

非摂動くりこみ群と量子トンネル現象¹

金沢大学大学院 自然科学研究科 数理情報科学専攻 堀越 篤史²

(1998年12月14日受理)

1 はじめに

1.1 自然の階層構造とくりこみ群

自然界は一般に階層構造を形成している。一口に階層と言ってもその構造を特徴付ける次元の数と種類は自明ではない [1][2]。例えば素粒子論では、通常一つの次元を用いた階層描像が採用されている。それは素粒子論の依って立つ相対論的量子論が光速 c 、plank 定数 \hbar という二つの定数を内包しているため、 $c = \hbar (\equiv \frac{\hbar}{2\pi}) = 1$ とおく自然単位系を採れば物理量は一つの次元を用いて表されるからである。素粒子屋はしばしばこの最も単純な描像を他の階層にも外挿することで自然界全体を概観する。それが長さのスケール、もしくはエネルギーのスケールによる階層分解である (図 1)。

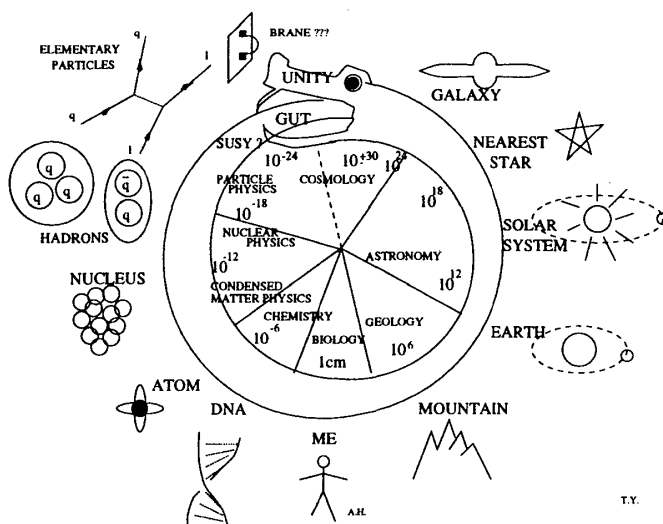


図 1: The snake of sizes [3]

各スケール毎の固有の法則に従って固有の構造が存在し、それぞれを記述するための学問領域が存在する。スケールが変化すればそれに応じて法則も変化し、構造の形態も変化していくわけだが、その変化を追うことは一般に容易ではない。例えば図 1 で言えば、素粒子 (クォーク、グルーオン) からハドロンが形成されることは定性的にはよく分かっているが、素粒子の従う法則 (量子色力学: QCD) から直接ハドロン物理量を導くことには数々の困難が残っている [4]。ミクロの基礎法則に対してマクロの現象を有効的に記述する理論のことを有効理論と呼ぶが、その有効理論を正しく与えることは一筋縄ではいかないのである。この種の問題の取り扱いに有効な視点を与えてくれるのが、今回の主題であるくりこみ群の方法である。

¹ この内容は金沢大学の 青木健一、中村悦子、寺尾治彦の各氏と SONY 根上の谷口雅樹氏との共同研究に基づいています。その一部は [12] に掲載される予定です。プレプリントは [48] です。

² E-mail: horikosi@hep.s.kanazawa-u.ac.jp

くりこみ群の方法は粗視化の方法とよく言われる。粗視化と言っても、系を単純にスケール変換するだけなら、それは単なる次元解析に過ぎない。系の内包する自由度の情報を適当に織り込みながらスケール変換を実行するところに、くりこみ群の妙がある。その変換のことをくりこみ変換と呼ぶ [5][6]。次元解析それ自体が普遍的かつ強力な解析手法であることから、その自然な拡張であるくりこみ群もまた、汎用性に富んだ優れた手法であると期待される。しかし、現在くりこみ群の名を冠した解析は広範な分野で見られるが、系の情報をどれだけ正確に捉えられているかに関しては、大きなばらつきがあるのが現状である [7]。

くりこみ群の手法が威力を発揮するのは、場の量子論の様な多くの自由度を内包する系である。この類の系の解析はその自由度の取扱いに手を焼くのが常であるが、くりこみ群はスケール分解という形でその取扱いの明確な指針を与えてくれる。無論、場の量子論の最も伝統的で整備された解析手法は摂動論であり、くりこみ、くりこみ群という概念は、それを通じて発見されたものである [8][9][10]。しかしその理論形式は、摂動、すなわち自由場からのゆらぎを結合定数についてのべき展開により取り入れるという手法に依拠していたため、場の量子論の豊富な内容を捉え切れなかった。例えば、前述した様な QCD からのハドロン物理の導出の問題等は、摂動論での記述はできない。そのため摂動論を越えたいいわゆる「非摂動的」な取り扱いが必要となるのである。70年代、K-G Wilson は摂動論に依らない形式で統計力学系（ユークリッド化された場の量子論に等価）におけるくりこみ群を定式化した [11]。それは経路積分形式を用いて象徴的に

$$Z = \int^{\Lambda} \mathcal{D}\Phi(p) e^{-S_{\Lambda}[\Phi]} = \int^{\Lambda-\delta\Lambda} \mathcal{D}\Phi(p) e^{-S_{\Lambda-\delta\Lambda}[\Phi]} \quad (1)$$

と書くことができる。すなわち、各エネルギースケール Λ に対して Wilson 有効作用 S_{Λ} で記述される有効理論が存在するという描像である。 Λ の変化 ($\Lambda \rightarrow \Lambda - \delta\Lambda$) に対する S_{Λ} の変化 ($S_{\Lambda} \rightarrow S_{\Lambda-\delta\Lambda}$) を表現したものがくりこみ変換である。このくりこみ変換を正しく書き下すことができれば、原理的には有効理論を正しく評価できるわけだが、この「正しく書き下す」ことは系に特殊な対称性でもない限り一般に困難である。なぜならそれは $\delta\Lambda$ に対応する場のモードの汎関数積分を実行することであり、通常は何らかの近似を用いなければ評価できないからである。実際、摂動論や時空の次元を少しずらした時のそのずれについての展開 (ϵ 展開) の様な、何らかの小さなパラメタについての展開法が用いられてきた。Wilson によるもとの定式化自体は非摂動的なものだったが、具体的な解析の段になると結局は摂動論的な手法に頼らざるを得なかった。これに対し、その様なパラメタに依らずにくりこみ変換を構成することを目指すのが、ここで言う「非摂動くりこみ群」なのである。

非摂動くりこみ群のアイデアは次の様にまとめられる。 $\delta\Lambda \rightarrow 0$ を考えることにより、くりこみ変換を $\frac{\delta S_{\Lambda}}{\delta\Lambda}$ という微分形で表現する。すると場についての汎関数積分はガウス積分の形になり、それを実行することで $\frac{\delta S_{\Lambda}}{\delta\Lambda}$ の関数形を厳密に求めることができる。こうして求めた汎関数微分方程式のことを非摂動くりこみ群方程式と呼ぶ。方程式それ自体は、くりこみ変換を正確に表現したものになっている。後はこの方程式が首尾良く解ければ完璧なのだが、さすがにそんな虫のいい話は無く、方程式を解く際に何らかの近似法が必要になってくる。しかしその近似法は、微小パラメタに依存した類のものとは別種の、系統的に近似の精度を上げていけるものとなっている。非摂動くりこみ群方程式自体は Wilson 流のくりこみ群が提唱された当初から与えられているが、具体的な物理系への適用が本格的に始まったのは、様々なタイプの方程式や近似法が整備されるようになった最近のことである [12]。くりこみ群の方法の適用可能性から近似法の是非まで、まだまだ解明されていないことが多い、魅力的な分野となっている。

1.2 なぜ量子トンネル現象に興味があるのか

我々是非摂動くりこみ群の手法を用いた場の量子論の解析を目指している。しかし前述したように、非摂動くりこみ群方程式は何らかの近似無しには解くことができないため、そのような解析が系の非摂動効果を正しく捉えられるかどうかは全く自明ではない。一般に非摂動効果には二つのタイプがある。一つは摂動級数の全次数の足し上げに対応するもので、これはボレル総和法による取り扱いが可能な場合もある [13]。もう一つは結合定数 λ についての真性特異点であり、結合定数 λ の原点で展開することが不可能な $e^{-\frac{1}{\lambda}}$ 型の構造で特徴付けられる [14]。この類の特異性は量子トンネル現象が起こる系に典型的である。具体例として、対称二重井戸 ($V(x) = \lambda x^4 - \frac{1}{2}x^2$) の量子力学を考えてみよう。真中の山が十分高いとして二つの井戸を独立に扱えば、系全体の基底状態は左右二つが縮退し、 $x = \pm \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$ のまわりの零点振動 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ を与える。しかし系全体を量子力学的に正しく取り扱えば、トンネリングにより左右の状態の混合が起こり、縮退は解けて $\Delta E \sim e^{-\frac{1}{\lambda}}$ 型のエネルギーギャップが生じる (図2)。これはインスタントン法と呼ばれる手法で計算可能で、指数関数の肩の因子 ($\sim \frac{1}{\lambda}$) は、トポロジカルな配位であるインスタントンの自由エネルギーへの寄与に由来する。

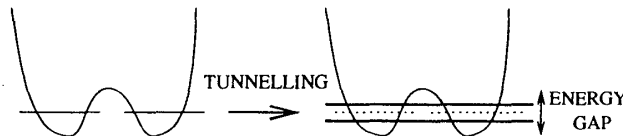


図 2: 量子トンネル現象

非摂動くりこみ群はこれらの非摂動効果を定性的にも定量的にも十分良く評価できるだろうか? それをチェックするために、我々は量子力学系 (一次元実スカラー場理論) に解析の対象をしぼる。なぜなら量子力学系ならば Schrödinger 方程式を数値的に解くことで正確な結果がいつでも得られるからである。さらには摂動論やインスタントン法といった従来の解析法と比較することで、非摂動くりこみ群の持つ特性を理解することもできる。無論我々は場の理論への拡張を念頭に置いているわけだが、今回の解析はそれにとどまらない独自の意味を持つ。量子力学系は有限自由度系であり、自発的対称性の破れも起こらない。先に述べた様に、くりこみ群が威力を発揮するのは自由度の大きな系であり、相転移や臨界現象がその花形である。それらの華々しさに較べて量子力学系はくりこみ群的な醍醐味に欠けるせいも、くりこみ群による本格的な解析は今まではほとんどされたことがなかった。しかし非摂動効果うんぬんを抜きにしても、量子力学を有効作用や flow といったくりこみ群の言葉で捉え直すことは、量子論をより深く理解するうえで重要なことだと思われる。

他方、実用的な視点から見ても、今回の解析は重要な意義を持つ。なぜならトンネリングが極めて量子論的な現象であり、初期宇宙から生体内まで多くの階層 (図1の約半面!) に共通して見られる現象であるにもかかわらず、量子トンネル現象一般を解析するための汎用性の高い手法は今のところ存在していないからである。現在、宇宙、素粒子、原子核、物性、化学、生物等の広範な分野の研究者がそれぞれの問題意識でそれぞれの手法を用いたアプローチを行なっている [15]。もし非摂動くりこみ群が非摂動効果を十分に取り扱うことができるなら、それは量子トンネル現象解析のための強力な新手法となりうる。もともとくりこみ群の手法が系の対称性や次元に左右されない汎用性の高いものだからである。そういったことを展望するならば、今回の解析はより複雑な系における量子トンネル現象の非摂動くりこみ群による解析の第一歩として位置付けられることになる。

2 非摂動くりこみ群の定式化

2.1 Wilson 有効作用と Shell 積分

非摂動くりこみ群では Wilson 有効作用 S_Λ に着目し、その変化を追う。 S_Λ は運動量が Λ 以上の場のモードについては既に積分済みとして、その効果を正しく取り入れた作用として定義される。有効作用 S_Λ で記述される有効理論の場の運動量の上限は Λ であり、この意味で Λ は物理的カットオフと呼ばれる。式 (1) の $\delta\Lambda$ に対応する場についての汎関数積分のことを shell 積分と呼ぶ。具体的に D 次元実スカラー場の理論を考えてみよう [16]。初期作用が 4 点結合まで含むとして、

$$S_\Lambda[\Phi] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 + \frac{1}{2} m_\Lambda^2 \Phi^2 + \lambda_\Lambda \Phi^4 \right] \quad (2)$$

とする。ここで $\Lambda - \delta\Lambda \equiv b\Lambda$ として場 $\Phi(p)$ を二つのモードに分解する。

$$\Phi(p) = \Phi_{<}(p) + \Phi_S(p), \quad \Phi_S(p) = \begin{cases} \Phi(p) & b\Lambda \leq |p| < \Lambda \\ 0 & 0 \leq |p| < b\Lambda \end{cases} \quad (3)$$

$$\Phi_{<}(p) = \begin{cases} 0 & b\Lambda \leq |p| < \Lambda \\ \Phi(p) & 0 \leq |p| < b\Lambda \end{cases} \quad (4)$$

$\Phi_S(p)$ を shell モード、 $\Phi_{<}(p)$ を lower モードと呼ぶ。これを用いて $S_\Lambda[\Phi]$ を書き換えると

$$Z = \int^\Lambda \mathcal{D}\Phi_{<}(p) e^{-S_\Lambda[\Phi_{<}]} \int^\Lambda \mathcal{D}\Phi_S(p) \exp \left(- \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi_S)^2 + \frac{1}{2} m_\Lambda^2 \Phi_S^2 + \lambda_\Lambda (4\Phi_{<}^3 \Phi_S + 6\Phi_{<}^2 \Phi_S^2 + 4\Phi_{<} \Phi_S^3 + \Phi_S^4) \right] \right) \quad (5)$$

となる。この $\mathcal{D}\Phi_S$ 積分が shell 積分である。これが実行できれば結果は

$$Z = \int^\Lambda \mathcal{D}\Phi_{<}(p) e^{-(S_\Lambda[\Phi_{<}] + \delta S_\Lambda[\Phi_{<}])} \equiv \int^{b\Lambda} \mathcal{D}\Phi(p) e^{-S_{b\Lambda}[\Phi]} \quad (6)$$

とまとめられる。すなわちエネルギーの大きなモードである Φ_S の量子効果 (量子ゆらぎ) を積分したという情報が、Wilson 有効作用の変化 $S_\Lambda \rightarrow S_{b\Lambda}$ 中に表現されるのである。ではこの積分は具体的にどのような効果を生むだろうか? それを垣間見るために、まずは積分を摂動的に評価してみる。 λ_Λ についての摂動を考えてみよう。例えば $\Phi_{<}^2 \Phi_S^2$ の項に着目すると

$$\exp \left(- \int d^D x 6\lambda_\Lambda \Phi_{<}^2 \Phi_S^2 \right) = 1 - \int d^D x 6\lambda_\Lambda \Phi_{<}^2 \Phi_S^2 + \frac{1}{2!} \left(\int d^D x 6\lambda_\Lambda \Phi_{<}^2 \Phi_S^2 \right)^2 + O(\lambda_\Lambda^3) \quad (7)$$

のように展開することでガウス積分が実行できる。 $O(\lambda_\Lambda)$ では

$$\int^\Lambda \mathcal{D}\Phi_S(p) e^{S_\Lambda^{\text{free}}[\Phi_S]} \left(- \int d^D x 6\lambda_\Lambda \Phi_{<}^2 \Phi_S^2 \right) = - \int d^D x \frac{\mu}{2} \Phi_{<}^2 \quad (8)$$

$$\mu = 12\lambda_\Lambda \int_{b\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2} = 12\lambda_\Lambda A_D \left(\frac{1}{D-2} [1 - b^{D-2}] \Lambda^{D-2} \right), \quad A_D = \frac{\int d\Omega_D}{(2\pi)^D} \quad (9)$$

となる。運動量積分区間に紫外カットオフ Λ 、赤外カットオフ $b\Lambda$ が入っているため、この積分に発散の困難は無い。この項はあたかも $\exp \left(- \int d^D x \frac{\mu}{2} \phi_{<}^2 \right)$ を展開して得られるものと見ることができる。すなわち係数 μ は結合定数 m_Λ^2 に対する補正を与えることになる。ダイアグラムの例えば、この項は図 3(A) のように表せる。 $\mathcal{D}\Phi_S$ 積分において $\Phi_{<}$ は単なる外場 (外線) としての役

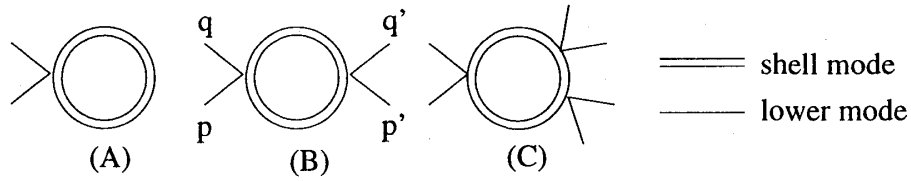


図 3: 二、四、六点結合への量子補正

割しか果たさない。次に $O(\lambda_\Lambda^2)$ の寄与を見てみる。ダイアグラムの図 3(B) の形で表される寄与は、

$$\begin{aligned} & \int^\Lambda \mathcal{D}\Phi_S(p) e^{S_\Lambda^{\text{free}}[\Phi_S]} \left[\frac{1}{2!} \left(\int d^D x 6\lambda_\Lambda \Phi_\<^2 \Phi_S^2 \right)^2 \right] \Big|_{\text{connected}} \\ &= 36\lambda_\Lambda^2 \int d^D x \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{d^D q'}{(2\pi)^D} \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} e^{-i(q+p+q'+p')x} \Phi_\<(q) \Phi_\<(p) \Phi_\<(q') \Phi_\<(p') \\ & \quad \times \int_{b\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(-k+q'+p')^2} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。ここで式(10)の分母で $q'+p'=0$ とおいてみる。これはすなわち外線からの運動量の流れ込みを無視する近似である。すると式(10)は局所演算子(微分結合を含まない演算子)の形で書けて

$$\begin{aligned} &= - \int d^D x \zeta \Phi_\<^4 \\ & \quad \zeta = -36\lambda_\Lambda^2 \int_{b\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2} \\ & \quad = -36\lambda_\Lambda^2 A_D \left(\frac{1}{D-4} [1 - b^{D-4} \Lambda^{D-4}] \right) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。係数 ζ は四点結合定数 λ_Λ に対する量子補正を与える。もちろん今の場合 $q'+p'=0$ だけではなく $q'+p' = \text{定数}$ でありさえすれば、補正は局所演算子型に制限される。ただし $b \rightarrow 1$ の極限ではその近似は $q'+p'=0$ の場合のみ可能である。ともあれ、このようにして shell 積分は結合定数への補正という形でその痕跡を残す。注意すべきは、その補正はもともと理論に含まれていた結合以外にも及ぶということである。すなわち shell 積分は新たな相互作用を生成する。例えば $O(\lambda_\Lambda^3)$ を考えると、図 3(C) の形で、始めには存在していなかった六点相互作用が生成されるのである。shell 積分を行なうと、対称性から許されるすべての相互作用(演算子 \mathcal{O}_i 、結合定数 g_i) が生成され、Wilson 有効作用は

$$S_{b\Lambda} = \int d^D x \sum_i (g_{b\Lambda})_i \mathcal{O}_i \quad (12)$$

といった非常に一般的な形になる。これはもちろん、いわゆる微分結合も含んでいる。微分結合は外線からの運動量の流れ込みを定数とせず扱えば生成される。例えば式(10)において $q' \neq \text{定数}$ 、 $p'=0$ とおき、プロパゲーターを $q'^2=0$ のまわりで展開してやると

$$\frac{1}{(-k+q'^2)} = \frac{1}{k^2} + \frac{\partial}{\partial q'^2} \frac{1}{(-k+q'^2)} \Big|_{q'^2=0} q'^2 + \dots \quad (13)$$

となる。 q'^2 はフーリエ変換すると $-\partial^2$ になるから、このようにして微分結合は生成されてゆくのである。もちろん運動項 $\frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2$ の係数も補正を受けて変化してゆく。

2.2 Wegner-Houghton 方程式

shell 積分の物理的意味が分かったところで、次にそれを非摂動的に評価してみよう。前述したように、それには微分 $\frac{\delta S_\Lambda}{\delta \Lambda}$ を考えればよい。まず式 (1),(3),(4) から $S_{\Lambda-\delta\Lambda}[\Phi_{<}]$ は

$$S_{\Lambda-\delta\Lambda}[\Phi_{<}] = -\log \int_{\Lambda-\delta\Lambda}^\Lambda \mathcal{D}\Phi(p) e^{-S_\Lambda[\Phi]} = -\log \int^\Lambda \mathcal{D}\Phi_S(p) e^{-S_\Lambda[\Phi]} \quad (14)$$

と書ける。 $S_\Lambda[\Phi]$ を Φ_S について展開すると

$$\begin{aligned} S_\Lambda[\Phi] &= S_\Lambda[\Phi_{<}] + \int_{\Lambda-\delta\Lambda}^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left. \frac{\delta S_\Lambda[\Phi]}{\delta \Phi_S(p)} \right|_{\Phi_S=0} \cdot \Phi_S(p) \\ &+ \frac{1}{2!} \int_{\Lambda-\delta\Lambda}^\Lambda \int_{\Lambda-\delta\Lambda}^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \Phi_S(p) \cdot \left. \frac{\delta^2 S_\Lambda[\Phi]}{\delta \Phi_S(p) \delta \Phi_S(q)} \right|_{\Phi_S=0} \cdot \Phi_S(q) + O(\delta\Lambda^2) \quad (15) \end{aligned}$$

となる。微分を求めるには $O(\delta\Lambda)$ までの形が分かっているから、高々場 Φ_S の二次までを含む項を評価するだけでよい。すなわち shell 積分はガウス積分一発で正確に実行できる。これが非摂動くりこみ群の最大の利点である。

さて、くりこみ群は一般に「系の自由度のうちの一部を積分＋スケール変換」で特徴付けられる。今の場合それは $\Lambda(\tau) \frac{\delta \hat{S}_\Lambda(\tau)}{\delta \Lambda(\tau)}$ を評価することに対応する。ここで $\hat{S}_\Lambda(\tau)$ はカットオフ $\Lambda(\tau) \equiv \Lambda_0 e^{-\tau}$ を用いて無次元化された Wilson 有効作用である。 $\delta \hat{S}_\Lambda(\tau) = \hat{S}_{\Lambda(\tau+\delta\tau)}[\hat{\Phi}_{<}] - \hat{S}_\Lambda(\tau)[\hat{\Phi}_{<}]$ であることから、ガウス積分を実行することにより次の Wegner-Houghton 方程式が得られる [17]。

$$\begin{aligned} \frac{\delta \hat{S}_\Lambda(\tau)[\hat{\Phi}]}{\delta \tau} &= D \hat{S}_\Lambda(\tau)[\hat{\Phi}] - \int_0^1 \frac{d^D \hat{p}}{(2\pi)^D} \left(\hat{\Phi}(\hat{p}) \left[d_\Phi + \gamma_\Phi + \hat{p} \frac{\partial'}{\partial \hat{p}} \right] \frac{\delta \hat{S}_\Lambda(\tau)[\hat{\Phi}(\hat{p})]}{\delta \hat{\Phi}(\hat{p})} \right) \\ &+ \frac{1}{2\delta\tau} \int_1^{e^{\delta\tau}} \frac{d^D \hat{p}}{(2\pi)^D} \text{tr} \log \left. \frac{\delta^2 \hat{S}_\Lambda(\tau)[\hat{\Phi}]}{\delta \hat{\Phi}_S(\hat{p}) \delta \hat{\Phi}_S(-\hat{p})} \right|_{\hat{\Phi}_S=0} \\ &- \frac{1}{2\delta\tau} \int_1^{e^{\delta\tau}} \frac{d^D \hat{p}}{(2\pi)^D} \left. \frac{\delta \hat{S}_\Lambda(\tau)[\hat{\Phi}]}{\delta \hat{\Phi}_S(\hat{p})} \right|_{\hat{\Phi}_S=0} \left(\left. \frac{\delta^2 \hat{S}_\Lambda(\tau)[\hat{\Phi}]}{\delta \hat{\Phi}_S(\hat{p}) \delta \hat{\Phi}_S(-\hat{p})} \right|_{\hat{\Phi}_S=0} \right)^{-1} \left. \frac{\delta \hat{S}_\Lambda(\tau)[\hat{\Phi}]}{\delta \hat{\Phi}_S(-\hat{p})} \right|_{\hat{\Phi}_S=0} \quad (16) \end{aligned}$$

ハット (^) は無次元化された量を表す。 $d_\Phi = \frac{D-2}{2}$ は場 Φ の正準次元であり、 γ_Φ は運動項 $\frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2$ の係数を常に 1 に規格化することによる場 Φ の異常次元である。式 (15) 中の運動量 p, q のうち、 $\delta\tau \rightarrow 0$ 極限では $p+q=0$ を満たすものだけが残る。非摂動くりこみ群方程式には様々なタイプのものがあるが [18][19]、これはその中でも最もシンプルなものである。右辺は一般に β 汎関数と呼ばれる。その各項の物理的意味を見てみよう。

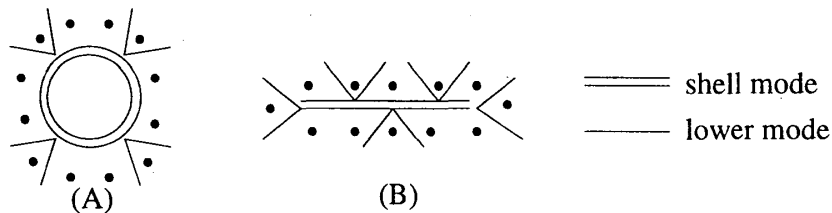


図 4: 量子補正

初項と第二項は、 γ_Φ を除いては、量子補正ではない単純なスケール変換の効果（正準スケールリング）を表す。第三項は shell 積分からくる 1-loop の量子補正である (図 4(A))。第四項はガウス積分をする際の平方完成からくるおつりの項であり、loop の寄与を含まない tree ダイアグラムである (図 4(B))。この方程式を解くことにより、運動量の大きいモードから順に量子補正が取り入れられてゆき、 $\hat{S}_\Lambda(\tau)$ は変化して (flow して) ゆく。

2.3 近似法

Wegner-Houghton 方程式それ自体は exact なのだが、これは汎関数微分方程式であり、このままの形で解くことは困難である。非摂動くりこみ群では、局所的な演算子から始めて、徐々に高階微分の入った演算子を加えていくという「微分展開」が一般に用いられている。その第零近似は局所ポテンシャル近似 (LPA) と呼ばれる [20]。式 (11) 前後の議論で見たように、それは外線 (lower モード) からの運動量の流れ込みを 0 とすれば実現される (今の場合は $b \rightarrow 1$ に対応)。さらにここでは $\Phi_{\leq}(x) = \varphi$: 定数、 $\Phi_{\leq}(p) = \int d^D x e^{-ipx} \varphi = \varphi (2\pi)^D \delta^D(p)$ とおくことで、外線をゼロモードに限定する。これは平均場近似に似たような近似になっている。この近似により方程式は有効作用に対するものから有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(\varphi; \tau) \equiv \frac{1}{(2\pi)^D \delta^D(0)} S_{\Lambda(\tau)}[\varphi]$ に対するものになり、

$$\frac{\partial \hat{V}_{\text{eff}}}{\partial \tau} = \left[D - d_{\varphi} \hat{\varphi} \frac{\partial}{\partial \hat{\varphi}} \right] \hat{V}_{\text{eff}} + \frac{A_D}{2} \log \left(1 + \frac{\partial^2 \hat{V}_{\text{eff}}}{\partial \hat{\varphi} \partial \hat{\varphi}} \right) \quad (17)$$

というシンプルな形になる (LPA W-H 方程式)。外線からの運動量の流れ込みが無いいため図 4(B) 型の tree ダイアグラムは寄与しない。また、微分相互作用が生成されないため $\gamma_{\Phi} = 0$ である。

LPA W-H 方程式は非線形偏微分方程式である。直接これを取り扱うことも可能であるが、ここではさらに有効ポテンシャル V_{eff} を場 φ のべきで展開する。

$$V_{\text{eff}}(\varphi; \tau) = \sum_{n=0}^N \frac{a_n(\tau)}{n!} \varphi^n \quad (18)$$

これは局所演算子展開と呼ばれる。もしトランケーションのオーダー N を大きくするにつれて結果が収束すれば、それを LPA W-H 方程式の解であると見なす。偏微分方程式は無次元結合定数 $\{\hat{a}_n\}$ についての連立常微分方程式に還元され、具体的に書き下すと

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}_0}{d\tau} &= D\hat{a}_0 + \frac{A_D}{2} \log(1 + \hat{a}_2) \\ \frac{d\hat{a}_1}{d\tau} &= \frac{D+2}{2} \hat{a}_1 + \frac{A_D}{2} \left[\frac{\hat{a}_3}{1 + \hat{a}_2} \right] \\ \frac{d\hat{a}_2}{d\tau} &= 2\hat{a}_2 + \frac{A_D}{2} \left[\frac{\hat{a}_4}{1 + \hat{a}_2} - \frac{\hat{a}_3^2}{(1 + \hat{a}_2)^2} \right] \\ \frac{d\hat{a}_3}{d\tau} &= \frac{6-D}{2} \hat{a}_3 + \frac{A_D}{2} \left[\frac{\hat{a}_5}{1 + \hat{a}_2} - \frac{3\hat{a}_4\hat{a}_3}{(1 + \hat{a}_2)^2} + \frac{2\hat{a}_3^3}{(1 + \hat{a}_2)^3} \right] \\ \frac{d\hat{a}_4}{d\tau} &= (4-D)\hat{a}_4 + \frac{A_D}{2} \left[\frac{\hat{a}_6}{1 + \hat{a}_2} - \frac{4\hat{a}_5\hat{a}_3}{(1 + \hat{a}_2)^2} + \frac{12\hat{a}_4\hat{a}_3^2}{(1 + \hat{a}_2)^3} - \frac{3\hat{a}_4^2}{(1 + \hat{a}_2)^2} - \frac{6\hat{a}_3^4}{(1 + \hat{a}_2)^4} \right] \\ &\vdots \end{aligned} \quad (19)$$

となる。それぞれの β 関数の初項は正準スケーリングを表し、第二項は 1-loop 量子補正を表す。分母に共通する因子 $\frac{1}{1+\hat{a}_2}$ はプロパゲーター $\frac{1}{p^2+a_2}$ に対応する。奇数次結合の生成には必ず奇数次結合が必要であることに注意しよう。すなわち初期ポテンシャルを $Z_2(\varphi \leftrightarrow -\varphi)$ 対称にしておけば、flow は Z_2 対称なまま流れてゆく。一般にくりこみ変換は系の対称性を壊さないのである。 V_{eff} の定数部である a_0 は、真空泡グラフの効果を拾って flow する。これは通常のくりこみ群の解析では無視されることが多いが、今は捨てずにキープしておく。なぜなら a_0 は量子力学系では意味のある物理量に対応するし、さらに超対称性のある系においては決定的に重要な役割を果たすからである。各 β 関数の量子補正部のダイアグラムの評価を図 5 に与える。実線の二重線はプロパゲーター $\frac{1}{p^2+a_2}$ 、破線の二重線はプロパゲーター $\frac{1}{p^2}$ にそれぞれ対応する。

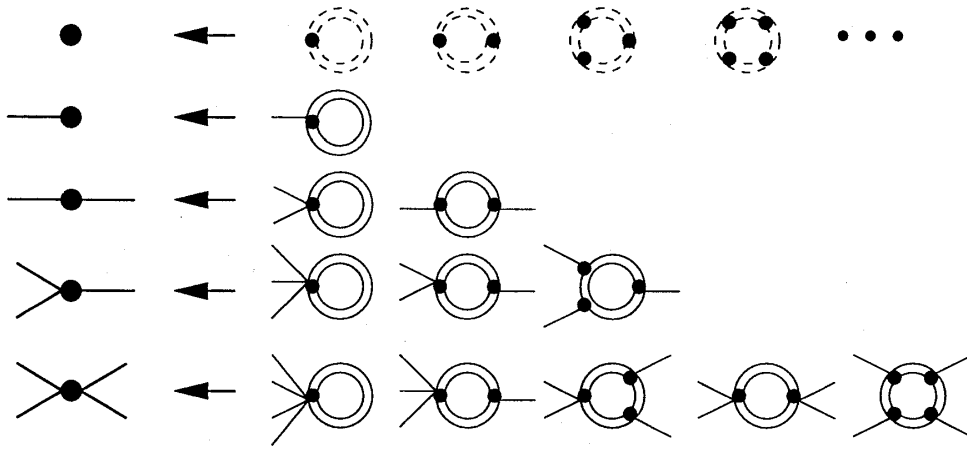


図 5: 量子補正のダイアグラムの評価

3 非摂動くりこみ群の使い方

3.1 量子力学系：評価する物理量

非摂動くりこみ群の手法を用いて量子力学系を解析してみよう。量子力学系は、 $x(t)$ を力学量とする $D=1$ 実スカラー場理論に同一視できる。すなわち、今まで見てきた方程式で $D=1$ としたものを用いて解析を行なえるのである。今は真空エネルギー E_0 とエネルギーギャップ $\Delta E = E_1 - E_0$ の二つの物理量に着目することにする。真空エネルギーは

$$E_0 = \langle \Omega | \hat{H} | \Omega \rangle = V_{\text{eff}} |_{x=\langle x \rangle} \quad (20)$$

と与えられる [21]。つまり V_{eff} の最小値が系の最低エネルギーとなるのである。エネルギーギャップは、二点関数を考えると

$$\langle \Omega | T \hat{x}(t) \hat{x}(0) | \Omega \rangle = \int \frac{dE}{2\pi} e^{iEt} \sum_n \frac{D_n}{E^2 + (E_n - E_0)^2} \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-(E_1 - E_0)t} \quad (21)$$

と書ける。ここで $D_n \equiv |C_n|^2 2(E_n - E_0)$, $C_n \equiv \langle n | \hat{x}(0) | \Omega \rangle$, $\sum_n D_n = 1$ である。一方それは LPA を用いて

$$\langle \Omega | T \hat{x}(t) \hat{x}(0) | \Omega \rangle \stackrel{\text{LPA}}{\sim} \int \frac{dE}{2\pi} e^{iEt} \frac{1}{E^2 + m_{\text{eff}}^2} = \frac{1}{2m_{\text{eff}}} e^{-m_{\text{eff}} t} \quad (22)$$

と評価できる。ここで有効質量 m_{eff} は、 V_{eff} の最小点における曲率の平方根である。 $t \rightarrow \infty$ とした時の式 (21), (22) の減衰因子を比較することで、 $E_1 - E_0 = m_{\text{eff}}$ という関係式が得られ、 E_1 は

$$E_1 = V_{\text{eff}} |_{x=\langle x \rangle} + \sqrt{\left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial x^2} \right|_{x=\langle x \rangle}} \quad (23)$$

となる。このようにして有効ポテンシャルの情報から系の量子論的信息を引き出すことができる。

3.2 Running と Flow

解析の基本的な手順を見るために、超簡単な例として調和振動子を考えてみよう。我々は無次元結合定数についての連立常微分方程式を解くことで有効ポテンシャル V_{eff} を評価する。それは図式的には次の様に表せる。

initial potential $V_0(x) = a_0 + \frac{1}{2}a_2x^2$	$\Lambda(0) = \Lambda_0$	$(a_0, a_2) \longrightarrow \left(\hat{a}_0 = \frac{a_0}{\Lambda_0}, \hat{a}_2 = \frac{a_2}{\Lambda_0^2}\right)$ $\Downarrow \tau = 0$
final potential $V_{\text{eff}}(x) = a_{0f} + \frac{1}{2}a_{2f}x^2$	$\Lambda_f = e^{-\tau} \Lambda_0$	LPA W-H eqn. $\frac{d\hat{a}_0}{d\tau} = \hat{a}_0 + \frac{1}{2\pi} \log(1 + \hat{a}_2)$ $\frac{d\hat{a}_2}{d\tau} = 2\hat{a}_2$ $\Downarrow \tau = \tau_f$ $(a_{0f} = \Lambda_f \hat{a}_{0f}, a_{2f} = \Lambda_f^2 \hat{a}_{2f}) \longleftarrow (\hat{a}_{0f}, \hat{a}_{2f})$

今の場合、この手順を解析的に実行することができて、

$$a_0(\Lambda_f) = a_0(\Lambda_0) + \frac{\sqrt{a_2(\Lambda_0)}}{2\pi} \left[\hat{p} \log \frac{1 + \hat{p}^2}{\hat{p}^2} + 2 \tan^{-1} \hat{p} \right]_{\hat{p} = \frac{\Lambda_f}{\sqrt{a_2(\Lambda_0)}}}^{\hat{p} = \frac{\Lambda_0}{\sqrt{a_2(\Lambda_0)}}} \quad (24)$$

$$a_2(\Lambda_f) = a_2(\Lambda_0) \quad (25)$$

と解ける。もし初期条件を $(a_0(\Lambda_0), a_2(\Lambda_0)) = (0, m^2)$ と選んだなら、 $\Lambda_0 \rightarrow \infty, \Lambda_f \rightarrow 0$ の極限で $(a_0(\Lambda_f), a_2(\Lambda_f)) = (\frac{m}{2}, m^2)$ が得られる。つまり、零点振動 $\frac{m}{2}$ を a_0 の running の結果として求めることができる。ここでは有次元結合定数 a_n の変化を表すものとして running (図6)、無次元結合定数 \hat{a}_n の変化を表すものとして flow (図7) という言葉をそれぞれ用いている。すなわち今の調和振動子の場合、 a_2 は running しないが、 \hat{a}_2 は flow する。図6を見れば分かるように、 a_0 の

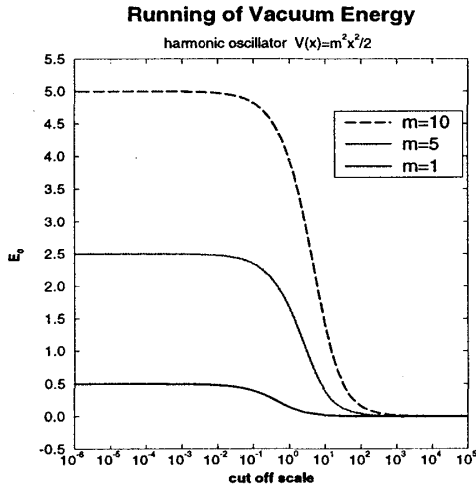


図6: 真空エネルギーの running

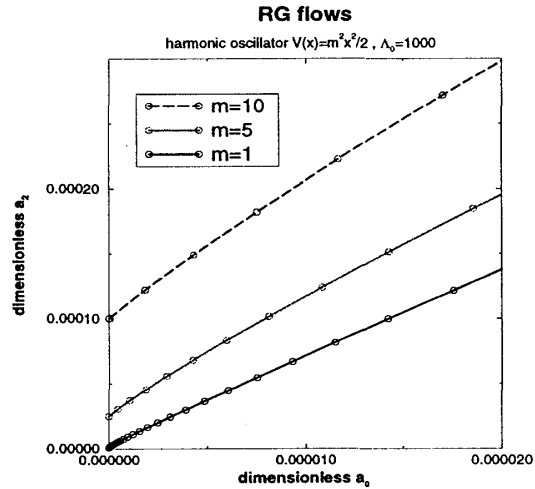


図7: flow 図

running は、カットオフスケールが質量スケール m より小さくなった時に止まる。量子補正が効く領域は有限であり、質量スケール m に依存しているのである。これは decoupling と呼ばれる大変重要な性質である。なぜなら、今の調和振動子の場合の様にくりこみ群方程式を解析的に解くことができず、数値的手法に頼らざるを得ない場合でも、有限の運動量領域での解析で物理量としての有効結合定数が得られることを、この decoupling という性質が保証しているからである。また図7に関して言えば、 $(0,0)$ に自明固定点があり、全ての flow はそこから離れる方向に流れてゆく。これは量子力学系では全ての局所演算子が自明固定点に対して relevant であることに由来するものである。

4 非調和振動子系の解析

4.1 対称一重井戸

ここまで準備ができたところで、非調和振動子系の解析に進もう。まず最初に次の形の対称一重井戸を考える。

$$V_0(x) = \lambda_0 x^4 + \frac{1}{2}x^2 \quad (26)$$

もちろんこの系では量子トンネル現象は起こらない。ここでの我々の興味は非摂動くりこみ群の結果を摂動級数と比較することにある。式(19)の形に展開されたLPA W-H方程式をトランケーション $N = 16$ で数値的に解いて得られた V_{eff} は図8の様になる。量子補正によりポテンシャルは持ち上がり、かつ勾配は急になる。関係式(20)、(23)を用いて計算されたエネルギー固有値を表したのが図9である。exact result とあるのは、Schrödinger方程式を数値的に解くことにより得られた結果である。

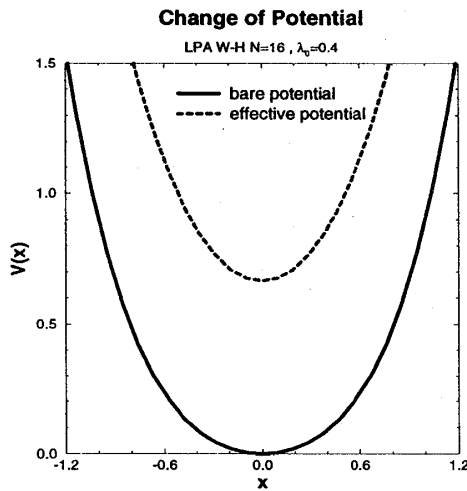


図8: ポテンシャルの変化

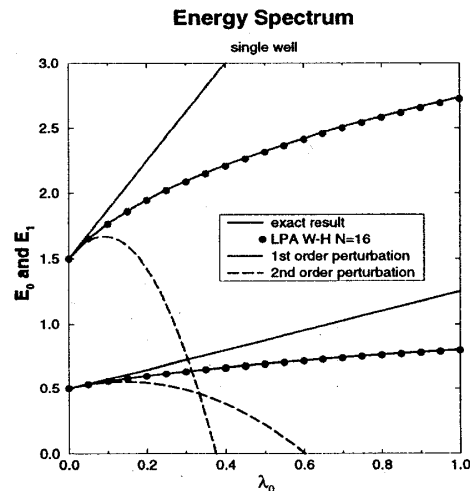


図9: エネルギー固有値

E_n の摂動級数は漸近級数であり、

$$E_n = \left[n + \frac{1}{2} \right] + \frac{3}{4} \lambda_0 [2n^2 + 2n + 1] - \frac{1}{8} \lambda_0^2 [34n^3 + 51n^2 + 59n + 21] + \dots \quad (27)$$

という形をしている。これは弱結合領域 ($\lambda_0 \ll 1$) でさえ発散を示す。しかしこの場合は摂動級数についてのボレル総和法が有効であり、定量的にも良い値を与えることが知られている。一方くりこみ群方程式は、最低次の近似であるにもかかわらず、ほとんど完璧にエネルギー固有値を与えることができる。この意味で、非摂動くりこみ群は摂動級数の無限次の足し上げとしての非摂動効果を十分良く捉えられていると言えるだろう。

4.2 対称二重井戸

次に対称二重井戸

$$V_0(x) = \lambda_0 x^4 - \frac{1}{2}x^2 \quad (28)$$

を考える。この場合 well-defined な摂動論は存在しない。その代わりに、エネルギーギャップ ΔE を得るための標準的な手法として、希ガス近似のインスタントン計算が知られている。インスタントとは、ユークリッド化された理論に時おり存在する非自明な (トポロジカルな) 古典解のこ

とであり、そのまわりのゆらぎをガウス型で近似して分配関数 Z を評価するのがインスタントン計算である。今の場合は

$$x_{cl}(t) = \pm \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0}} \tanh \frac{(t-t_0)}{\sqrt{2}} \quad (29)$$

というインスタントン解が存在する。一つのインスタントンの寄与から分配関数 Z を評価すると

$$Z \simeq T e^{-S[x_{cl}]} \sqrt{\frac{S[x_{cl}]}{2\pi}} \left\{ \frac{\det' \left(\frac{\delta^2 S}{\delta x^2} \Big|_{x=x_{cl}} \right)}{\det \left(\frac{\delta^2 S}{\delta x^2} \Big|_{x=\pm \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0}}} \right)} \right\}^{-1/2} \equiv T \frac{\Delta_0}{2} \quad (30)$$

となる。 T は虚時間間隔を表す。インスタントン同士の相互作用が無いという近似（希ガス近似）のもとで無数のインスタントンの寄与を計算することにより、エネルギーギャップは

$$\Delta E = \Delta_0 = 2\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\pi\lambda_0}} e^{-\frac{1}{3\sqrt{2}\lambda_0}}. \quad (31)$$

という形で与えられる。指数関数の肩の因子は $S[x_{cl}] = \frac{1}{3\sqrt{2}\lambda_0}$ に由来する。このようにして、真性特異点の構造を評価できるのである。

有効ポテンシャルの発展を非摂動くりこみ群によって追いかけると、初期条件として与えた二重井戸型ポテンシャルは、最終的に一重井戸型になって、エネルギーギャップ（有効質量）が生じる（図10）。この振舞いは、一次元系では量子トンネリング（障壁透過）により Z_2 対称性は自発的に破れることはない、という事情を考えれば直ちに理解できる。

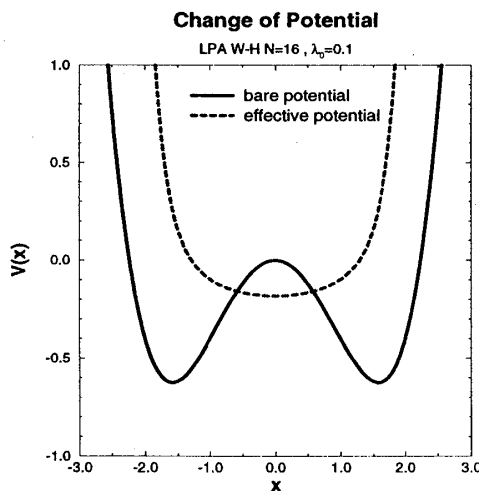


図 10: ポテンシャルの変化

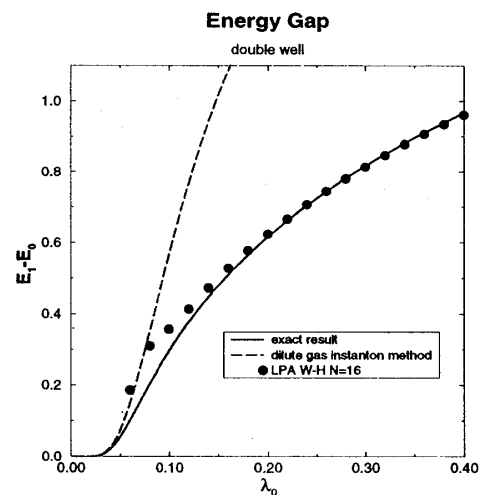


図 11: エネルギーギャップ

非摂動くりこみ群は強結合領域において大変素晴らしい結果を出している（図11）。これは従来の解析法では全く手の出なかった領域である。なぜなら単純な摂動論は二重井戸系には適用不可能であるし、インスタントン計算については、希ガス近似が妥当なのは極めて弱い結合の場合だけだからである。それゆえ非摂動くりこみ群は、少なくとも強結合領域では、量子トンネル現象解析のための強力な新手法になりうると言える。他方、我々の結果は $\lambda_0 \rightarrow 0$ となるにつれて正確な値からずれてゆく。これは井戸がどんどん深くなっていくという状況である。その領域では β 関数が特異性を見せ始めるため、くりこみ群の結果は信頼できないものになってしまう。この困難

は我々が採用している近似 (LPA) に由来するものと思われるが、明確な理由付けは未だできていない。結局、LPA W-H 方程式の適用が妥当なパラメタ領域と希ガス近似インスタントンが妥当な領域は、完全に分離してしまっていて、クロスオーバーが見られるだけである。この意味で、これら二つの手法は互いに相補的なものとなっている。

結果の信頼性に関して付け加えるならば、我々は今局所演算子展開を採用しているのだから、物理量のトランケーション依存性をチェックする必要がある。対称一重井戸の場合 (図 12) は結果は極めて良く収束しているが、対称二重井戸の場合 (図 13) は収束性は明確でない。この傾向は λ_0 が小さくなるほど顕著になるため、弱結合領域では $N = 16$ における結果でさえ物理量として適当ではない。我々は常にトランケーション N についての収束性に注意を払わなければならないのである [22]。

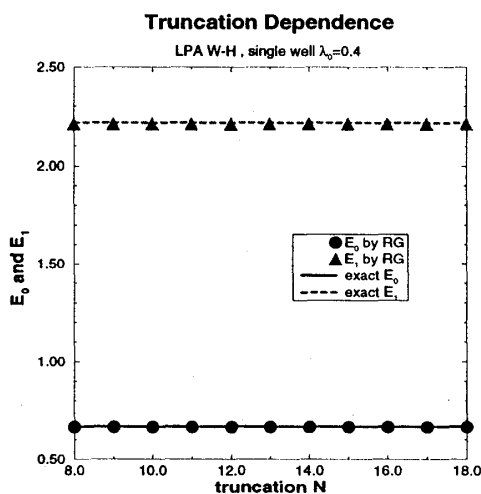


図 12: 対称一重井戸

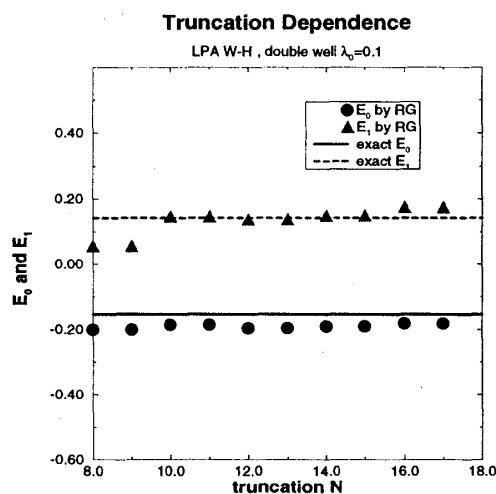


図 13: 対称二重井戸

4.3 非対称二重井戸

最後に非摂動くりこみ群の手法の汎用性を見るために、 Z_2 対称性がくずれた系を考えてみよう。初期ポテンシャルとして

$$V_0(x) = \lambda_0 x^4 - \frac{1}{2} x^2 + h_0 x \quad (32)$$

で与えられる非対称二重井戸を考える。これは Z_2 対称な二重井戸に非対称項 $h_0 x$ を付け加えたものである。この場合は安定点と準安定点が存在し、始めに粒子が準安定点にあったとしても、真中の山をトンネリングして安定点に落ち着く、という描像になる。この様な非対称化は各解析手法にどのような影響を与えるだろうか？非摂動くりこみ群の方法は、解析法としては特に変化は無い。それはただ、これまで Z_2 対称だったため局所演算子展開が偶数次結合だけで書いていたのが、普通に奇数次まで含めて考えなければならなくなったに過ぎない。もともとが系の対称性等に依らない定式化であるため、この点では優れた汎用性があると言える。しかも、今の $h_0 x$ の付加は極端な例であり、 $h_0 x$ 項は他の結合定数の flow に何の影響も与えない。なぜなら、図 5 を見れば分かるように、一次の項は shell モードとしては働かないからである。それは

$$\int dt h_0 x(t) = h_0 \int dt x(t) = h_0 \int dt x(t) e^{-i0t} = h_0 \tilde{x}(E=0) \quad (33)$$

を考えれば当然である。ゼロモードは shell モードには決してなり得ない。今の場合 a_1 は、他の偶数次結合の結合定数とは独立にもくもくと正準スケールリングによる flow をするのみである。すな

わち running はしない。一方比較すべきインスタントン法においては、この手の非対称化は困難を生む。今の場合式 (30) 中の $\left. \frac{\delta^2 S}{\delta x \delta x} \right|_{x=x_{cl}}$ に負の固有値が存在してしまう。こういった負の固有値は、実際に真空が不安定な系においては、それを崩壊率に読み替えるという処方でも物理的な結果を引き出せる。これはバウンス計算として知られている。しかし今の系は真空間の遷移はあるが、最終的な真空は安定である。このような系における $\left. \frac{\delta^2 S}{\delta x \delta x} \right|_{x=x_{cl}}$ の負固有値の問題は「偽の不安定性」問題と呼ばれる。この困難を解決するため、最近バレー法という手法が開発された [23][24]。それは配位空間のバレー構造に基づいて、インスタントン法を一般化させたものである。この方法を用いれば負の固有値の困難に陥ることなしにエネルギーギャップを計算できる。ともあれ、インスタントン法においては、系の非対称化は新たな工夫が必要になるほどの一大事であったわけである。

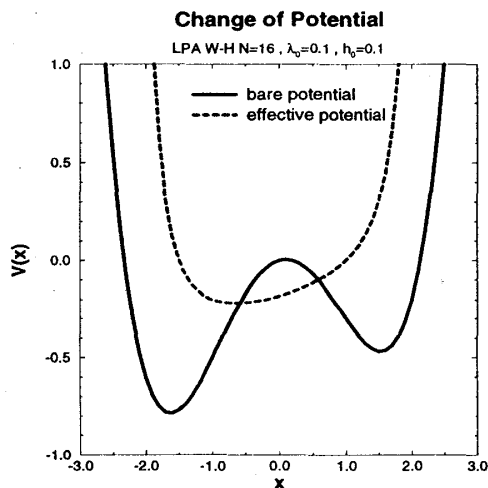


図 14: ポテンシャルの変化

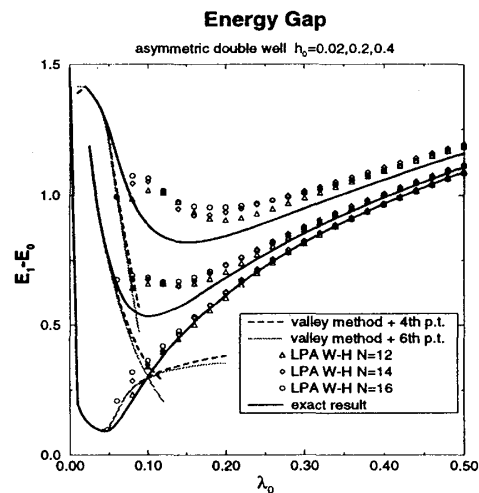


図 15: エネルギーギャップ

結果は図 14, 15 の通りである。図 15 では三通りの h_0 の値について結果がプロットしてある。下から順に $h_0 = 0.02, 0.2, 0.4$ である。全体的な傾向は対称二重井戸の場合と変わらない。

5 いくつかの応用

5.1 超対称量子力学系

今回の解析の主な目的は、非摂動くりこみ群が二つのタイプの非摂動効果…摂動級数の無限次の足し上げと真性特異点…を正しく評価できるのかをチェックすることであった。そのうち、前者については LPA という近似の範囲内であっても十分良い結果が得られた (§4.1)。しかし後者については、あまりはっきりとしたことは言えなかった。確かに強結合領域ではトンネリングがある系のエネルギー固有値を良く再現したが (§4.2, §4.3)、それがどの程度真性特異点の構造を評価したことになるのかは不明瞭なままである。そこを明確にするため、ここでは超対称性 (SUSY) のある系を考えることにする。後述するように、そのような系では非摂動効果をより明確な形で見ることができるのである。

今考えるのは超対称量子力学 [25] である。これは SUSY の力学的破れを記述するためのおもちゃとして E. Witten により導入されたものであり [26][27]、その後も様々な応用を持つモデルで

ある [28][29][30]。そのハミルトニアンは次の形で与えられる。

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left[\hat{P}^2 + \hat{W}^2(\Phi) + \sigma_3 \frac{d\hat{W}(\Phi)}{d\Phi} \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \hat{V}_+(\Phi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \hat{V}_-(\Phi) \end{pmatrix} \quad (34)$$

ここでハット (^) は演算子を表す。 $\hat{V}_\pm(\Phi) = \frac{1}{2}\hat{W}^2(\Phi) \pm \frac{1}{2}\frac{d\hat{W}(\Phi)}{d\Phi}$ であり、 $\hat{W}(\Phi)$ は SUSY ポテンシャルと呼ばれる量である。ここで二つの超電荷 $\hat{Q}_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1\hat{P} + \sigma_2\hat{W}(\Phi))$, $\hat{Q}_2 = \frac{1}{2}(\sigma_2\hat{P} - \sigma_1\hat{W}(\Phi))$ を定義すると、ハミルトニアンは $\hat{H} = \{\hat{Q}_1, \hat{Q}_1\} = \{\hat{Q}_2, \hat{Q}_2\}$ の形で書ける。これは系の真空エネルギーが常に非負であることを保証する。すなわち $E_0 = \langle \Omega | \hat{H} | \Omega \rangle = 2 \|\hat{Q}_1|\Omega\rangle\|^2 = 2 \|\hat{Q}_2|\Omega\rangle\|^2 \geq 0$ である。これにより我々は SUSY の破れの基準を得る。

$$E_0 = 0 \Rightarrow \hat{Q}_1|\Omega\rangle = 0, \hat{Q}_2|\Omega\rangle = 0 \quad \text{SUSY 破れていない} \quad (35)$$

$$E_0 > 0 \Rightarrow \hat{Q}_1|\Omega\rangle \neq 0, \hat{Q}_2|\Omega\rangle \neq 0 \quad \text{SUSY 破れてしまった} \quad (36)$$

つまり真空エネルギー E_0 が SUSY の力学的破れのオーダーパラメタになるのである。さらに言えば E_0 への摂動補正は摂動展開の任意の次数で相殺して 0 になる。これは一般に非くりこみ定理として知られる性質である。実際 SUSY ポテンシャルを $W(\Phi) = g\Phi^2 - \Phi$ と選んで、ポテンシャル

$$V_+(\Phi) = \frac{1}{2}g^2\Phi^4 - g\Phi^3 + \frac{1}{2}\Phi^2 + g\Phi - \frac{1}{2} \quad (37)$$

の下での量子力学を考えると、エネルギー固有値は摂動論を用いて

$$E_n = n + \frac{3}{8}g^2[2n^2 + 2n + 1] - \frac{3}{8}g^2[10n^2 + 2n + 1] - \frac{1}{32}g^4[34n^3 + 51n^2 + 59n + 21] + \dots \quad (38)$$

と計算され、 E_0 への摂動補正は g の各べきで相殺することが分かる。つまり $E_0 \neq 0$ は摂動展開やその無限次の足し上げといったもの以外の非摂動効果、すなわち真性特異点に由来する効果で実現するのである。この系を我々の非摂動くりこみ群の手法を用いて解析してみよう。パラメタ

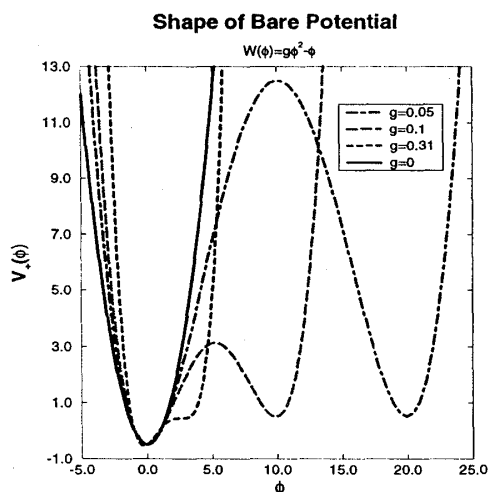


図 16: 初期ポテンシャル各種

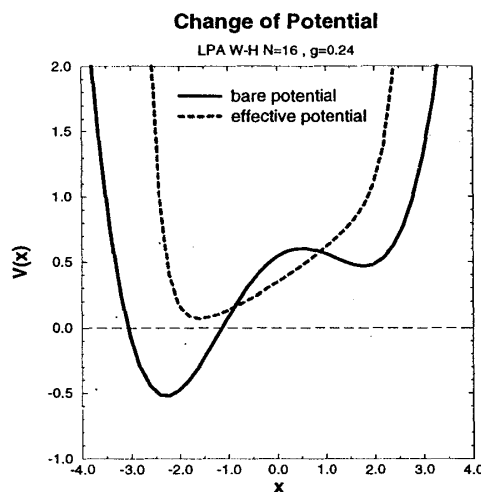


図 17: ポテンシャルの変化

g を広い範囲にわたって振らせて (図 16)、それぞれの有効ポテンシャルを計算する。 $g = 0$ の場合は初期ポテンシャルは定数項 $-\frac{1}{2}$ を持つ調和振動子であり、零点振動で $\frac{1}{2}$ を稼いで V_{eff} の定数部は 0 になるから SUSY は破れない。ところが一旦 $g \neq 0$ となると SUSY は力学的に破れてしま

う。注意としては、 $g \neq 0$ が非常に小さければ初期ポテンシャルは非対称二重井戸の形であるが、 $g > \sqrt[4]{\frac{1}{108}} \simeq 0.31$ では真中の山がつぶれて非対称一重井戸になってしまい、そこではもうトンネリングは起こらない。図 17 には $g=0.24$ の時の結果が示してある。 V_{eff} は running して下に凸型になり、全体が持ち上がって最小値は正になる。すなわち、非摂動くりこみ群による解析は $E_0 > 0$ を正しく扱えており、SUSY の力学的破れを定性的には記述できている。では定量的にはどうか。図 18 から分かるように、LPA W-H 方程式の結果は強結合領域で十分良い値を出している。しか

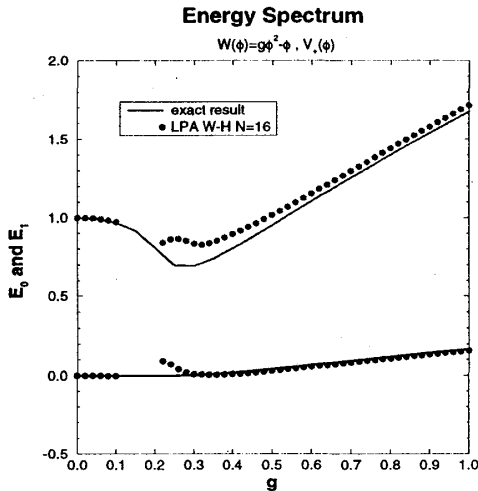


図 18: エネルギー固有値

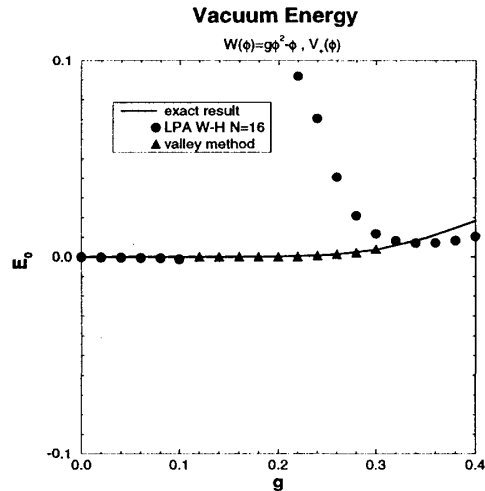


図 19: くりこみ群とバレー法

し初期二重井戸ポテンシャルの谷がどんどん深くなるにつれて、結果は正確な値から外れ始める。領域 ($0.1 < g < 0.2$) では大きな数値的誤差のため、結果自体が出せなくなってしまう。この領域ではバレー法 [31] が極めて良い近似となっており、非常に高い精度で正確な値を再現する (図 19)。二つの手法は互いに相補的役割を果たしているという結論が再び得られたわけだが、今の SUSY 系は摂動級数が存在しない場合に当たるだけに、その意義はより深いものとなっている。非摂動くりこみ群は真性特異点に由来するような非摂動効果を広いパラメタ領域で評価することができるのである。

5.2 二粒子系

これまでの一粒子系の議論を二粒子系に拡張する。多自由度系の量子トンネル現象を扱うための第一歩として、複数の粒子が相互作用を及ぼし合っている時にトンネルする粒子の受ける影響を評価しておくことは重要である。非摂動くりこみ群による一粒子系のトンネリングの解析結果を肯定的に捉え、より複雑な系におけるトンネリングを解析しようという方向である。応用上興味深いのは対称性のない系であるが、今は手始めとしてポテンシャル

$$V_0(\varphi_1, \varphi_2; \tau) = -\frac{1}{2}\varphi_1^2 + \lambda_0\varphi_1^4 - \frac{1}{2}\varphi_2^2 + \lambda_0\varphi_2^4 + F(\varphi_1, \varphi_2) \quad (39)$$

の下での量子力学を考える。 $F(\varphi_1, \varphi_2)=0$ のときは、トンネリング前は四つの基底状態が縮退しており、トンネリングをスイッチオンすると ($\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$) 対称な三つの状態と反対称な一つの状態に分裂する。今特に $F(\varphi_1, \varphi_2)$ を ($\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$) 対称なものに選ぶことにより、その三つの状態のエネルギー分裂が相互作用によりどの様な影響を受けるかに注目する。非摂動くりこみ群による解析は、二粒子系の LPA W-H 方程式

$$\frac{\partial \hat{V}_{\text{eff}}}{\partial \tau} = \left[D - \sum_{a=1}^2 d_{\varphi_a} \hat{\varphi}_a \frac{\partial}{\partial \hat{\varphi}_a} \right] \hat{V}_{\text{eff}} + \frac{A_D}{2} \text{Tr} \log \left(\delta_{ab} + \frac{\partial^2 \hat{V}_{\text{eff}}}{\partial \hat{\varphi}_a \partial \hat{\varphi}_b} \right) \quad (40)$$

を用いて行なう。Tr は場の種類の足 a, b についてのトレースである。今相互作用として

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = C\varphi_1\varphi_2, C(\varphi_1 - \varphi_2)^2, C(\varphi_1 - \varphi_2)^4 \quad (41)$$

の計三通りを考える。後の二つについては、 $C > 0$ なら引力、 $C < 0$ なら斥力である。今は $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ 対称な状態に注目するので、変数を

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (42)$$

と変換して、 (Φ_1, Φ_2) についてのくりこみ群方程式を考える。形は式 (40) と変わらない。この時対称状態の最低のエネルギー分裂 $\Delta E = E_1 - E_0$ は Φ_2 の有効質量で与えられる。もちろんこれは $C = 0$ で一粒子の有効質量に一致する。くりこみ群の初期値としてのポテンシャルは式 (39) に対応してそれぞれ

$$V_0 = \frac{1}{2}(-1 - C)\Phi_1^2 + \frac{\lambda_0}{2}\Phi_1^4 + \frac{1}{2}(-1 + C)\Phi_2^2 + \frac{\lambda_0}{2}\Phi_2^4 + 3\lambda_0\Phi_1^2\Phi_2^2 \quad (43)$$

$$V_0 = \frac{1}{2}(-1 + 4C)\Phi_1^2 + \frac{\lambda_0}{2}\Phi_1^4 - \frac{1}{2}\Phi_2^2 + \frac{\lambda_0}{2}\Phi_2^4 + 3\lambda_0\Phi_1^2\Phi_2^2 \quad (44)$$

$$V_0 = -\frac{1}{2}\Phi_1^2 + \left(\frac{\lambda_0}{2} + 4C\right)\Phi_1^4 - \frac{1}{2}\Phi_2^2 + \frac{\lambda_0}{2}\Phi_2^4 + 3\lambda_0\Phi_1^2\Phi_2^2 \quad (45)$$

となる。 C を適当に正負に振らせた結果を次に示す。 λ_0 は一粒子系で良い値を出していた $\lambda_0 = 1.0 \sim 2.0$ の間で振らせる。ここでは $\lambda_0 = 2.0$ の場合しか示していないが、ポテンシャルがより深くなる $\lambda_0 \sim 1.0$ 付近でも同様の結果となる。くりこみ群の結果と同時に、Schrödinger 方程式を数値的に解いて得られる一粒子の波動関数から構成した $O(C)$ までの ΔE を図示しておく。今は二粒子系であり、トランケーション N とは $\frac{N}{2} + \frac{N}{4}(\frac{N}{2} + 1)$ 個の結合定数がくりこみ群方程式に含まれていることを表す。今は $N = 12$ としているから 27 個の結合定数についての微分方程式を解くことになる。 C の小さい領域で両者の結果はほとんど一致している。 C の大きな領域では当然

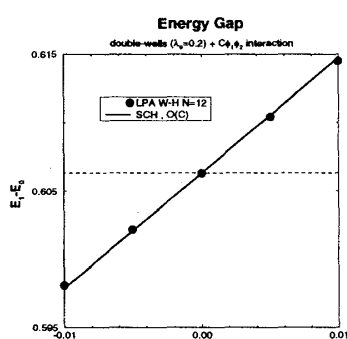


図 20: 線形相互作用

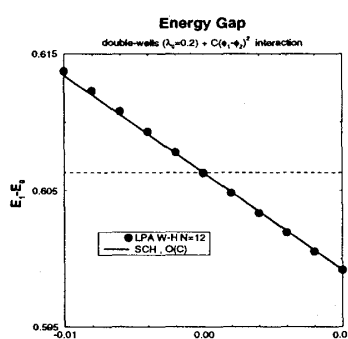


図 21: 二次相互作用

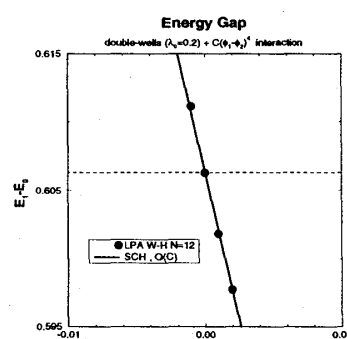


図 22: 四次相互作用

両者はずれてくるが、くりこみ群の結果が真の ΔE と較べてどれほど良い値であるかの評価はまだできていない。定性的には、二次、四次相互作用の場合は、 $C > 0$ (引力) のとき ΔE は減少し、 $C < 0$ (斥力) のとき ΔE は増大する傾向にある。しかしこれはそのままトンネル確率の増減としては解釈できない。なぜなら今は三つの状態の縮退が相互作用とトンネリングにより解ける現象を見ているため、トンネル確率の様な情報をいかに引き出せるかは自明ではないからである。これは今後の課題である。

5.3 「時間」の取り扱い？

我々は有効作用や有効ポテンシャルからトンネリングの物理を引き出すという立場で研究を進めているわけだが、具体的な物理過程への応用を視野に入れるならば、ダイナミックな、時間発展が絡んだ現象を避けて通るわけにはいかない。しかしその様な非定常的な時間変化過程を有効作用や有効ポテンシャルの言葉で本気で取り扱おうと思ったら、かなり込み入った議論が必要になる [32]。特にトンネリングのある系で非定常的な過程を扱おうとする際には、それがいわゆる「トンネル時間」の問題と結びついて、議論がさらに複雑化してしまう危険性がある。トンネル時間は一筋縄ではいかない問題であり、一般論といったものは存在しない [33]。ここまでの定常状態の解析では Schrödinger 方程式を数値的に解きさえすれば系の性質を正確に知ることができた。しかしトンネル時間は well-defined な物理量ではないため、たとえ非定常 Schrödinger 方程式を数値的に正しく解いたところで、トンネル時間についての知見が直接得られるものでもない。

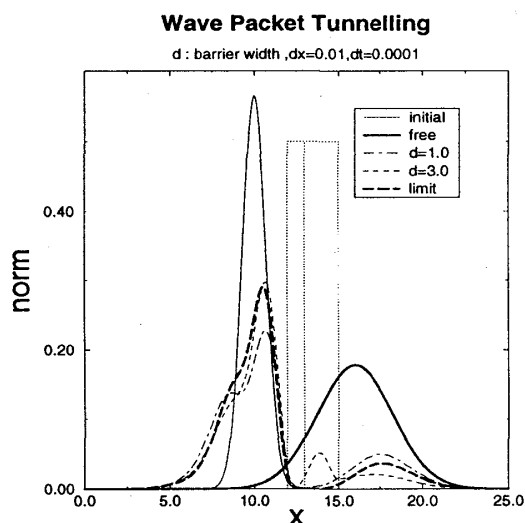


図 23: 波束の運動 1

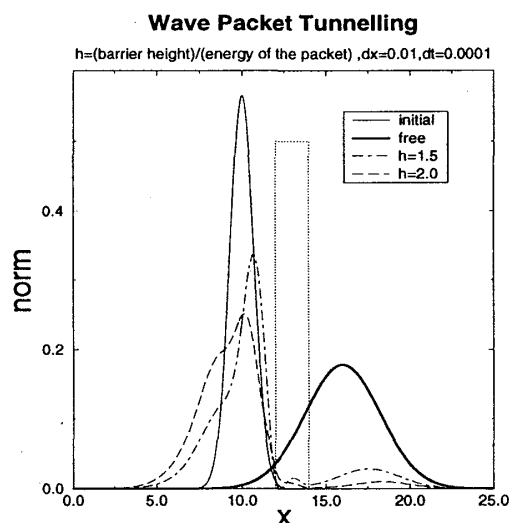


図 24: 波束の運動 2

例えば図 23, 図 24 は、自由粒子波束（幅 $\sigma = 1.0$, 速度 $v_g = 2.0$ ）がポテンシャル障壁に出会って乱れだし、反射波束と透過波束に分かれてポテンシャル領域を通り過ぎる様子を、非定常 Schrödinger 方程式を数値的に解くことで追いかけたものである [34]。図 23 は異なる幅 d の障壁について描かれたもので、障壁は $x = 12.0$ から始まっている。透過波束のピークは自由伝搬波束のそれより前にずれることが見てとれる。障壁の幅が狭いうちは障壁が広がるにつれてピークのずれは増大するが、ある幅（ここでは $\text{limit} \sim 1.5$ ）を超えると、透過波束の波形はピークについての左右対称性が崩れ、ピークのずれは減少する。一方図 24 は壁の幅は 2.0 に固定し、障壁の高さをいろいろと変化させたものである。その度合いをポテンシャル障壁の高さと入射波束の運動エネルギーとの比 h で特徴付けている。ポテンシャル障壁が高ければ高いほど透過波束のピークの伝搬方向へのずれは明確になる。波形に関して言えば、障壁の高さを変化させても透過波束の波形の左右対称性は保たれている。

この様に波束の時間変化過程を追うことで、そのトンネリングの振舞いがポテンシャル障壁の幅、高さにもどう依存するかを見ることができ、波束のダイナミクスをより深く理解することができる。しかしひとたび「障壁通過時間は？」という問を発すると、議論はたちまち混迷してしまう。例えば透過波束のピークを粒子の「位置」だと同定してしまうと、上の議論からトンネル粒子は自由粒子より速く伝搬することになり、ひいては「超光速」[35] なんてことになってしまう。非摂動くりこみ群の手法を用いた非定常的なトンネル過程の解析はこれからの課題であるが、時間の取り扱いには十分な注意が必要である。

6 まとめと展望

非摂動くりこみ群の方法は最低次の近似 (LPA) の範囲であっても、「摂動級数の無限次の足し上げ」で与えられる非摂動的物理量を定量的に十分良く評価できている。一方「真性特異点」で特徴付けられる非摂動的物理量に関しては、LPA W-H 方程式は希ガス近似インスタントン計算や単純な摂動論等の従来の手法が破綻するような領域 (強結合領域) においては極めて良く機能する。しかし弱結合領域においては、数値的誤差が大きくなる等の困難のため、信頼できる結果を安定して出すことができなくなってしまう。すなわち LPA W-H 方程式と (バレー) インスタントンは互いに相補的な役割を果たすのである。弱結合領域における LPA W-H 方程式の解析中に生じる大きな数値的誤差等の困難の起源は、未だはっきりとは分かっていない。そのような領域においては微分展開そのものが機能しないのかもしれない。いずれにせよ、新たなより良い近似法を模索する必要がある。今回は触れなかったが、いわゆる非摂動的手法は他にいくつもある。変分法 [36]、最適化された摂動論 [37]、補助場の方法 [38] 等である。それらの手法との比較を通じて、非摂動くりこみ群の方法自体の理解を深めるとともに、より有効な解析法を追求していきたい。

多方実用的観点からすれば、少くともあるパラメタ領域においては、非摂動くりこみ群の方法は量子トンネル現象解析のための強力な新手法になりうる。この方向性を押し進めるためには、有効作用や有効ポテンシャルからトンネリングの物理をいかに引き出しうるのかをより詳細に調べあげる必要がある。多粒子系や非定常状態の取り扱いをはじめ、解明すべき問題はたくさんある。そしてそのようにして得られた処方せんは、場の量子論 [39][40] や、より複雑な系 [41] への適用が可能となるだろう。特に散逸に代表されるような多自由度系における量子トンネル現象 [42][43]、巨視的量子トンネル現象 [44][45][46][47] は魅力的であり、ぜひとも取り組んでみたい課題の一つである。

謝辞

以上の話は'98年度物性若手夏の学校のポスターセッションで行なった発表がベースとなっています。夏の学校期間中には上田正仁先生をはじめとする講師の方々、若手の皆さんに有意義な指摘や議論をして頂きました。ここに感謝致します。また久保敦さんをはじめとする準備局の皆さんには夏の学校終了後も大変お世話になりました。重ねて感謝申し上げます。

参考文献

- [1] 特集「階層のある系の物理学」日本物理学会誌 **50** (1995) 253
- [2] 池内 了, 宇宙と自然界の成立ちを探る, (サイエンス社, 1995)
- [3] S.L.Glashow, (本間三郎訳), 科学が描く大きな絵小さな絵 (丸善, 1994)
図 1 は Glashow のオリジナルに手を加えたもの。作図は金沢大学の矢澤建明氏による。
- [4] Non-Perturbative QCD, Prog. Theor. Phys. Supplement **131** (1998)
- [5] 田崎清明, パリティ **11**, No.06 (1996)
- [6] 江沢 洋, 渡辺敬二, 鈴木増雄, 田崎清明, くりこみ群の方法 (岩波, 1994)

- [7] 特集「くりこみ理論の地平」数理科学 **406** (1997)
- [8] 青木健一, 素粒子論研究, **80-4** (1990) D51
- [9] 青木健一, 別冊数理科学「場の物理と数理」, (1991) 118
- [10] 青木健一, 原子核三者若手夏の学校講義録 (1996)
- [11] K.G.Wilson and J.B.Kogut, Phys.Rep. **12** (1974) 75
- [12] Proceedings of Workshop on the Exact Renormalization Group, to be published by World Scientific
- [13] J.C.Le Guillou and J.Zinn-Justin (ed.), Large-Order Behaviour of Perturbation Theory, (North-Holland, 1990)
- [14] S.Coleman, Aspects of symmetry,(Cambridge University Press, 1985)
- [15] 重点領域「多自由度系としての原子集団及び原子のトンネル現象」研究会報告集('96~)
- [16] M.E.Peskin and D.V.Schroeder :An Introduction to Quantum Field Theory, (Addison-Wesley, 1995)
- [17] F.Wegner and A.Houghton, Phys.Rev. **A8** (1973) 401
- [18] J.Polchinski, Nucl.phys. **B231** (1984) 269
- [19] C.Wetterich, Phys. Lett. **B301** (1993) 90
- [20] A.Hasenfratz and P.Hasenfratz, Nucl.Phys. **B270** (1986) 687
- [21] 大貫義郎, 鈴木増雄, 柏太郎, 経路積分の方法 (岩波, 1992)
- [22] K.-I.Aoki, K.Morikawa, W.Souma, J.-I.Sumi and H.Terao, Prog. Theor. Phys. **99** (1998) 451
- [23] H.Aoyama, H.Kikuchi, T.Harano, I.Okouchi, M.Sato and S.Wada, Prog. Theor. Phys. Supplement **127** (1997) 1
- [24] 青山秀明, 原子核三者若手夏の学校講義録 (1997)
- [25] 河原林 研, 量子力学 (岩波, 1993)
- [26] E.Witten, Nucl.phys. **B188** (1981) 513
- [27] E.Witten, Nucl.phys. **B202** (1982) 253
- [28] P.Salomonson and J.W.van Holten, Nucl.phys. **B196** (1982) 509
- [29] A.Lahiri, P.K.Roy and B.Bagchi, Int. J. Mod. Phys. **A5** (1990) 1383
- [30] G.Junker, Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics, (Springer, 1996)
- [31] H.Aoyama, H.Kikuchi, I.Okouchi, M.Sato and S.Wada, hep-th/9808034

- [32] K.Chou, Z.Su, B.Hao and L.Yu, Phys. Rep. **118** (1985) 1
- [33] E.H.Hauge and J.A.Stovneng, Rev. Mod. Phys. **61** (1989) 917
- [34] H.M.Krenzlin, J.Budczies, and K.W.Kehr, quant-ph/9809041
- [35] R.Y.Chiao, quant-ph/9811019
- [36] R.P.Feynman and H.Kleinert, Phys. Rev. **A34** (1986) 5080
- [37] T.Hatsuda, T.Kunihiro and T.Tanaka, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 3229
- [38] T.Kashiwa, hep-th/9809141
- [39] A.Strumia and N.Tetradis, hep-ph/9806453
- [40] A.Strumia and N.Tetradis, hep-ph/9811438
- [41] S.Tomsovic (ed.), Tunneling in Complex Systems (World Scientific, 1998)
- [42] A.O.Caldeira and A.J.Leggett, Ann Phys **149** (1983) 374
- [43] U.Weiss, Quatum Dissipative Systems, (World Scientific, 1993)
- [44] 栗原 進, 巨視的トンネル効果, トンネル効果 (丸善, 1994) 134
- [45] 多々良 源, 巨視的量子トンネル現象, 大学院物性物理 3 (講談社サイエンティフィック, 1996) 253
- [46] 高木 伸, 巨視的トンネル現象 (岩波, 1997)
- [47] 上田正仁, 物性若手夏の学校講義録 (1998)
- [48] K.-I.Aoki, A.Horikoshi, M.Taniguchi and H.Terao, hep-th/9812050