

# On Induced Chern-Simons Term in P- and T-Violating Superconductors

北海道大学 理学部 御領 潤<sup>1</sup>, 石川 健三

P（鏡映変換）や T（時間反転）の対称性を破る超伝導体において、これらの対称性に対して奇の電磁気ポテンシャルの項が低エネルギー有効作用（ギンツブルグ・ランダウ作用）中に induce されることを示す。この項は static limit ではチャーン・サイモン項と等価であり、低エネルギー領域の物理に対して重要な寄与をおよぼす。U(1) ゴールドストーンモードがこの項のゲージ不変性を保証し、その係数はトポロジカル不変量と関連付けられ近似的に微細構造定数と一致する。また、このような系においては外部磁場なしでホール効果が起り、そのホール電流がつくる磁場の大きさは SQUID で測定可能な order であることを示す。

## 1 イントロダクション

最近、P や T を破る超伝導相の存在が高温超伝導や  $Sr_2RuO_4$  の系において議論されている [1][2]。この種の超伝導体では P や T の破れを直接反映する興味深い現象が起ることが期待される。以下の議論ではこれらの系の低エネルギー有効作用（ギンツブルグ・ランダウ有効作用）を考察し、この有効作用中には P や T を破る電磁ポテンシャルの項が induce されることを示す。この項は静的な極限ではチャーン・サイモン項と一致する。チャーン・サイモン項は P や T を破る電磁ポテンシャルの一階微分の項である。よって、チャーン・サイモン項は最も質量次元の低いゲージ不変な項であり、低エネルギー領域の物理に対して重要な役割を果たすことが知られている。これまで、チャーン・サイモン項は量子ホール系で活発に議論されてきた。我々は上述のギンツブルグ・ランダウ作用を用いて、P や T が自発的に破れているような p 波及び d 波超伝導の系における電磁気現象を議論する。その結果、外部磁場なしでホール効果が生じ、そのホール電流によって誘起される磁場は SQUID で測定可能な order であることが示される [3]。なお、計算には自然単位系 ( $\hbar = c = 1$ ) を用い、また時空の計量は  $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1)$  とする。

## 2 ギンツブルグ・ランダウ有効作用とチャーン・サイモン項

この節では参考文献 [4] に従い、上記の超伝導体における電磁ポテンシャルに対するギンツブルグ・ランダウ有効作用を経路積分法で計算する。モデルとするハミルトニアンは、

$$H = \int d^2x \psi_s^\dagger(x) \{ (\epsilon(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) - \epsilon_F) - eA_0 \} \psi_s(x)$$

<sup>1</sup>E-mail:goryo@particle.sci.hokudai.ac.jp

$$+\frac{1}{2} \int d^2x d^2x' \psi_{s1}^\dagger(x) \psi_{s2}^\dagger(x') V_{s1,s2;s3,s4}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi_{s3}(x') \psi_{s4}(x) \quad (1)$$

である。 $s$  はスピンを表す。このハミルトニアンは  $U(1)$  ゲージ変換  $\psi \rightarrow e^{i\xi} \psi$ ,  $\psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger e^{-i\xi}$ ,  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \xi$  に対して不変である。分配関数は以下のように与えられる。

$$Z[A_\mu] = \int \mathcal{D}\psi^\dagger \mathcal{D}\psi e^{iS[\psi, \psi^\dagger, A_\mu]}; \quad S = \int d^3x \psi^\dagger i \partial_0 \psi - \int dt H. \quad (2)$$

ここで超伝導状態を特徴付けるような、空間的に bi-local な補助場  $\Phi_{s1,s2}(x, x')$  を導入し、(1) 式を書き直すことを考える。これは、ストラトノビッチ・ハバード変換と同様の手法である。まず、次のようなガウス型の経路積分を考える。

$$N = \int \mathcal{D}\Phi^\dagger \mathcal{D}\Phi e^{i\Delta S}; \quad \Delta S = \int d^3x d^2x' (\Phi_{s2s1}^\dagger(x', x) - \psi_{s1}^\dagger(x) \psi_{s2}^\dagger(x')) \quad (3) \\ \times V_{s1s2;s3s4}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') (\Phi_{s3s4}(x', x) - \psi_{s3}(x') \psi_{s4}(x)),$$

$N$  は定数である。(3) 式を (2) 式に挿入することにより、 $Z[A_\mu]$  は

$$Z[A_\mu] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\Phi^\dagger \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\psi^\dagger \mathcal{D}\psi e^{iS+i\Delta S}, \quad (4)$$

とかける。ここで、 $A_\mu = 0$ 、かつ、 $\Phi$  の揺らぎを無視した場合を考える (平均場近似)。そのときの  $\Phi$  の停留値を  $\Phi^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  とする。これは今の状況の下で (4) 式中のフェルミオンを積分することにより得られる  $\Phi$  に対する有効作用の停留点であり、

$$\Phi_{s1s2}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \psi_{s1}(x) \psi_{s2}(x') \rangle, \quad \Phi_{s2s1}^{0\dagger}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \langle \psi_{s1}^\dagger(x) \psi_{s2}^\dagger(x') \rangle, \quad (5)$$

をみだす。ここで、期待値  $\langle \rangle$  の意味は  $\Phi = \Phi^0$  とした分配関数から計算されるものである。すなわち、self-consistent な方程式となっている。この期待値が 0 でない値を持つとき、 $U(1)$  のゲージ不変性が自発的に破れていることは容易に解る。また、ギャップ関数は

$$\Delta_{s1s2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -V_{s1s2;s3s4}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Phi_{s3s4}^0(\mathbf{x}', \mathbf{x}), \quad \Delta_{s3s4}^\dagger(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \Phi_{s2s1}^{0\dagger}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) V_{s1s2;s3s4}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (6)$$

で定義され、(5) 式を (6) 式に代入することによりやはり self-consistent なギャップ方程式が得られる。

次に、 $A_\mu$  に対する有効作用を考える。(4) 式において、フェルミオンと  $\Phi, \Phi^\dagger$  を積分するわけだが、 $\Phi, \Phi^\dagger$  の積分の際に特にゲージ不変性を回復する自由度に着目し、他の自由度は無視する。この自由度は  $\Phi^0$  のまわりの位相のダイナミカルな自由度であり、 $\Phi(x, x') = e^{-i\theta(x)} \Phi^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') e^{-i\theta(x')}$  と書かれる。これはすなわちゴールドストーンモードであり、質量が 0 である。よって、このモードは同時に低エネルギーの物理を考察する上でも最も重要な自由度である<sup>2</sup>。積分 (4) において、 $\psi \rightarrow e^{-i\theta} \psi$ ,  $\psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger e^{i\theta}$  という積分変数変換を行なう。このとき、積分の measure は不変であり

<sup>2</sup>いま考えているような unconventional な超伝導の場合、 $U(1)$  ゲージ不変性以外の連続対称性の自発的破れに伴うゴールドストーンモードが考えられるが、この議論では無視する。因に、spin-triplet の超伝導ではスピンについての  $SU(2)$  対称性の破れに関するゴールドストーンモードが存在するが、これは以下で行なう摂動の最低次の計算には効かないことが示されている [4]。

(i.e.,  $\mathcal{D}\psi^\dagger\mathcal{D}\psi' = \mathcal{D}\psi^\dagger\mathcal{D}\psi$ ),  $A_\mu$  は  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\theta$  と変換される。さらに、フェルミオンの表示として Bogoliubov-Nambu 表示をとる。これは、“アイソスピン”  $\alpha$  を導入する表示で、

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(x) \\ \psi_\downarrow^\dagger(x) \end{pmatrix} \text{ (spin singlet 対の場合)}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_s(x) \\ \psi_s^\dagger(x) \end{pmatrix} \text{ (spin triplet 対の場合)}$$

と書かれる。以下の議論では spin-triplet 対の場合、ギャップは unitary であることを仮定する。以上より (4) 式は

$$Z[A_\mu] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\Psi^\dagger \mathcal{D}\Psi e^{i(S+\Delta S)[\Psi, \Psi^\dagger, A_\mu + \partial_\mu\theta]}. \quad (7)$$

となる。フェルミオンの 1-loop の積分からチャーン・サイモン項の一部分である  $\sigma_{xy} A_0 \partial_i A_j$  という項が得られる [4] [5]。この項はそれ自身ではゲージ不変ではない。しかし、ゴールドストーンモードの積分を実行することによりこの項は

$$\int d^3x \sigma_{xy} \epsilon^{ij} \left( A_0 - \partial_0 \frac{\partial_0 A_0 - c_s^2 \partial \cdot \mathbf{A}}{\partial_0^2 - c_s^2 \partial^2} \right) \partial_i A_j, \quad c_s \simeq \frac{v_F}{2\pi}; \quad v_F, \text{ (フェルミ速度)} \quad (8)$$

のように明白にゲージ不変な形になる。この項は静的な極限ではチャーン・サイモン項と一致する。ここで、 $\sigma_{xy}$  は

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{8} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{\vec{g} \cdot (\partial \vec{g} \times \partial \vec{g}) - g_3 (\partial \vec{g} \times \partial \vec{g})_3}{|\vec{g}|^3} \text{ (spin singlet の場合)} \quad (9)$$

$$\frac{e^2}{8} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{\text{tr}[\vec{g} \cdot (\partial \vec{g} \times \partial \vec{g}) - g_3 (\partial \vec{g} \times \partial \vec{g})_3]}{\frac{1}{2} \text{tr}[\vec{g} \cdot \vec{g}]^{\frac{3}{2}}} \text{ (spin triplet unitary の場合)} \quad (10)$$

となる。 $\vec{g}$  は spin-singlet の場合  $\vec{g}(\mathbf{p}) = (\text{Re}\phi(\mathbf{p}), -\text{Im}\phi(\mathbf{p}), \epsilon(\mathbf{p}))^T$  である。但し、 $\phi(\mathbf{p})$  はギャップと  $\hat{\Delta}_{s,s'} = i(\sigma_2)_{s,s'}\phi(\mathbf{p})$  のように関係付けられている。 $\epsilon(\mathbf{p})$  はフェルミ面からはかった kinetic energy である。spin-triplet の場合は  $\vec{g}(\mathbf{p}) = (\text{Re}\hat{\Delta}(\mathbf{p}), -\text{Im}\hat{\Delta}(\mathbf{p}), \epsilon(\mathbf{p})\hat{1})^T$  のように  $2 \times 2$  行列となる。(9)、(10) 式とも前半部はトポロジカル不変量となっている。具体的に  $d_{x^2-y^2} + i\epsilon d_{xy}$  型の高温超伝導と  $Sr_2RuO_4$  の超伝導を考える。双方とも正方格子模型を用いる。オーダーパラメータの形やバンド構造 [1][2][6] を考慮して計算すると、

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{\epsilon}{|\epsilon|} + \mathcal{O}(\epsilon) \text{ (} d + i\epsilon d \text{ の場合)}, \quad \frac{e^2}{4\pi} (1 + \mathcal{O}((\frac{\Delta}{2t})^2 \times 10^{-2})) \text{ (} Sr_2RuO_4 \text{ の場合)} \quad (11)$$

となる。ここで、 $t$  はホッピングパラメータである。各々とも前半部は微細構造定数となっている。これは (9)、(10) 式のトポロジカル不変な部分からくるものである。 $d_{x^2-y^2} + i\epsilon d_{xy}$  型の場合は  $\epsilon$  が P と T の破れの大きさを表すパラメータとなっているが、上の結果は  $\epsilon$  が微少であっても  $\sigma_{xy}$  が有限であることを示す。

### 3 磁場なしで起る“ホール効果”

次に、P と T を破る超伝導体の静的な電磁気現象について議論する。先述の通り、静的な問題を考える場合は (8) 式はチャーン・サイモン項と一致する。今までの議論から P と T を破る超伝導体のギンツブルグ・ランダウ有効作用 [7] には、このチャーン・サイモン項が含まれるべきで

ある。z 軸に垂直な超伝導面が層状に重なっている状況を考える。秩序変数の時空依存性を無視すると、 $\text{div} \mathbf{A} = 0$  ゲージにおける有効作用は

$$S^{G-L} = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( \frac{m^2}{c_s^2} A_0^2 - m^2 \mathbf{A}^2 \right) + n_p \frac{\sigma_{xy}}{2} \epsilon^{ij3} (A_0 \partial_i A_j + A_i \partial_j A_0) \right], \quad (12)$$

である。ここで  $\lambda = m^{-1}$  は通常の超伝導体 (*i.e.*,  $\sigma_{xy} = 0$ ) の場合の磁場侵入長となる。また、 $n_p$  は z 軸方向の単位長さあたりの面の数をあらわす。ここで半径  $a$  の円筒形の穴の空いた超伝導体を考え、その中に放射状の電場  $E_0$  をかける。円筒の軸は z 軸方向を向いているとする。この状況の下で (12) 式から得られる Maxwell 方程式を解く。通常の超伝導体の場合、電場をかけても遮蔽されてしまうだけであるが、今の場合にはチャーン・サイモン項を通してスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルが結合するため、電場もそれに応じて  $\lambda$  の程度まで入り込むことが出来る。円筒座標を用いて議論すると、Maxwell 方程式の解から電流  $j_\theta(r)$  は

$$j_\theta(r) = -n_p \sigma_{xy} E_0 \theta(r-a) \left[ e^{-\frac{m}{c_s}(r-a)} - c_s \left( 1 - \frac{\chi}{2} \right) e^{-m(r-a)} + \frac{c_s \chi}{2m} \delta(r-a) \right] \quad (13)$$

となる。この結果は、外部磁場なしの“ホール効果”が起っていることを表している。ここで、パラメータ  $\chi$  は 0 か 1 をとるものとする。(13) 式の最後の項は boundary current を表しているが、これはチャーン・サイモン項が境界でゲージ不変性を破ることから来るものである。chiral edge mode はこの境界での破れをなくす働きをもつ、すなわち、boundary current をキャンセルする [8]。よって、 $\chi = 0$  は chiral edge mode が存在するとした場合を表し、 $\chi = 1$  は存在しない場合を表す。この“ホール電流”がつくる磁場は

$$B(r) = \int_\infty^r dr' j_\theta(r') = E_0 n_p \frac{c_s \sigma_{xy}}{m} \theta(r-a) \times \left[ e^{-\frac{m}{c_s}(r-a)} - \left( 1 - \frac{\chi}{2} \right) e^{-m(r-a)} \right] \quad (14)$$

となる。 $j_\theta(r)$ 、 $B(r)$  はともに  $a < r < a + \lambda$  の領域内に存在する。 $d_{x^2-y^2} + icd_{xy}$  型の高温超伝導や  $Sr_2RuO_4$  の超伝導の系における磁場分布を Fig.1 に示す。パラメータはこれらの系の典型的な値として  $c_s \simeq 10^6 \text{ cm/s}$ ,  $n_p \simeq 10^{-1} \text{ \AA}^{-1}$ ,  $\lambda \simeq 10^3 \text{ \AA}$  を用いた。

この磁場は SQUID によって測定し得ることが以下の議論から解る。穴の半径  $a \sim 1 \text{ mm}$  とし、SQUID コイルの半径  $R \sim a + \lambda$  とする。コイル内の平均磁束密度は

$$\bar{B} = \frac{1}{\pi R^2} \int d\theta \int_0^{a+\lambda} dr r B(r) \quad (15)$$

$$\simeq \left( \frac{\chi}{2} - 1 \right) \times 10^{-4} \times \left( \frac{E_0}{100 [\text{Volt/milimeter}]} \right) [\text{Tesla}].$$

となる。SQUID は  $10^{-15}$  Tesla 程度の磁場まで測定できるとされている。上記の結果はこの値より十分大きい。

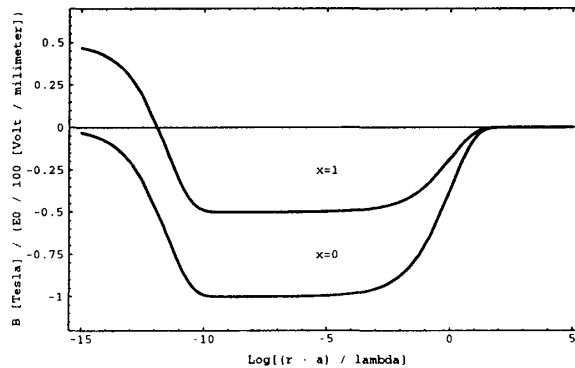


FIG. 1.

## 謝辞

前野悦輝氏、前田展希氏に感謝の意を表する。

## 参考文献

- [1] Y. Maeno, *et. al.*, Nature **372** 532-534 (1994); T. M. Rice and M. Sigrist, J. Phys.: Condensed Matter **7** L643 (1995); G. M. Luke, *et. al.*, Nature **394**, 558-561 (1998).
- [2] K. Krishana *et. al.*, Science **277**, 83 (1997); R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **80** 5188 (1998); G. E. Volovik, JETP Lett. **66**, 522 (1997); A. V. Valatsky and R. Movshovich, the Proceedings of Stripes 98.
- [3] J.Goryo and K.Ishikawa, cond-mat/9812412 (submitted to Phys. Rev. Lett.).
- [4] J. Goryo and K. Ishikawa, J. Phys. Soc. Jpn. **67**, 3006 (1998); Phys. Lett. A. **246** 549 (1998).
- [5] G.E. Volovik, Sov. Phys. JETP **67**, 1804 (1988).
- [6] A. P. Mackenzie *et. al.*, Phys. Rev. Lett. **76** 3786 (1996);  
Y. Yoshida *et. al.*, J. Phys. Soc. Jpn. **67** 1677 (1998).
- [7] M. Sigrist and K. Ueda, Rev. Mod. Phys. **63** 239 (1991).
- [8] X. G. Wen, Phys. Rev. B **43** 11025 (1991); N. Maeda, Phys. Lett. B **376** 142 (1996).