

Quantum Hall Gas around Half-filled Landau Level

北海道大学 理学部 前田 展希¹、落合 哲行、石川 健三

量子ホール系において圧縮率が有限の電子状態の安定性を、フォンノイマン格子上的平均場理論を用いて調べた。最低ランダウ順位空間では、クーロン相互作用から運動エネルギー項がダイナミカルに生じる。その結果、スペーサーの厚さがある値以上のときにフィリングが $1/2$ の周りで、圧縮率が正で有限な状態が実現可能であることが示された。

1 Introduction

分数量子ホール効果 [1] はフィリング ν が奇数分母の有理数のときに非圧縮性量子液体状態 [2] が実現することで起きる現象である。この状態はエネルギーギャップを持ち、絶対零度で縦伝導度がゼロになりホール伝導度が e^2/h の有理数倍に量子化される。この有理数はフィリングがとる有理数と一致し、 $\nu = p/(2pn \pm 1)$, $p = 1, 2, \dots$ の系列が実験的にはっきりと観測されている。この系列の集積点は $\nu = 1/2n$ という偶数分母の状態であり、この状態が最近注目されている。

複合フェルミオン模型 [3, 4] によるとこの状態では外部磁場と電子が結合した複合フェルミオンが磁場がない時の自由電子のように振舞うことが予想される。すなわち、基底状態はギャップレスでフェルミ面を持つ。実際、フェルミ面が形成されることが $\nu = 1/2$ の周りで確かめられた [5, 6]。しかし、複合フェルミオン模型では運動エネルギー項は計算の出発点から手で加えられており、この項の起源は不明確である。そこで我々は微視的なハミルトニアンから出発して、フォンノイマン格子上的平均場理論によりフェルミ面を持つ状態を構成し、その安定性を議論する。我々はこの状態を量子ホール気体 (Quantum Hall Gas) と呼ぶ。

最低ランダウ順位に射影した空間では運動エネルギー項は定数になり、ハミルトニアンは相互作用項だけになる。電子の相関関数を平均場とすると平均場ハミルトニアンは運動エネルギー項と同じ形になる。我々は自己無撞着な平均場解としてフェルミ面を持つようなものを求め、圧力や圧縮率をフィリングの関数として計算する。また、圧縮率が正になる条件から、このような状態が $\nu = 1/2$ の周りで安定に存在するにはスペーサーの厚みがある値以上でなければならない事を示す [7]。以下では、 $\hbar = c = 1$ とし、フォンノイマン格子の格子定数の単位 $a = \sqrt{2\pi\hbar/eB}$ を 1 ととる。

¹講演者、E-mail:maeda@particle.sci.hokudai.ac.jp

2 Mean field theory on the von Neumann lattice

フォンノイマン格子は一様磁場中の二次元量子系の表現空間であり、サイクロトロン運動の中心座標のコヒーレント状態を基底に用いる [8]。この基底状態は二次元格子点上に局在しており、単位胞当たり単位磁束が貫くように格子定数を選ぶと完全系を成すことが知られている。この格子上のワニエ基底で電子場をモード展開することにより、最低ランダウ順位におけるハミルトニアンは

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{X}} : b^\dagger(\mathbf{X}_1) b(\mathbf{X}'_1) V(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) b^\dagger(\mathbf{X}_2) b(\mathbf{X}'_2) :, \quad (1)$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}'_1$, $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}'_2$, $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}'_2$, であり $\mathbf{X}_i, \mathbf{X}'_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}'_i$ は二次元格子点の位置ベクトルである。 b はワニエ基底に対する消滅演算子である。 $::$ は正規順序を意味する。 V は座標の差だけの関数なので、この系は格子上で並進不変性を持つ。この不変性を持った平均場を次のように導入する。

$$U_0(\mathbf{X} - \mathbf{X}') = \langle b^\dagger(\mathbf{X}') b(\mathbf{X}) \rangle, \quad U_0(0) = \nu. \quad (2)$$

ここで ν はフィリングである。この平均場を用いて平均場ハミルトニアンは次のように書ける。

$$H_{\text{mf}} = \sum_{\mathbf{X}, \mathbf{X}'} \left\{ -U_0(\mathbf{X} - \mathbf{X}') v(\hat{\mathbf{X}}' - \hat{\mathbf{X}}) b^\dagger(\mathbf{X}) b(\mathbf{X}') + \frac{1}{2} U_0(\mathbf{X} - \mathbf{X}') v(\hat{\mathbf{X}}' - \hat{\mathbf{X}}) U_0(\mathbf{X}' - \mathbf{X}) \right\}. \quad (3)$$

ここで $v(\mathbf{X}) = \pi q^2 e^{-(\pi/2)\mathbf{X}^2} I_0((\pi/2)\mathbf{X}^2)$, であり $\hat{\mathbf{X}}$ はワニエ基底関数の実空間における中心座標である。この平均場ハミルトニアンの第一項は格子上のホッピング項である。一体エネルギーを $\varepsilon(\mathbf{p})$ とすると、自己無撞着な平均場に対する方程式

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2 p_1}{(2\pi)^2} \tilde{v}_f(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) \theta(\mu_0 - \varepsilon(\mathbf{p}_1)) \quad (4)$$

が得られる [7]。ここで μ_0 は平均場エネルギーに対する化学ポテンシャルである。この式を解くことにより、フェルミ面が求められる。我々はこのようなフェルミ面を持った状態を量子ホール気体と呼ぶ。(4) 式を一般的に解くのは困難なので、解の空間を制限して解くことにする。まず、フォンノイマン格子を長方形の格子にとり二つの辺の長さの比 r^2 をフリーパラメーターにする。また、フェルミ面を $|p_y| = \pi\nu$ とする。これが (4) 式を満たすのは明らかである。以上の条件の下で $\varepsilon(\mathbf{p})$ を数値的に求めた。フェルミ速度 $v_F = \partial\varepsilon/\partial p$ はフェルミ運動量 $p_F = \pi\nu$ で対数発散し、クーロンギャップが生じる。一見するとこれは圧縮性がゼロの非圧縮性状態を意味するように思えるが、実際には ε がフィリングに依存することにより圧縮性は負になる。

一粒子当たりのエネルギーの平均場からの寄与は

$$E_{\text{mf}}(\nu) = \frac{1}{2\nu} \int_{-\pi\nu}^{\pi\nu} \frac{dp_y}{2\pi} \varepsilon(p_y, \nu), \quad (5)$$

で与えられる。平均場の周りの揺らぎによる寄与は次のようなハートレー項を含む [7]。

$$\begin{aligned}
 E_h(\nu) &= \frac{1}{2\nu} \sum_{\mathbf{X}} U_0(\mathbf{X}) \tilde{v}(2\pi\hat{\mathbf{X}}) U_0(-\mathbf{X}) \\
 &= q^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r e^{-\pi(n/r)^2} \sin^2(\pi\nu n)}{\pi^2 \nu n^3}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

ここで我々は一粒子当たりの系のエネルギーを $E_0(\nu) = E_{mf}(\nu) + E_h(\nu)$ と近似する。パラメータ r は $E_0(1/2)$ が最小になるように決めると、 $r = 1.64$ となった。

複合フェルミオン模型では $\nu = 1/2$ でフェルミ波数が $k_F = \sqrt{4\pi n_e}$ となる。 $(n_e$ は電子密度。) これは実験でも確かめられている。我々のモデルでは $k_F = r\pi\sqrt{\nu n_e}$ となる。これは $\nu = 1/2$ で複合フェルミオン模型の値に非常に近い。

3 Compressibility of the quantum Hall gas

圧力 P と圧縮率 κ は一粒子当たりの系のエネルギー $E(\nu)$ を用いて

$$P = \nu^2 E'(\nu), \tag{7}$$

$$\kappa^{-1} = \nu P'(\nu) \tag{8}$$

で定義される。これらを $E(\nu)$ を $E_0(\nu)$ で近似して計算すると両方とも $0 < \nu < 1$ で負になる。圧縮率が負ということは、今考えている気体状態が不安定であることを意味する。ここまでの計算では一様に分布した背景電荷が二次元電子系が存在する二次元面にあると仮定していた。

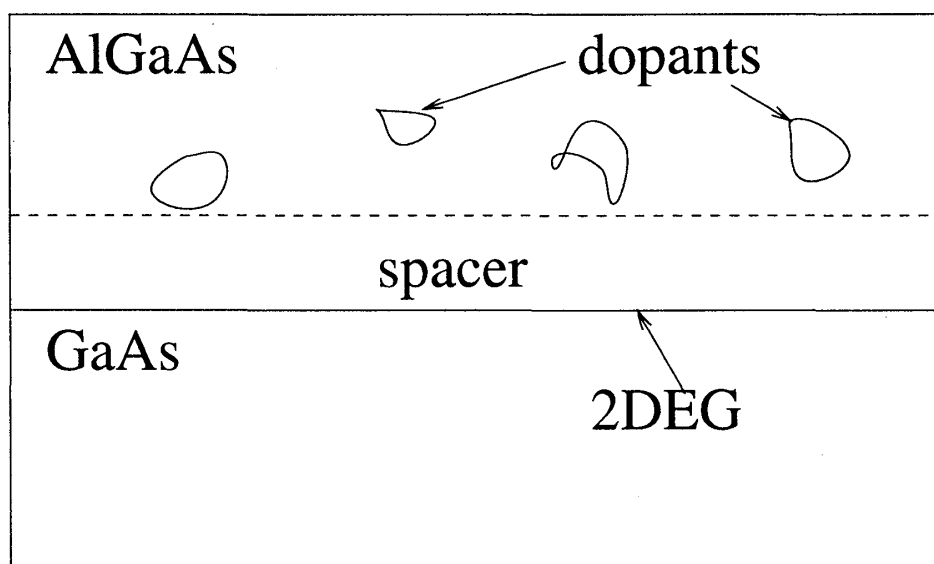


Fig. 1. 高移動度の GaAs/AlGaAs 系のホールバーではスペーサーにより二次元電子系が存在する二次元面から離れた所に dopants が存在する。

ところが、実際の実験で使われている高移動度の GaAs/AlGaAs 系のホールバーではスペーサーにより二次元電子系が存在する二次元面から離れた所に背景電荷 (dopant) が存在する。Fig. 1 を見よ。スペーサーの厚さを d とし、背景電荷が二次元面内に一様に分布しているとすると、一粒子当たりの系のエネルギーが $2\pi q^2 \nu d$ だけ増加する。(ここで、クーロンポテンシャル $V(r) = q^2/r$ を用いた。) よって、Eq. (8) で与えられる $d = 0$ における圧力と圧縮率をそれぞれ P_0, κ_0 とすると、

$$P = P_0 + 2\pi q^2 \nu^2 d, \quad (9)$$

$$\kappa^{-1} = \kappa_0^{-1} + 4\pi q^2 \nu^2 d, \quad (10)$$

となり、 d を増加させると P と κ^{-1} は共に増加する。よって、 P や κ が負から正に変わる d の臨界値が存在する。数値計算によると、 $\nu = 1/2$ における P に対する臨界値 d_{c1} は $d_{c1} = 0.154a$ 、 κ に対する臨界値 d_{c2} は $d_{c2} = 0.115a$ である。これら臨界値の大きさは $B = 10\text{T}$ で 1nm のオーダーである。実際のホールバーでは d は 10nm 以上なので、今考えている量子ホール気体状態が安定に存在できると思われる。

$d > d_{c2}$ では圧縮率が正の安定な領域が $\nu = 1/2$ を中心にして対称に現れる。これは粒子反粒子対称性によるものである。ただし、圧力が正の領域は対称ではない。

4 Summary and discussion

我々はフォノンイマン格子上的平均場理論により量子ホール気体状態を構成し、その安定性を議論した。その結果、スペーサーが量子ホール気体状態を安定化させることがわかった。 $\nu = 1/2$ におけるスペーサーの厚みの臨界値は現在の量子ホール系における値よりも小さいので、量子ホール気体状態が実際に実現していると思われる。しかし、臨界値は理想化した系における値なので定量的に実際の系の安定性を議論するには電子系の厚みの効果や不純物の影響、有限温度効果などを考慮する必要がある。これは今後の課題である。

ここではギャップレスの状態を考えたが、もし平均場が格子上的並進対称性を破ればギャップフルの状態が実現可能となる。実際、位相部分が磁束を持つような並進対称性を破る平均場のもとで $\nu = p/(2pn \pm 1)$, $p = 1, 2, \dots$ の系列のギャップエネルギーを計算すると、実験値と良く合う結果が得られる [9]。このように、フォノンイマン格子上的場の理論を用いることにより量子ホール系の様々な現象を統一的に理解することが可能であろう。

参考文献

- [1] D. C. Tsui, H. L. Störmer, and A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48** (1982), 1559.
- [2] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50** (1983), 1395.
- [3] J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **63** (1989), 199.

- [4] B. I. Halperin, P. A. Lee, and N. Read, *Phys. Rev. B* **47** (1993), 7312.
- [5] R. L. Willet, R. R. Ruel, K. W. West, and L. N. Pfeiffer, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993), 3846.
- [6] W. Kang, H. L. Stormer, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993), 3850.
- [7] K. Ishikawa, N. Maeda, and T. Ochiai, cond-mat/9812410.
- [8] K. Ishikawa, N. Maeda, T. Ochiai, and H. Suzuki, *Physica E* **4** (1998), 37.
- [9] K. Ishikawa and N. Maeda, *Prog. Theor. Phy.* **57** (1997), 507.