半古典的な波動関数に寄与する複素経路の初期条件 M_i の集合の典型的なもの拡大図 ((a),(c))。 (a) の影を付けた部分を拡大したものが (b)。 図4と同じく、一本一本がすべて半古典的に寄与し得る複素経路を表している。 花卉状の中心は、 $p_t = \pm\infty$ の特異点。 ただし、有限の ξ - η 領域にこれらの特異点が現れるのは、この系の特殊性。

t ステップのプロパゲータは、

$$\begin{aligned} & \langle p_t | \overbrace{\hat{U}\hat{U}\cdots\hat{U}}^t | p_0 \rangle \\ &= \sum_{p_{t-1}, p_{t-2}, \dots, p_1} \langle p_t | U | p_{t-1} \rangle \langle p_{t-1} | U | p_{t-2} \rangle \cdots \langle p_1 | U | p_0 \rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

である。 p_t に対する離散的な和を、Poisson の和公式を用いていったん積分になおし、そのうえで定常位相近似を行うと、 t ステッププロパゲータの半古典表示

$$U^{sc}(p_t, p_0) = \sum_k A_k(p_t, p_0) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} S_k(p_t, p_0) - i\mu_k \frac{\pi}{2}\right\}. \quad (9)$$

を得る。ただし、ここであらわれた振幅因子 $A_k(p_t, p_0)$ と位相因子 $S_k(p_t, p_0)$ はそれぞれ、

$$A_k(p_t, p_0) = \left[2\pi\hbar \left(\frac{dp_t^{(k)}}{d\theta_1^{(k)}}\right)_{p_0}\right]^{-1/2}, \quad S_k(p_t, p_0) = S(\{p_j^{(k)}\}, \{\theta_j^{(k)}\}) \quad (10)$$

であり、作用汎関数 $S(\{p_j\}, \{\theta_j\})$ は、

$$S(\{p_j\}, \{\theta_j\}) \equiv \sum_{j=1}^t (H_0(p_j) + V(\theta_j)) - \sum_{j=1}^t \theta_j (p_{j-1} - p_j). \quad (11)$$

である。ここで、 k は以下の古典力学の時間発展を満足する異なる古典軌道を表す：

$$\begin{aligned} p_{j+1}^{(k)} - p_j^{(k)} &= -V_0'(\theta_{j+1}^{(k)}), \\ \theta_{j+1}^{(k)} - \theta_j^{(k)} &= H_0'(p_j^{(k)}). \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、古典軌道は、 $p_0^{(k)} = p_0$ 、および $p_t^{(k)} = p_t$ という境界条件を満足するものに対して決まるものである。古典時間発展 (12) は、もちろん定常位相近似条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\{p_j\}, \{\theta_j\})}{\partial p_j} &= 0, \\ \frac{\partial S(\{p_j\}, \{\theta_j\})}{\partial \theta_j} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

から得られることは言うまでもない。

ここでの設定より、いま考えている系では、カオスとトーラス内部を結ぶ実古典軌道は存在しない。このような場合に、経路積分の積分経路を本来の実軸に沿った経路から複素空間に曲げることによって、実数解から複素解に広げた古典方程式の解を使うことが許されるなら、それらによって経路積分を半古典近似できる可能性がある。実数解によって結ばれない領域も、実は複素解で結ばれており、したがって複素経路はトンネル効果を表現できる可能性がある。実際このアイデアは、場の理論におけるトンネル効果を取り扱う、インスタントン理論でも使われてきた [7] (しかし、インスタントン理論は本質的に 1 自由度トンネル理論である。)

ここでは p 表示のプロパゲータを考えているので、初期状態 p_0 及び終状態 p_t はともに実数でなければならない。従って、(9) 式に寄与する古典軌道を複素軌道まで含めるためには、初期値の θ_1 を複素領域に解析接続、すなわち、

$$\theta_1 = \xi + \eta \quad (14)$$

とする必要がある。

初期条件 p_0, θ_1 が決まると、古典運動方程式に従って、あとの時間発展は一意的に決定される。ここで、一般に解析接続した初期条件 (13) を出発した複素ラグランジュアン多様体を

$$\mathcal{L}_t = \{p(t, \xi + i\eta, p_0), \theta(t+1, \xi + i\eta, p_0) \mid \xi, \eta \in \mathbb{R}\}. \quad (15)$$

で定義すると、終状態 p_t は、KAM 帯の外まで出ることができる。ただし、いま p -表示のプロパゲータを考えているので、終状態 p_t も実数であるような軌道のみが考慮の対象となる。すなわち、(13) の解析接続された初期条件で、

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{p(t, \xi + i\eta, p_0)\} &= p_t \\ \operatorname{Im}\{p(t, \xi + i\eta, p_0)\} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

なる境界条件を満足するような複素古典軌道が、いま複素半古典プロパゲータ (9) の和 k として加えるべきもの、ということになる。つまり、トンネルを考えるにあたって、我々が知らなければならない対象は、以下で定義される \mathcal{M}_t 集合:

$$\mathcal{M}_t = \{(\xi, \eta) \mid \operatorname{Im}\{p(t, \xi + i\eta, p_0)\} = 0\} \quad (17)$$

ということになる。定義から明らかなように、この \mathcal{M}_t 集合は、タイムステップ t が決まるごとに定まる集合である。従って、あるタイムステップ t で、(15) の境界条件を満足する複素軌道解は必ずしも別のステップで \mathcal{M}_t 集合の一員であるとは限らない（一般にはそうはならない）。

いま、 $t=6$ の場合にこの \mathcal{M}_t 集合（すなわち、半古典的なプロパゲータに寄与する初期値集合）を示す（図4）。黒く密集したあたりを拡大したものが図5に示されている。拡大すると明らかなように、密集したものも自己相似的な紐状の構造からできている。

図4の実軸 ($\eta=0$) は、実古典軌道に対する初期値を表わし、この系の設定より、終運動量 $p_t(t=6)$ は、KAM 帯のなかにはいったままである。それ以外の $\eta \neq 0$ の軌道がすべて半古典和に寄与する複素軌道群ということになる。

■ Laputa Branch とカオスのトンネリングの機構

図4、5で示されたような \mathcal{M}_t 集合の構造と、カオス系のトンネル現象発生機構を以下に述べる。

– Natural Branch –

まず、実軸と繋がる2つのブランチに注目する。量子論の波動関数との対応を調べることにより、これらは、実古典多様体が折れ曲がった場所から複素領域に伸びていることが知られる。この曲線に沿って η の値を大きくしていくと、終運動量 p_t は大きくなり、より深いトンネル領域に入り込んでい

く。このことから想像されるように、この2本のブランチは、通常の1次元系のポテンシャルトンネルリングの場合にも現れる、古典的展開点から伸びるトンネル軌道に相当するものである。インスタントン解と言っても良い。ここでは、これら実古典多様体と直接接続しているトンネル解のことを、通常我々が慣れ親しんだトンネル解という意味で、Natural Branch（自然分枝）と呼ぶことにする。しかし、この Natural Branch のみでは、図2で見たような複雑なトンネル領域の波動関数の様子を再現することはできない（図6参照）。

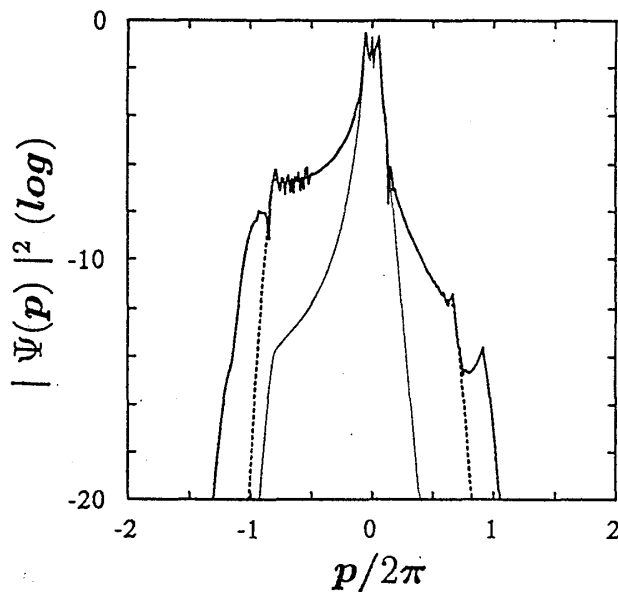


図6 半古典論を用いて計算した波動関数の絶対値二乗（対数スケール）。それぞれ、細線が Natural Branch のみ、破線が Natural Branch 及び Lower Branch を、太線が Natural Branch、Lower Branch 及び Laputa Chain を半古典和に入れて計算したもの。時間ステップはいずれも6ステップで、図2の純量子論に基づく計算と比べると、非常に良く一致していることがわかる。

カオスが存在する場合の複素軌道の著しい特徴は、Natural Branch の以外に (ξ, η) 面の深い領域にきわめて多くの寄与候補解が存在することである。以下これらを、実ブランチに接着せず複素空間の中空に浮かんでいることから Laputa Branch と呼ぶことにする。

– Lower Laputa Branch –

Laputa branch 一本一本の上では（拡大図をからわかるように、密集した塊りはすべて紐状のものからできていることがわかる）、終状態 p_t は $-\infty$ から $+\infty$ まで動く。つまり、紐状の構造の一本一本が、(9) 式の半古典和に現れる各複素軌道 k ということになる。ただし、複素半古典論を考える場合、すべての候補解は無条件で半古典プロパゲータの和に寄与するわけではない。それらのなかには一般的

には指数関数的に増大してしまうような非物理的な部分が存在する。これらは、“ストークス現象”によって除去されなければならない。ここに示したような複雑な複素ブランチの中で、いかにストークス現象を処理すべきか？という問題は、それ自身興味深く大きな問題ではあるが、ここではその問題には深入りしない[8]。

いずれにしても、もしたとえ図4に示した候補複素ブランチのうち、およそ半数がストークス現象で寄与しないとしても、依然として膨大な数のトンネル解が依然として残る。では残った多くのトンネルブランチは、同等に半古典和に寄与するのであろうか？

半古典和の表式(9)を見ると、寄与する軌道が実古典軌道であれば、古典作用が実数であるから、それぞれの軌道の重みは各項の係数 $A_k(p_t, p_0)$ の大小で決まる。しかし、いま考えている複素軌道の場合、古典作用が複素値を取るため、その虚部の大きさも寄与の大小に関係してくる。実際いろいろな軌道を調べて見た結果、トンネル軌道の場合は、各軌道の重みを決めているのは係数 $A_k(p_t, p_0)$ ではなく、古典作用の虚部である事がわかった。そうなると問題は、どのような軌道の虚部が大きく半古典和としては無視することができ、またどのような軌道の虚部が小さく寄与として重要か？ということになる。

古典作用は複素軌道の各時間での値を累積したようなものだから、実面近くを運動しているような軌道であれば、作用の虚部が小さくなる。最も単純に、そのような性質を持っていると考えられる軌道は、最初 $t=0$ から常時実面近くにいる軌道である。そのような複素解は、図3の上では、密集したブランチの塊りから、実軸 $\eta=0$ に近くまで降りてきている長い紐状のブランチである。いま、そのようなブランチを Lower Laputa Branch と呼ぶことにする。実際、これらの虚部を計算すると、初期の虚部が大きい、つまり η の大きい領域に密集して存在するブランチに比べると、古典作用の虚部は小さくなっていることを確認できる。それらのブランチを半古典和に加えると、Natural Branch では再現できなかった深いトンネル領域の波動関数の裾をつくる(図6参照)。

また、以上で考慮にいられた Lower Laputa Branch を、伏見表示された波動関数に重ね合わせると、可積分領域から出ている複数の滲みだしは Lower Laputa Branch に対応していることがわかる(図7)。

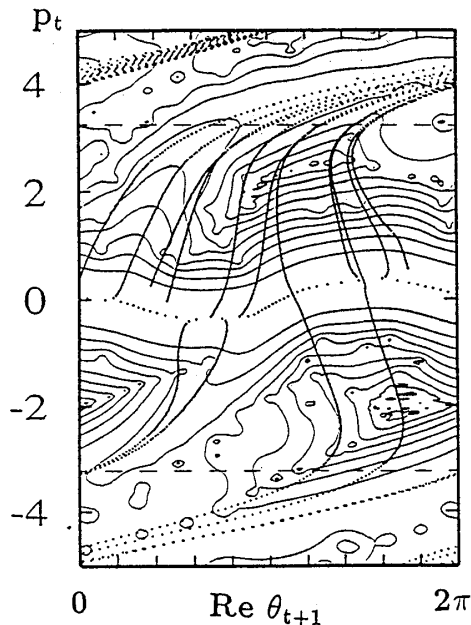


図7 伏見表示した波動関数(純量子論)に、半古典論の確率振幅に寄与する複素古典軌道(図中の破線)を重ね書きしたもの。ここでは、示されていないが、より深い ($|p| \gg 1$) トンネル領域ではさらにたくさんの複素経路が重要な寄与を与える。

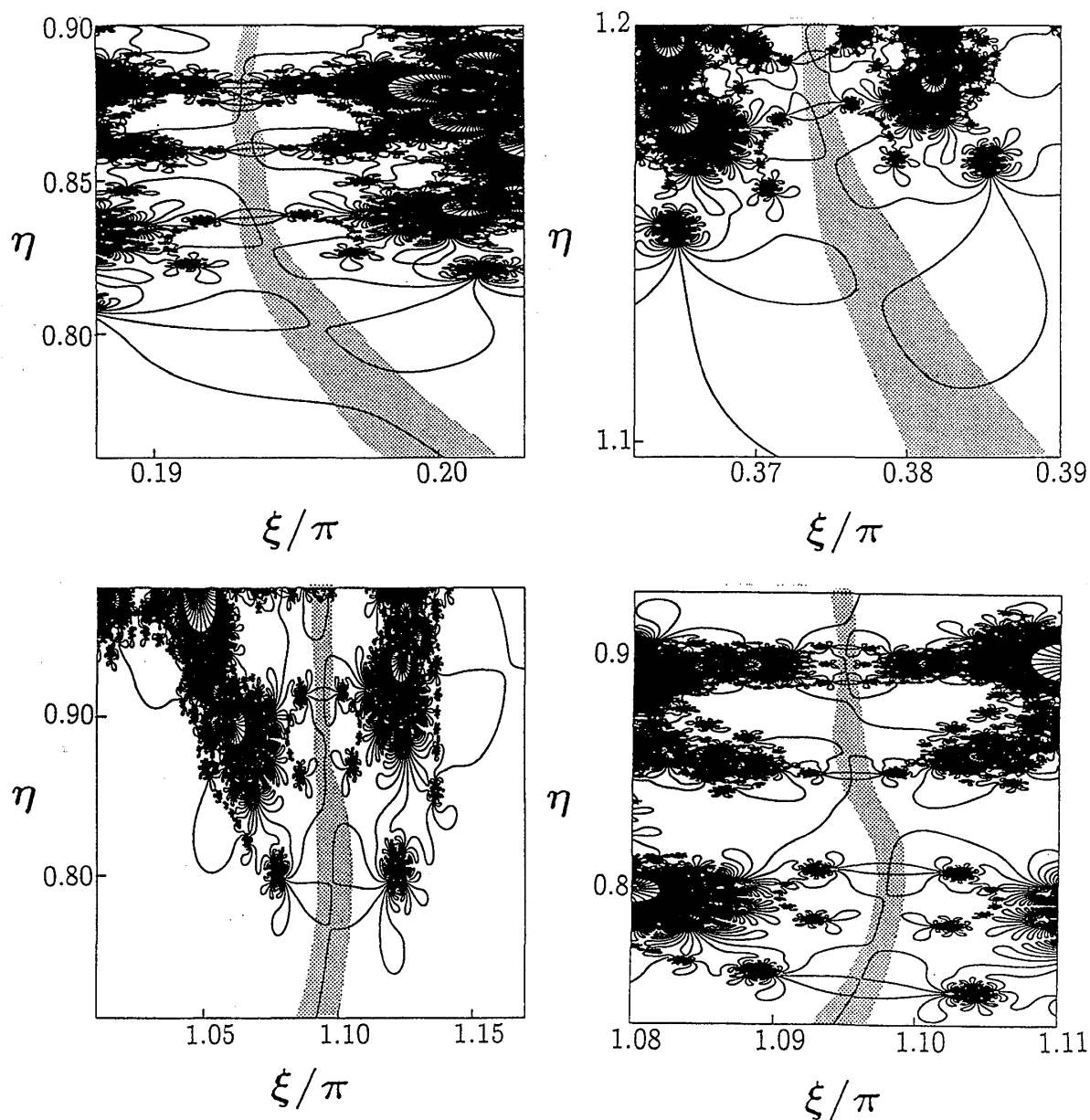


図8 半古典的な波動関数に寄与する複素経路の初期条件の集合 M_t (但し $t=7$) の密集部分の拡大図。図中ハッチを施した部分が文中 Laputa chain と呼んだ複素トンネル解の連鎖構造。この連鎖構造が複素空間で引き延ばしと折れ畳みを行う。ハッチをした以外の紐状の構造も、一方の端からもう一方の端に初期条件 θ_1 を動かすと、終状態の p_i は、 $-\infty$ から $+\infty$ まですべての値をとる。従って、紐状の構造すべてが、(5) の半古典和に寄与するトンネリング解になっている。しかし、鎖状の構造をもつ Laputa chain 以外のブランチは、古典作用の虚部が大きいため、実質的な寄与はほとんど無視できる。

- Laputa Chain -

しかし依然として、さらに深いトンネル領域あるいは“棚 (plateau)” と呼んだ、トンネル領域の平坦部分の上のランダムな振動は、これら Natural Branch+Lower Branch をもってしても再現することができない。もし、複素半古典論がこれらの構造を再現することができるとするならば、その源となるブランチは、 η のさらに大きい、非常に密集した塊りの中に埋もれていることになる。

ブランチが激しく密集したこの領域では、複素領域に深く入るに従って、ブランチの数が猛烈な勢いで増えていくため、たとえ数値的とはいえ、その探索には大きな困難を伴う。特にいまの場合、ポテンシャルに超越関数が入っているため、ほとんどの初期点は僅か数ステップですみやかに無限遠に飛んでいってしまう。

しかし幸い、発見的探索の結果、図8に示すような非常に特徴的な鎖状構造 (図でハッチを入れた構造-Laputa Chain-) が Lower Branch の根元に存在し (必ず存在しているわけではないが)、これらのブランチの連鎖構造が、波動関数の裾の複雑な構造を生み出す源になっていることがわかった。以下にそのメカニズムの概略を示す。

Laputa Chain の最大の特徴は、各ブランチが対構造をつくり、それぞれが非常に接近していることである。それ以外の (つまり Laputa Chain 以外の) Laputa Branch も必ず対をつくるブランチを特定できる、という意味では Laputa Chain と同じであるが、それら対をなすブランチどうしは ξ - η 面上で一般に非常に離れている。

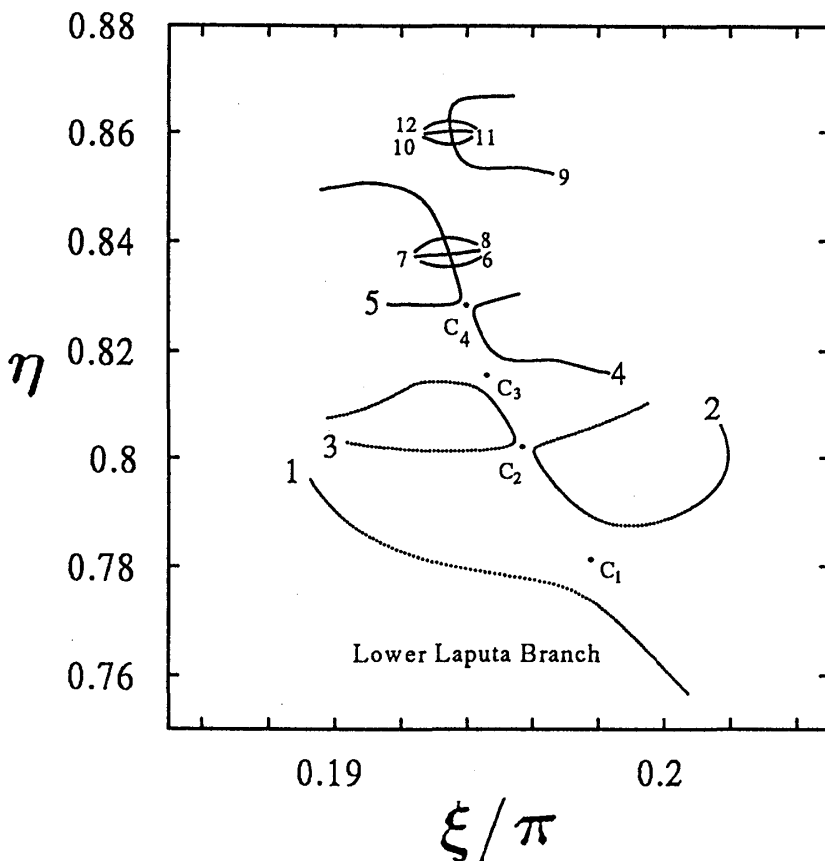


図9 典型的な Laputa Chain を抜き出したもの。鎖構造を構成する各ブランチに1,2,3,...と番号を振っている。ここでは、ブランチ1が Lower Laputa Branch と呼んだものに対応している。図中の c_1, c_2, \dots の位置に複素火点が存在する。火点を介して向き合うブランチの間隔は狭いものと広いものがあり、その間隔は自己相似性をもっている。

典型的な Laputa Branch を抜き出したものを図 9 に示す。一番下の 1. という番号を付けたものが先に Lower Laputa Branch と呼んだものである。図中に C_1, C_2, \dots と記したものは、

$$\left. \frac{dp_t}{d\theta_1} \right|_{\theta_1=\theta_1^*} = 0, \quad (18)$$

を満たす点、すなわちこの表示でみたときの複素 caustics (火点) である。火点の近傍では、

$$p(t, \theta_1) - p_t^* = b(\theta_1 - \theta_1^*)^2, \quad (19)$$

となる。局所的な性質から以下のようなことがいえる。

いま、正準共役な対をなす θ_{t+1} と p_t は、どちらとも θ_1 の関数だから、

$$\theta_{t+1} = \theta(t+1, \theta_1), \quad p_t = p(t, \theta_1). \quad (20)$$

である。ここで、 θ_1 を消去すると、ラグランジュアン多様体 \mathcal{L}_t が得られる。同時に、火点の条件 (18) は、

$$\left. \frac{dp_t}{d\theta_{t+1}} \right|_{\theta_{t+1}=\theta_{t+1}^*} = 0, \quad (21)$$

と書き換えられる。ただし、 (θ_{t+1}, p_t) 面上の火点は、 $(\theta_{t+1}^*, p_t^*) \equiv (\theta(t+1, \theta_1^*), p(t, \theta_1^*))$ と書かれる。その結果、火点の近傍では、

$$\Delta p_t = a \Delta \theta_{t+1}^2, \quad (22)$$

ただし、

$$\Delta p_t \equiv p_t - p_t^*, \quad (23)$$

$$\Delta \theta_{t+1} \equiv \theta_{t+1} - \theta_{t+1}^* \quad (24)$$

また、

$$a \equiv |a| e^{i\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 p_t}{d\theta_{t+1}^2} \right)_{\theta_{t+1}=\theta_{t+1}^*} \quad (25)$$

である。ここでいま、

$$\Delta p_t = R \exp(i\Phi) \quad (26)$$

とおくと、角変数 θ_{t+1} の虚部は、

$$\text{Im} \Delta \theta_{t+1} = \pm \sqrt{\frac{R}{|a|}} \sin\{(\Phi - \alpha)/2\} \quad (27)$$

となる。

ところで上でも触れたように、波動関数の絶対値を決めるのは、作用の虚部である。つまり、

$$\text{Im}S(p_t, p_0) \sim \log |\Psi_k(p_t)| \quad (28)$$

火点に非常に近い領域では、作用の虚部は、 $\text{Im}\theta_{t+1} = -\partial \text{Im}S(p_t, p_0)/\partial p_t$ で評価されるから、

$$\Delta S(p_t) \equiv S(p_t, p_0) - S(p_t^*, p_0) = - \int_{p_t^*}^{p_t} (\theta_{t+1}^* + \Delta\theta_{t+1}) dp_t. \quad (29)$$

ここで、(26)を用いると、

$$\text{Im}\{\Delta S(p_t) + \theta_{t+1}^*(p_t - p_t^*)\} = \mp \frac{2R^{3/2}}{3|a|^{1/2}} \sin(3\Phi/2 - \alpha/2) \quad (30)$$

というように、火点近傍での作用の虚部が見積もられる。

ところで、Laputa Chain内の火点近傍では、 p_t^* の絶対値も小さいが、対応する θ_{t+1}^* の絶対値も小さくなっている。この事実から、 $\alpha = \Delta\alpha$ もしくは $\alpha = \pi + \Delta\alpha$ 、ただし $|\Delta\alpha| \ll 1$ と置くことが許されよう。 p_t^* の虚部を $\epsilon^* \ll 1$ とすると、 $\text{Im}p_t = 0$ という条件より、 R と Φ に対して以下のような拘束がなければならない：

$$R \sin \Phi (= \text{Im}\Delta p_t) = -\epsilon^*, \quad (31)$$

ここで図10に、 $\Delta\theta_{t+1}$ と ΔS の $\Delta p_t \equiv \Delta p_t' + i\Delta p_t''$ ($\Delta p_t', \Delta p_t'' \in \mathbf{R}$)依存性を示した。ただし、 $\epsilon^*, \Delta\alpha \ll 1$ のときである。例えば、 $\Delta\theta_{t+1}$ に関しては、図中実線と波線で示した2つの場合があるが、 $\Delta\theta_{t+1}$ が原点を横切るような波線のような場合はあり得ない。なぜならば、もし $\Delta\theta_{t+1}$ がゼロとなるような点が存在したとすると、そのような点では (θ_{t+1}, p_t) がともに実数をとることになり、その点から逆写像して得られる初期点 (θ_1, p_0) も実数でなければならない。しかし、それはLaputa Branchの定義より反する。従って、 $\alpha \sim 0$ (case(a))、 $\alpha \sim \pi$ (case(b))のどちらかの場合のみが実現されているはずである。それぞれの場合に対して、

case(a)

$$\begin{aligned} \Delta p_t' \rightarrow +\infty & \quad \text{Im}\Delta\theta_{t+1} \rightarrow \sqrt{|\Delta p_t'|} \sin \Delta\alpha/2 \\ \Delta p_t' \rightarrow -\infty & \quad \text{Im}\Delta\theta_{t+1} \rightarrow \sqrt{|\Delta p_t'|} \cos \Delta\alpha/2 \end{aligned} \quad (32)$$

case(b)

$$\begin{aligned} \Delta p_t' \rightarrow -\infty & \quad \text{Im}\Delta\theta_{t+1} \rightarrow \sqrt{|\Delta p_t'|} \sin \Delta\alpha/2 \\ \Delta p_t' \rightarrow +\infty & \quad \text{Im}\Delta\theta_{t+1} \rightarrow \sqrt{|\Delta p_t'|} \cos \Delta\alpha/2 \end{aligned} \quad (33)$$

となっている。また、(a)(b)どちらの場合についても、 $\Delta\theta_{t+1}$ は $|\Delta p_t'| \rightarrow \infty$ とともに発散していく。しかし重要な点は、 $\Delta\alpha \ll 1$ であることにより、片側の発散の度合いは他方のそれに比べてずっと弱いことである (図10参照)。

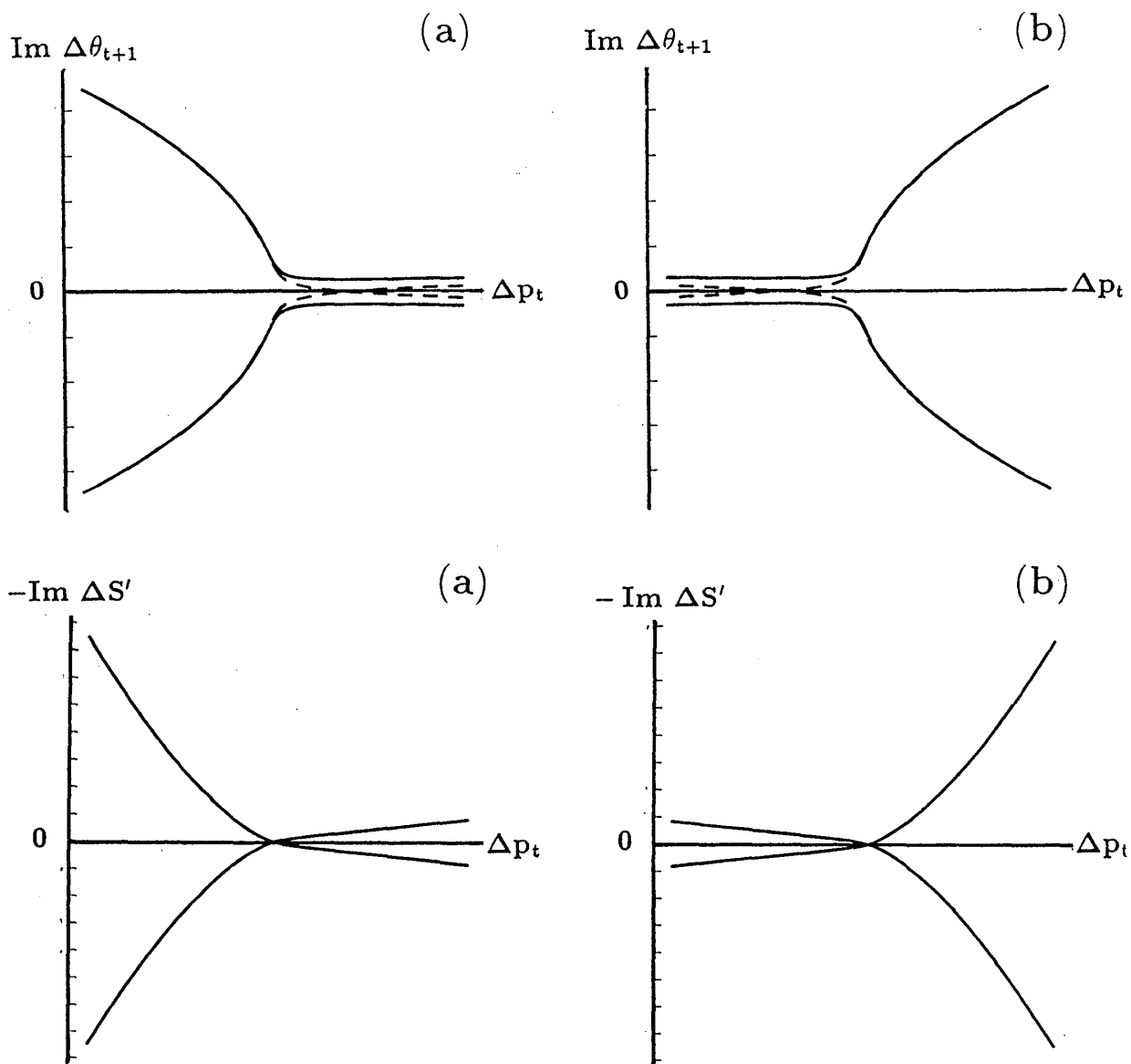


図10 火点近傍の $\Delta\theta_{t+1}$ と ΔS_t の Δp_t 依存性。ただし、 ϵ^* , $\alpha \ll 1$ 。(a)と(b)はそれぞれ、 $\alpha = \Delta\alpha$ 、 $\alpha = \pi + \Delta\alpha$ の場合に対応する。

以上、局所的な解析を基にすると、Laputa Chain 内で各ブランチが火点 C_1, C_2, \dots を経てどのようにつながっているか、ということを経験的に考察することが可能となる。

以上の考察が正しいことは、実際に各ブランチ 1, 2, 3, 4, 5 の $\text{Im}\theta_{t+1}$ および $\text{Im}S_t$ の p_t 依存性を見ることによって確かめられる (図 11)。

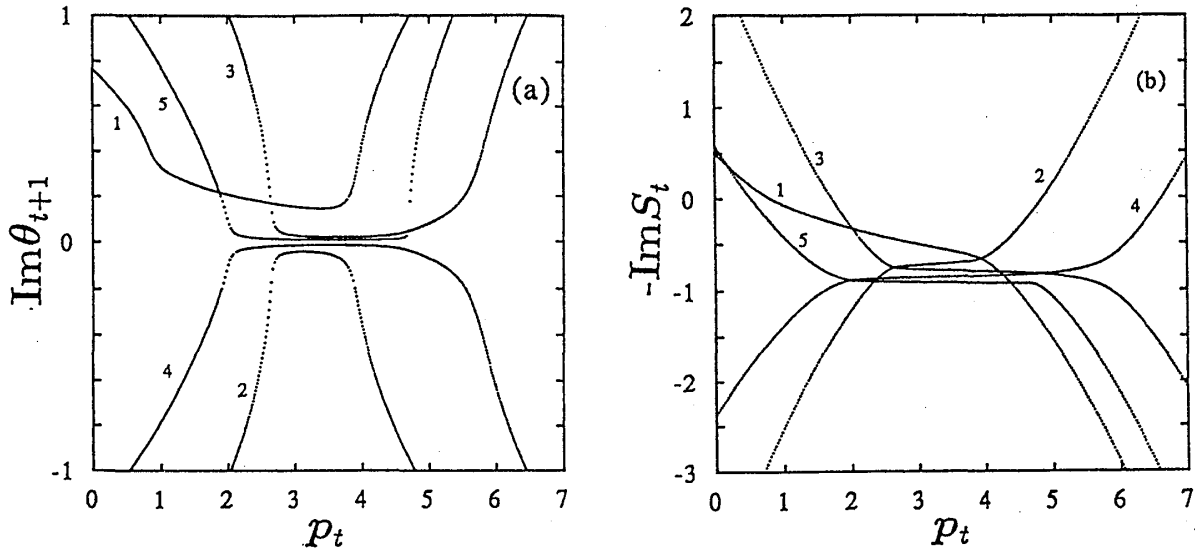


図 11 Laputa Chain を構成する各ブランチに対する (a) $\text{Im}\theta_{t+1}$ 、(b) $-\text{Im}S_t$ の p_t 依存性。図中の番号は、図 9 のなかの各ブランチに振られたものに対応する。

例えば、ブランチ 1 に注目すると、 $\text{Im}\theta_{t+1}$ は最初、0 に近づき、暫くゼロ近傍を p_t 方向に移動した後、ブランチ 1 とブランチ 2 の間にある火点近傍で再び大きくなり始める。 $\text{Im}\theta_{t+1} = -\partial \text{Im}S(p_t, p_0) / \partial p_t$ の関係式から対応する $\text{Im}S_t$ を見ると、最初急激に現象した後、しばらくプラトーをつくり、火点 2 と最も接近したところで、また再び急激に現象し始める。対応する波動関数は $\text{Im}S_t$ とほぼ同じ振る舞いを示す (図 12)。ブランチ 1 の半古典波動関数 $\log |\Psi(p)|^2$ は、最初急激に減少した後、比較的平坦な勾配をつくり、再び急激に減少し始める。

ブランチ 2 に関してもまったく同様である。 $\text{Im}S_t$ 、 $\log |\Psi(p)|^2$ とともに、ブランチ 1 とブランチ 3 とのそれぞれとの間にある火点にある間は平坦な棚を作るがそれ以外の場所では、急激な減少 (あるいは増大) を示す。

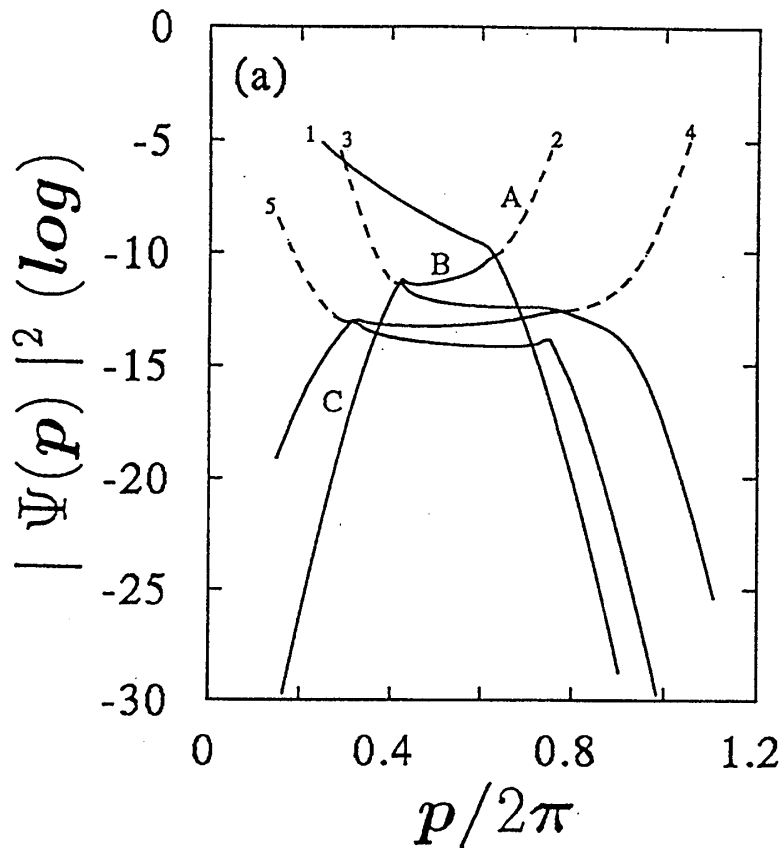


図12 Laputa Chainを構成する各ブランチから与えられる半古典波動関数。図中の番号は、図9のなかの各ブランチに振られたものに対応する。破線部分はストークス現象で除去される部分。ここでは、ストークス現象の除去には指数的最大優越の原理を用いている。向かい合うブランチの波動関数が入れ替わっているところで、ストークス現象が起こっていることに注意。

注目すべき点は、ブランチ1とブランチ2、あるいはブランチ2とブランチ3のそれぞれの半古典波動関数が全く正反対の方向を向いていることである。通常、トンネルを記述する波動関数は、トンネル方向に対して一方的に減少するのが常識であるが、ここで見られる半古典プロパゲータに寄与する各要素波動関数は、トンネル方向と反対の方向を向いているものがLaputa Chainに沿って交互に現れる。

各ブランチの柵の辺りでは、相連なるブランチどうしではそれほど波動関数の絶対値に差がないお陰で、それぞれが干渉を引き起こす。これも、これまで知られたトンネルの常識からは説明できない性質である。

このLaputa Chain内の構造を実面 $\text{Re}\theta_{t+1} - \text{Re}p_t$ の上に投影したのが図13である。急激に減少、もしくは増大している部分を除いた、プラトーをつくっている部分をつなぐと、実面にひじょうに近いところに、複素多様体を引き延ばしと折れた畳みを行っていることがわかる。

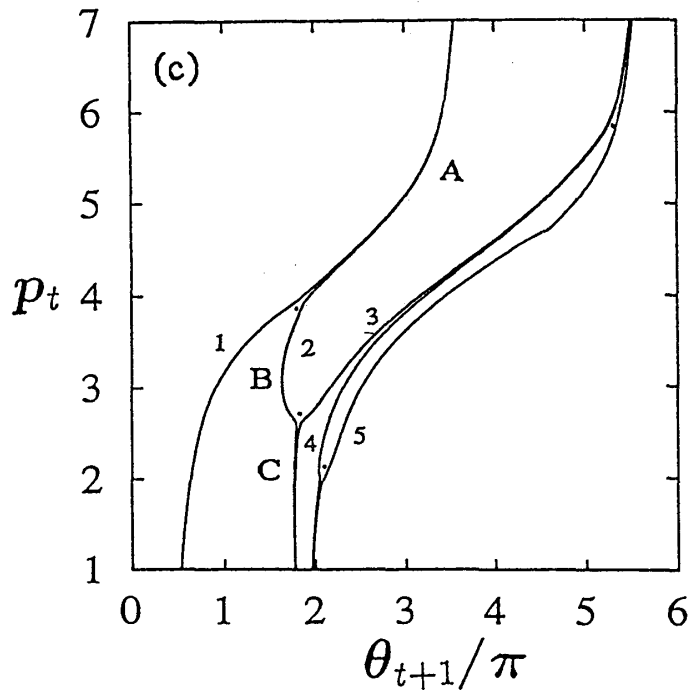


図13 Laputa Chainを構成する各ブランチを $\theta_{t+1}-p_t$ 面に射影したもの。図中の番号は、図9のなかの各ブランチに振られたものに対応する。図中A,B,Cは、図12のA,B,Cの各部分に対応する。破線部分はストークス現象で除去される部分。小さい点は、Laputa Chain内の向き合うブランチの間にある複素火点を $\theta_{t+1}-p_t$ 面に射影したもの。

以上をまとめると、Laputa Chainのなかではおおよそ次のようなことが起こっていることになる。まず、Laputa chainを形成するトンネル経路は複素空間の虚部深くに存在するが、その実面への射影がカオス海に達するや実面すれすれに近づく。それらは、火点(caustics)で新しい経路に切り換わる。(火点は鎖状の構造の繋ぎ目の実面に近いところに存在する。)一つの経路には複数の火点があり、経路が次々分岐して木(tree)構造をつくる。treeの任意の分枝をたどると実数カオスに対応した複雑な引き延ばしと折れ畳みが形成される。つまり、初期に複素空間深くに存在していた軌道は、動的に形成された複素火点(擬実火点)で折れ曲がりながら次第に実面に接近していく。その過程で形成された、引き延ばしと折れ畳み領域は、擬実火点に挟まれているため、きわめて実的な振舞いを見せる。動的に形成された擬実火点の間を波は進行・反射を繰り返す。但し、火点のわずかな複素性のため、その過程で振幅が次第に減衰していく。棚の上に見られたランダムな振動構造は、そのようなLaputa Chainに沿った波の行き来の結果できた干渉パターンであり、急峻な崖構造は、進行する波が擬火点近傍で反射されて、その先で急激に振幅が減衰する結果できたものである。また、崖の位置がランダムに形成される理由は、擬火点が複素面上でランダムに揺らぐことに起因している。

図6にLaputa chainからの寄与をすべて入れた後の $t=6$ での半古典的波動関数の結果を示してある。図3の純量子論で見られた諸特徴が見事に再現されているのがわかる。

これらの構造は、カオスとトーラスの界面の複素構造として普遍的であり、以上のような複雑な複素トンネル経路に由来する非可積分系特有のトンネル現象-カオス的トンネリング (Chaotic Tunneling)-は、考えているモデルの詳細に依存しない非可積分系に共通の性質であることを再び強調しておく。

■複素半古典論および複素古典力学に波及する諸問題

半古典論を用いて多自由度トンネリング (トンネルに關与する自由度自体が多自由度) を理解する試みは、可積分系における定式化の問題を含めてようやく始まったばかりといえる [9]。一般の力学系が、古典的には非可積分でカオスを発生すると全く同じ意味で、カオス存在下のトンネル現象は、実際に多くの局面で観測されるはずである。

カオス系でのトンネル現象の発生機構を複素半古典論の立場から見てきたが、この問題をさらに深めるための方向として、ここで触れることのできなかつた重要な問題は、

(1) 非可積分系の複素半古典論におけるストークス現象

ここで明らかにされたように、非可積分系では膨大な数の複素古典解が半古典プロパゲータの寄与する。これらのうち、どの軌道の作用の虚部が小さく、最終的な寄与としてきいてくるか? という問題がひとつの大きな問題であるが、上でも少し触れたが、もうひとつ複素半古典論を実行する際に避けて通ることのできない重要な問題がある [10]。一般に、ここで用いた複素半古典論はもちろんのこと、積分表示されたものに対して鞍点近似を使ったとき、得られた鞍点解はいつでも近似解として寄与するわけではない。このような、鞍点近似を行ったときに現れる寄与非寄与問題は、ストークス現象として知られている [11]。ストークス現象が、どのように起こるか、という問題は微分方程式の大域解の構成の問題とも絡んでおり、一般的な取り扱いには困難を究める。ましてや、ここで問題になったような、多変数の多重積分のストークス現象に関しては、ほとんど解析が進んでいないのが現状である。我々は、以上の解析においては、複素多様体のもつ木構造と指數的最大の優越の原理をもとにして、非可積分系での現象論を構築しそれを用いた [8]。詳しい方法論はここでは述べられなかったが、少なくとも得られた結果は満足のもの、その作業仮説の有効性は確かめられた。しかし、なぜその方法がうまくいくか、という我々の方法に対する基礎付けを与えることは、カオス系の複素半古典論を実行する際には避けて通ることではできない。

(2) カオス的トンネル現象と複素解析写像のジュリア集合

カオス的トンネリングの機構を理解するために用いられた複素古典力学は、すでに急速に進展しつつある数学の一研究分野でもある [13]。しかし、これまでの所、その研究の多くは純粋数学的な観点を巡って進められており、物理的な現象解析の道具としては、今のところほとんど意識されていないように思われる [13]。しかし実は、カオス的トンネリングの機構の中で、最も重要な役割を果たす Laputa Chain の時間無限大の極限が、複素力学系で最も重要な概念であるジュリア集合と非常に密接な関係があることがその後の解析で判明しつつある。やや誇張気味に言うと、“カオス系のトンネル現象は対応する複素写像のジュリア集合が見えている”ことになっている。現在、理想カオス系 (例えばエノン写像) に対して [14]、その精密な解析にあたっている最中であるが、カオス系のトンネリングを左右する Laputa chain は、実面上にあるジュリア集合の複素安定多様体と $\text{Re } p_0 = \text{const}$, $\text{Im } p_0 = 0$ の断面 (正確に言うと時間と共にそこに接近していく点) というはっきりとした意味づけを与えることができる。

このように、複素半古典論を介してカオス系のトンネリングを理解することは、複素古典写像の構造を解析することに直結する。さらに言うと、量子力学は、Balian-Blochの方法を用いて、複素古典論によって原理的には厳密に再現される [15]。解析接続された複素作用のリーマン面の構造を調べることは量子力学自身を古典論の言葉で理解する事に相当し、カオス系の量子論を理解するうえで重要な課題となってくるはずである。

参考文献

- [1] A.O. Caldeira and A.J. Leggett, *Ann. Phys. (NY)* **149**(1983)374.
- [2] A. Shudo and K.S. Ikeda, *Phys. Rev. Lett.*, **74**(1995)682; A. Shudo and K.S. Ikeda, submitted to *Physica D*.
- [3] K. Takahashi and K.S. Ikeda, private communication.
- [4] O. Bohigas, S. Tomsovic, and D. Ullmo, *Phys. Rev. Lett.*, **223**(2), 45(1993); S. Tomsovic and D. Ullmo, *Phys. Rev. E* **50**, 145(1994).
- [5] M.V. Berry and K.E. Mount, *Rep. Prog. Phys.*, **35**, 315(1972).
- [6] J. Heading, *an Introduction to Phase-Integral Methods* (Methuen, London, 1962); N. Fröman and P.O. Fröman, *JWKB Approximation* (North Holland, Amsterdam, 1965).
- [7] S. Coleman, "The Use of Instantons", in *The Whys of Subnuclear Physics*, edited by A. Zichichi (Plenum, New York, 1979); C.G. Callan, Jr., and S. Coleman, *Phys. Rev. D* **16**(1977)1762.
- [8] A. Shudo and K.S. Ikeda, *Phys. Rev. Lett.*, **76**(1996)4151.
- [9] M. Wilkinson, *Physica D* **21**, 341(1986); S. Takada and H. Nakamura, *J. Chem. Phys.* **100**, 98(1994); S.C. Creagh, *J. Phys. A*, **27**, 4969(1994).
- [10] S. Adachi, *Ann. Phys.*, (NY) **195**, 45(1989).
- [11] R.B. Dingle, *Asymptotic expansions: their derivation and interpretation*(Academic Press, London, 1973).
- [12] C.J. Howls, preprint.
- [13] R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Second Edition*, (Addison-Wesley, 1989).
- [14] 上田哲夫、谷口雅彦、諸澤俊介、"複素力学系序説" (培風館、1995年)。
- [15] R. Balian and C. Bloch, *Ann. of Phys.* **85**(1974)514; A. Voros, *Ann. Inst. H. Poincaré, A* **39**(1983)211.